

Dennis Pipenbring

Matematik B-niveau

- stx 2017



2017

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispienbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

Matematik B-niveau - stx 2017

© Dennis Pienbring, matX ApS 2017

o. udgave

Udgivet af matX ApS

Forord

Det er ikke meningen at den skal læses fortløbende. Der kan være pædagogiske og læringsmæssige fordele i at blande kapitlerne fx tage sandsynlighed efter linære funktioner og opsparing efter eksponentielfunktioner. Grunden til opbygningen skyldes at bogen også kan bruges som opslagsværk og derfor er emnerne samlet i kapitler. Det er også muligt at inddrage betydningen af forklaringsgraden og regression i kapitlet om funktion.

Opgaverne er opdelt i to grupper

Øvelse 1 Disse opgaver skal løses uden IT-værktøj.

Øvelse 2 Disse opgaver skal løses med IT-værktøj.

Indhold

Forord	3
1 Deskriptiv statistik	7
1.1 Observation og hyppighed	8
1.2 Frekvens	9
1.3 Gennemsnit	11
1.4 Kumulerede frekvenser	12
1.5 Diagrammer	13
1.5.1 Sumkurve	13
1.5.2 Boksplot	15
1.5.3 Histogram	17
1.5.4 Lorenzdiagram og Gini koefficient	18
1.6 Ugrupperede observationer	22
1.7 Indekstal	28
1.7.1 Turbulens 1900-1945	29
1.7.2 Stabilitet 1945-1980	30
1.7.3 Stagnation 1980-2010	31
2 Funktioner	33
2.1 Lineære funktioner	35
2.1.1 Forskydning af grafen for en funktion	42
2.1.2 Ligefrem- og omvendt proportional	44
2.1.3 Inverse funktioner	48
2.2 Eksponentielle funktioner	51
2.2.1 Forskydning af grafen for en eksponentiel- funktion	57
2.3 Logaritmefunktioner	61
2.3.1 Forskydning af logaritmefunktionen	65
2.4 Mere om eksponentialfunktionen	66
2.5 Andengradspolynomium	69
2.6 Den inverse funktion til andengradspolynomiet . .	76

2.7	Polynomier generelt	79
2.8	Potensfunktion	82
2.9	De trigonometriske funktioner	88
2.10	Funktionskompositioner	93
2.10.1	Regning med funktioner	93
2.10.2	Stykkevis og sammensatte funktioner	94
2.11	Eksamensspørgsmål	98
3	Sandsynlighedsregning	99
3.1	Kombinatorik	103
3.1.1	Multiplikationsprincippet	103
3.1.2	Kombinationer uden tilbagelægning	104
4	Statistik	107
4.1	Binomialfordeling og test	108
4.2	Binomialtest	119
4.2.1	Binomialtest	119
4.3	χ^2 -fordeling	121
4.4	Mindste kvadraters metode	122
4.4.1	Regressionsmodellens gyldighed	125
4.4.2	Regressionsmodellens troværdighed	129
4.5	Eksamensspørgsmål	129
5	Opsparing og lån	131
6	Vektorer	147
6.1	Længden af en vektor	153
6.2	Vektor aritmetik	159
7	Plangeometri	193
8	Differentialregning	195
8.1	Grænseværdi	204
8.2	Kontinuitet	207
8.3	Differentialkvotienten	209
8.4	Væksthastighed	219
8.5	Tangentbestemmelse	221
8.6	Monotoniforhold	224
8.7	Ekstremum	227
8.8	Optimering	229

8.9 Eksamensspørgsmål	234
---------------------------------	-----

1

Deskriptiv statistik

I en verden med en endeløs strøm af data, skal data systematiseres og ordnes for at få overblik. Overblikket giver mulighed for at træffe de gode beslutninger. Beslutninger der fører til det gode liv.

Deskriptiv statistik er et redskab til at beskrive et datamateriale. Ofte vil et datamateriale være for omfattende til, at det er muligt at overskue og konkludere noget om, det blot ved at se på selve datamaterialet. Derfor er der udviklet forskellige metoder, modeller og tabeller, som gør det muligt at overskue store mængder af data, og på baggrund af disse modeller og tabeller er det muligt at drage konklusioner på baggrund af datamaterialet. Hvis man ikke forstår at læse tabeller og hvis man ikke ved, hvordan man skal forstå de statistiske begreber, kan man *ikke* selv drage konklusioner eller forstå andres konklusioner. Så vil man meget let blive snydt når man læser, hører eller ser andres udtalelser, når disse tager udgangspunkt i statistisk materiale.

Som eksempel på anvendelse af deskriptiv statistik ses på ulighed. Ulighed mellem mennesker er en rejse i tid og rum. Når man er ung og studerende har man en lille indkomst og en lille eller ingen formue, måske endda en lille gæld. Når man lige har etableret sig med hus, bil og børn og lige er begyndt at arbejde, har man en større indkomst og en stor gæld. Når man er blevet ældre og har haft en del år med egen virksomhed eller på arbejdsmarkedet som lønmodtager, har man en stor indkomst og en lille gæld og måske også en formue. Når man er gået på pension har man en lille indkomst og en stor formue. Hvordan skal man så måle den økonomiske ulighed?

1.1 Observation og hyppighed

Den mindste enhed i et datasæt er en observation. Det kan være observationer af næsten alt hvad, man kan tænke sig, her ses på disponibel personlig indkomst fra <http://statistikbanken.dk/INDKP106> fra år 2015.

<i>Indkomst</i>	<i>Hyppighed</i>
Under 25.000 kr.	272 999
25.000 - 49.999 kr.	136 641
50.000 - 74.999 kr.	172 592
75.000 - 99.999 kr.	250 438
100.000 - 124.999 kr.	325 072
125.000 - 149.999 kr.	382 402
150.000 - 174.999 kr.	464 507
175.000 - 199.999 kr.	413 384
200.000 - 224.999 kr.	389 041
225.000 - 249.999 kr.	359 977
250.000 - 299.999 kr.	573 285
300.000 - 349.999 kr.	361 536
350.000 - 399.999 kr.	209 702
400.000 - 449.999 kr.	120 056
450.000 - 499.999 kr.	70 366
500.000 kr. og derover	161 659
I alt	4 663 657

Tabel 1.1: Personlig disponibel indkomst med hyppighed.

For at gøre det lidt mere enkelt inddeles i 6 indkomstintervaller.

■ **Eksempel 1** Antallet af personer med en indkomst under 100 000 kr beregnes ved at lægge de første fire indkomstintervaller sammen.

$$272\,999 + 136\,641 + 172\,592 + 250\,438 = 832\,670$$

■

Øvelse 3 Beregn antallet af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 400 000 kr

<i>Indkomst</i>	<i>Hyppighed</i>
Under 100 000 kr.	832 670
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303
300 000 - 400 000 kr.	571 238
400 000 - 500 000 kr.	190 422
500 000 kr. og derover	161 659
I alt	4 663 657

Tabel 1.2: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed.

Øvelse 4 Opstil fire tilsvarende hyppighedstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug tabellen <http://statistikbanken.dk/INDKP106>.

1.2 Frekvens

Definition 1 Frekvensen er hyppigheden divideret med det totale antal observationer.

$$\text{Frekvensen} = \frac{\text{Hyppigheden}}{\text{Det totale antal observationer}} \cdot 100\%$$



Video der forklarer beregning af frekvens.

■ **Eksempel 2** Frekvensen af personer med en indkomst under 100 000 kr.

$$\frac{832\,670}{4\,663\,657} \cdot 100\% \approx 17,85\%$$

■

Øvelse 5 Beregn frekvensen af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 400 000 kr.

Det er en fordel at bruge et IT-værktøj, hvis der skal laves flere beregninger og særligt hvis der skal tegnes diagrammer. Her introduceres Maple som IT-værktøj. Det er særligt vigtigt at bemærke at i Maple bruges decimal punktum. Statistikbanken bruger punktum som tusindtalsseparator, og det betyder, at tal der i statistikbanken står som 50.000, i Maple skal skrives 50000 uden punktum. Statistikbanken bruger decimal komma, og det betyder at der i

statistikbanken står 54.623,75, i Maple skal det skrives 54623.75 uden tusindtalsseparator og med decimal punktum.

En anden vigtigt notation i Maple er notationen for et interval. I statistikbanken står der 25.000 - 50.000, i Maple skal de skrives 25000..50000. Der bruges altså to punktummer i stedet for en streg.

Bemærk at der ikke er en øvre og nedre græse i statistikbanken. Disse grænser skal senere bruges i beregninger og derfor vælges 0 kr som den nedre grænse og 1 000 000 som den øvre grænse.

Maple

with(Gym):

```
data:=
[
  0 .. 100000      832670
  100000 .. 200000 1585365
  200000 .. 300000 1322303
  300000 .. 400000 571238
  400000 .. 500000 190422
  500000 .. 1000000 161659
]
```

frekvensTabel(data, output = tabel)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 100000	832670	17.85	17.9
100000 .. 200000	1585365	33.99	51.8
200000 .. 300000	1322303	28.35	80.2
300000 .. 400000	571238	12.25	92.5
400000 .. 500000	190422	4.083	96.5
500000 .. 1000000	161659	3.466	100

Det er værd at bemærke at summen af frekvenserne altid skal være 100 %. Hvis det ikke er tilfældet, er der lavet en regnefejl.



Video der viser hvordan der kan arbejdes med grupperede observationer i Maple.

Øvelse 6 Opstil frekvenstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug hyppighedstabellerne fra tidligere.

Øvelse 7 Kommentér forskellen mellem indkomsten for de fire aldersgrupper. Hvorfor er det vigtigt at omregne til frekvens (procent)?

<i>Indkomst</i>	<i>Hyppighed</i>	<i>Frekvens (%)</i>
Under 100 000 kr.	832 670	17,85
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365	33,99
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303	28,35
300 000 - 400 000 kr.	571 238	12,25
400 000 - 500 000 kr.	190 422	4,083
500 000 kr. og derover	161 659	3,466
I alt	4 663 657	100

Tabel 1.3: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed og frekvens.

1.3 Gennemsnit

Det samlede gennemsnit udregnes ved at gange gennemsnittet med frekvensen for hvert interval og lægge resultaterne sammen.

Kendes gennemsnittet ikke for de enkelte intervaller anvendes intervalmidtpunkterne til udregningen af det samlede gennemsnit.

■ **Eksempel 3** Gennemsnittet af den personlige disponible indkomst

$$17,85 \cdot 50\,000 + 33,99 \cdot 150\,000 + \dots = 218\,044$$

Den gennemsnitlige personlige indkomst er 218 044 kr. ■

Bemærk at middeltallet skal være et tal der ligger mellem det højeste og det laveste tal i datasættet, ellers er der lavet en regnefejl.

Øvelse 8 Bestem de gennemsnitlige indkomster for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen gennemsnit bruges.

Maple

```
with(Gym):
gennemsnit(data)
```

218043.790527477



Video der forklarer hvordan gennemsnit kan beregnes.

1.4 Kumulerede frekvenser

Den kumulerede frekvens af en observation er frekvensen af alle observationer mindre end observationen.

■ **Eksempel 4** Den kumulerede frekvens for en disponibel personlig indkomst på 400 000 kr. er

$$17,85 + 33,99 + 28,35 + 12,25 = 92,5$$

Det betyder at 92,5% af personerne har en disponibel personlig indkomst under 400 000 kr. Der er derfor 7,5 % der har en disponibel personlig indkomst over 400 000 kr. ■

Indkomst	Hyppighed	Frekvens (%)	Kumuleret (%)
Under 100 000 kr.	832 670	17,85	17,85
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365	33,99	51,84
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303	28,35	80,19
300 000 - 400 000 kr.	571 238	12,25	92,44
400 000 - 500 000 kr.	190 422	4,083	96,523
500 000 kr. +	161 659	3,466	99,989
I alt	4 663 657	100	



Video der viser hvordan kumulerede frekvenser bestemmes.

Tabel 1.4: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed, frekvens og kumuleret frekvens.

Øvelse 9 Bestem den kumulerede frekvens for en disponibel personlig indkomst på 200 000 kr.

Øvelse 10 Bestem de kumulerede frekvenser for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

1.5 Diagrammer

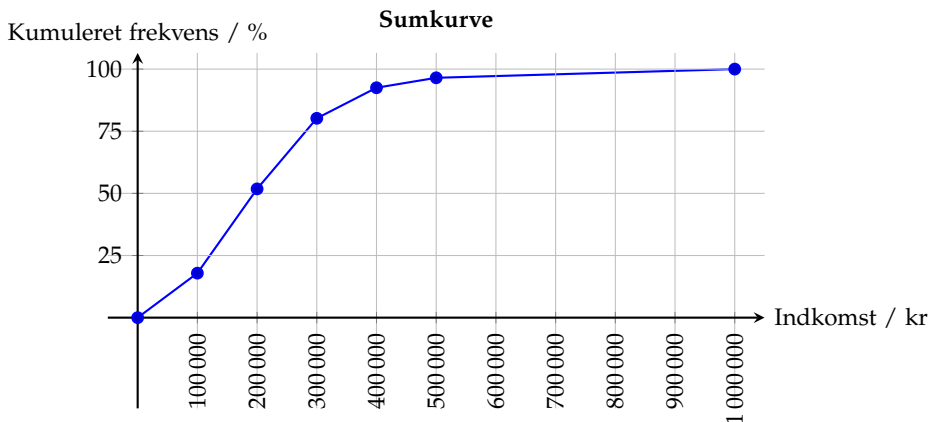
Et diagram er en grafisk måde at illustrere data på. Her ses på tre diagrammer.

1.5.1 Sumkurve

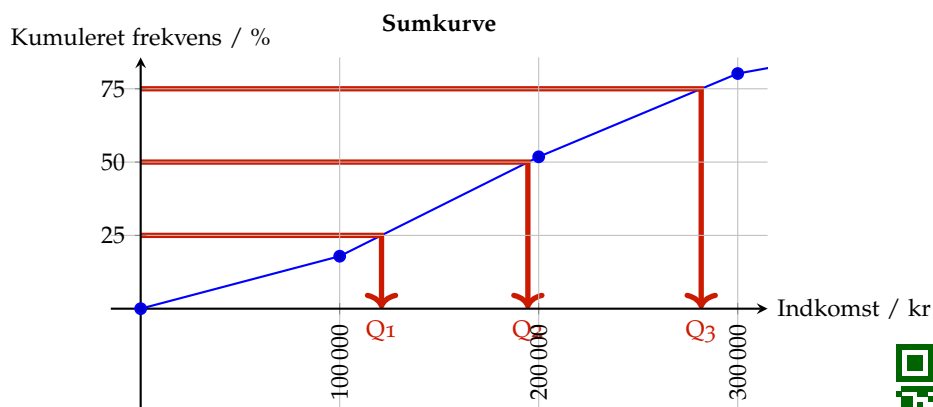
Sumkurven tegnes ved at afmærke den summerede frekvens som y -værdien og endepunkterne af de tilhørende intervaller som x -værdien i et koordinatsystem. Der ud over afmærkes startpunktet af det første interval på x -aksen, som i dette tilfælde er 0. På grafen er disse punkter markeret med •. Herefter sættes streger mellem punkterne.



Video der viser hvordan sumkurven tegnes.



Kvartilerne aflæses ved at gå fra hhv. 25 %, 50 % og 75 % på y -aksen til kurven og derefter ned på x -aksen og aflæse kvartilerne.



Symbol	Kvartil	Indkomst
Q_1	Nedre kvartil	121 020 kr.
Q_2	Median	194 560 kr.
Q_3	Øvre kvartil	281 650 kr.



Video der viser hvordan kvartilerne aflæses.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen `plotSumkurve` bruges.

Maple

```
plotSumkurve(data)
```

En sumkurve kan også anvendes til at aflæse hvor mange procent der er indenfor et givet interval. På sumkurven ses at 35% har en indkomst der er 150 000 kr. eller under, og der er 66% der har en indkomst der er 250 000 kr. eller under. Ved at trække de to procenttal fra hinanden, fås det at 31% har en indkomst mellem 150 000 kr. og 250 000 kr.

Øvelse 11 Tegn sumkurven og aflæs kvartilerne for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

Øvelse 12 Udregn hvor mange procent af de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige der har en indkomst mellem 150.000 kr. og 250.000 kr.

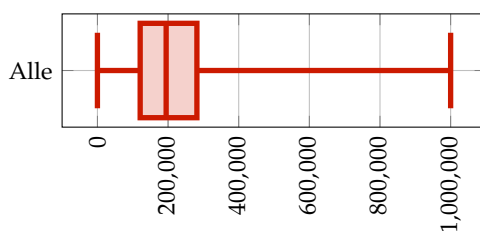
Øvelse 13 Fattigdomsgrænsen kan fx sættes ved 50% af medianindkomsten.

1. Hvad er så fattigdomsgrænsen for den personlige disponible indkomst i kr.?
2. Hvor mange procent af personerne er så fattige?
3. Bestem fattigdomsgrænsen for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

1.5.2 Boksplot

Boksplot kan tegnes ud fra den mindste og den største observationsværdi i datasættet og kvartilsættet.

Deskriptor	Indkomst (kr.)
Mindste værdi	0
Første kvartil	121 020
Anden kvartil / median	194 560
Tredje kvartil	281 650
Største værdi	1 000 000



Formålet med boksplottet er at se fordelingen af indkomsterne. I boksplottet inddeles data i fire lige store dele. 25 % af personerne ligger mellem mindste værdi og første kvartil og 25 % af personerne ligger mellem første og anden kvartil osv.

Hvis data er indlæst kan en boksplot i Maple tegnes med kommandoen boksplot.

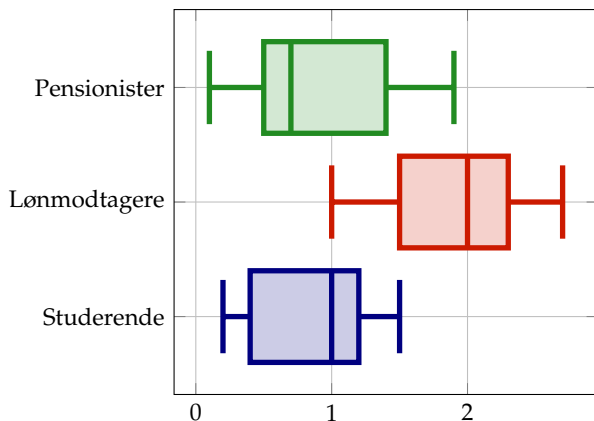


Video der forklarer hvordan et boksplot tegnes.

Maple

```
with(Gym):  
boksplot(data)
```

Meget ofte anvendes boksplottet til at sammenligne to eller flere datasæt. Ét kvartilsæt bestemmes for hver af datasættene, og boksplottene tegnes i samme koordinatsystem.



Skal to boksplot sammenlignes og er data indlæst som dataA og dataB kan boksplot også benyttes.

Maple

```
with(Gym):  
boksplot(dataA,dataB)
```

Skal tre eller flere boksplot tegnes, kan Statistics-pakken bruges med kommandoen BoxPlot. Her skal mindste observationsværdi, første kvartil, anden kvartil, tredje kvartil og største observationsværdi indtastes.

```
BoxPlot([min, Q1, Q2, Q3, max])
```

Med denne kommando er det også muligt at sætte labels på data. Det er også muligt at sætte egne farver på boksene, se Maples hjælpefunktion.

Maple

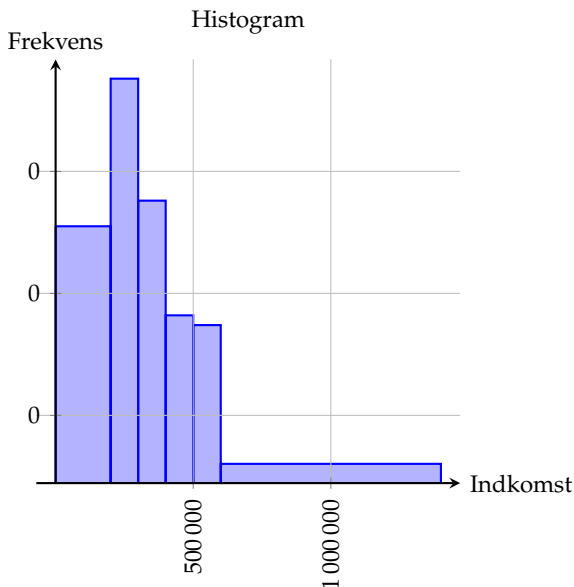
```
with(Statistics):
BoxPlot([[1,2,3,4,6], [1.4, 3, 5, 6.5, 9], [3.4, 4.5,
      5, 6, 7]], datasetlabels = [Studerende, Lønmodtagere,
      Pensionist])
```

Øvelse 14 Tegn boksplottet for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige i samme koordinatsystem.

Øvelse 15 Kommentér forskellen i indkomsten for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige med udgangspunkt i boksplottet.

1.5.3 Histogram

I histogrammet skal bredden af søjlerne være intervallængden og højden er intervallfrekvensen divideret med intervallængden.



Histogrammet tegnes i Maple med kommandoen `plotHistogram`, der er i Gym-pakken og data skal være indlæst.

Maple

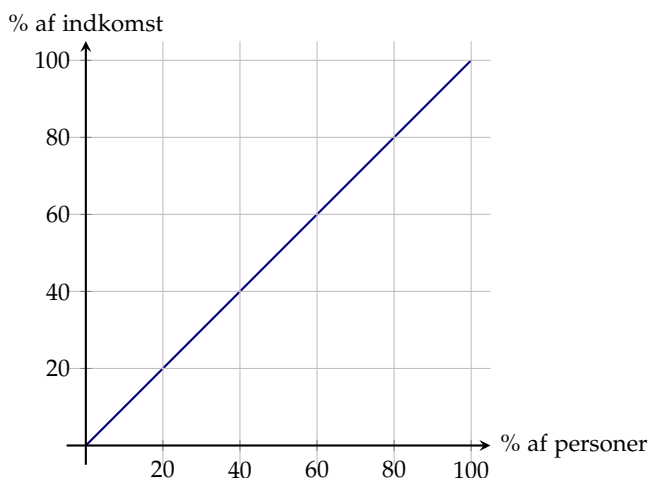
```
with(Gym):  
plotHistogram(data)
```

Øvelse 16 Tegn histogrammet for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

Øvelse 17 Hvad kan siges udfra histogrammet for de fire aldersgrupper?

1.5.4 Lorenzdiagram og Gini koefficient

Lorenzdiagrammet viser hvor stor uligheden er fx i forhold til indkomsten. I figuren herunder er der fuldstændig lighed idet de 10 % af personerne, som har den laveste indkomst, også har 10 % af den samlede disponible indkomst. Og 20 % af personerne, der har den laveste indkomst, også har 20 % af den samlede disponible indkomst osv. Sagt på en anden måde: Alle tjener det samme.



For at tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koefficienten, anvendes tabellen <http://statistikbanken.dk/IFOR21>. I denne tabel findes decilgrænserne for 1. til 9. decil. I decilfordelingen er befolkningen inddelt efter indkomst i ti lige store grupper, sådan

at de 10 % med den laveste indkomst er i den 1. decil og de næste 10 % ligger i 2. decil. En decilgrænse er den indkomst, der ligger mellem to deciler. For eksempel er 157 851 kr de beløb der ligger mellem 2. og 3. decil. Det betyder at 20 % af befolkningen tjener mindre end dette beløb og 80 % tjener mere end dette beløb. Se også Danmarks Statistiks publikation »Decilgrupper og decilgrænser« fra September 2017 (3 sider).

<i>Decil</i>	<i>Decilgrænse 2015</i>
1. decil	125997
2. decil	157851
3. decil	180497
4. decil	205139
5. decil	230140
6. decil	256941
7. decil	288152
8. decil	329248
9. decil	399606

For at kunne tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koeficienten skal der være en øvre grænse for den 10. decil. I tabel <http://statistikbanken.dk/IFOR31> kan gennemsnittet findes for alle 10 deciler og det giver en idé om hvad en fornuftig øvre grænse for 10. decil kan være. Prøv at ændre den øverste grænse fx til 800 000 og se hvad det gør ved Lorenzkurven.

Fordi grupperne indeholder det samme antal personer, kan tallene bruges direkte til at tegne Lorenzdiagrammet. Det er altså ikke nødvendigt at beregne den samlede indkomst for den enkelte gruppe, ved at gange gennemsnittet med antallet af personer i gruppen. Derefter beregnes den samlede indkomst for hele befolkningen, ved at lægge den samlede indkomst for hver af grupperne sammen, for så derefter at beregne den enkeltes gruppes andel af den samlede indkomst. Havde grupperne indeholdt forskellige antal personer, skulle der have været korrigeret for dette.

I Maple kan kommandoen `plotLorenzdiagram` bruges på data fra statistikbanken. Bemærk, at det er de kumulerede frekvenser,

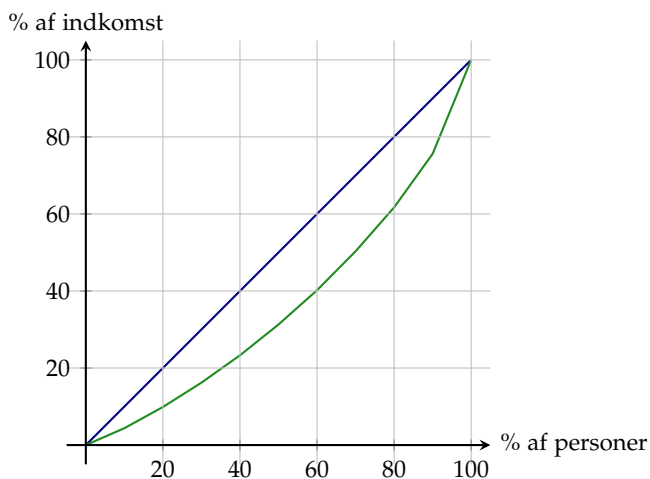
der skal bruges i kommandoen `plotLorenzdiagram`. Derfor bruges kommandoen `kumuleretFrekvens` også på data.

Maple

`with(Gym):`

```
data:=
[ 0..0.1  125997
  0.1..0.2 157851
  0.2..0.3 180497
  0.3..0.4 205139
  0.4..0.5 230140
  0.5..0.6 256941
  0.6..0.7 288152
  0.7..0.8 329248
  0.8..0.9 399606
  0.9..1   700000 ]
```

```
plotLorenzdiagram(kumuleretFrekvens(data))
```



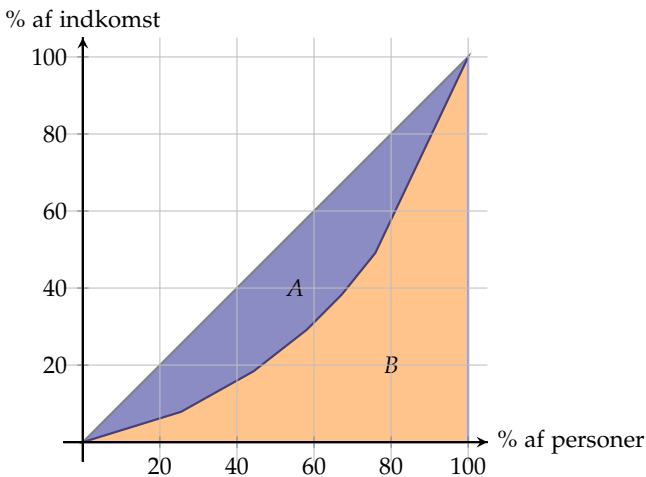
Øvelse 18 Tegn Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister.

Øvelse 19 Sammenlign Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister og diskuter årsager til forskellene.

Øvelse 20 I stedet for at bruge decilgrænserne til at tegne Lorenzdiagrammet kan gennemsnittet også bruges, men hvad er mest rigtigt? Diskuter hvilke forudsætninger der implicit antages ved hver af de to metoder.

Gini-koefficienten er et tal mellem 0 og 1 der viser uligheden i indkomstfordelingen i en bestemt gruppe, fx studerende. Hvis alle har samme indkomst, er Gini-koefficienten 0 og hvis én har hele indkomsten er Gini-koefficienten 1.

Gini-koefficienten G er defineret som forholdet mellem arealet mellem linien der beskriver lighed og Lorenzkurven (A) og arealet mellem linien der beskriver lighed og x -aksen. Arealet mellem Lorenzkurven og x -aksen kaldes B .



Formlen for Gini-koefficienten er

$$G = \frac{A}{A + B}$$

Da $A + B = 0,5$ er

$$G = \frac{A}{0,5} = 2 \cdot A$$

Da det er nemmest at udregne arealet B omskrives formelen idet $A = 0,5 - B$.

$$G = 2 \cdot (0,5 - B) = 1 - 2B$$

1.6 Ugrupperede observationer

Observationer er diskrete. I det tidligere afsnit sås på indkomst, der af praktiske hensyn var inddelt i intervaller. Men den enkelte person har ikke et indkomstinterval, men en faktisk indkomst i kroner og øre. Nogle gange inddeles data ikke i intervaller, et eksempel kunne være folketingsvalg. Her ses på folketingsvalget 2011, data er fra tabellen <http://www.statistikbanken.dk/FV11TOT>.

<i>Parti</i>	<i>Nordsjælland</i>	<i>Vestjylland</i>
A. Socialdemokratiet	54182	76208
B. Radikale Venstre	33537	24090
C. Det Konservative Folkeparti	19765	12677
F. Socialistisk Folkeparti	21012	26819
I. Liberal Alliance	20613	16061
K. Kristendemokraterne	1171	9664
O. Dansk Folkeparti	30279	40378
V. Venstre	91870	113443
Ø. Enhedslisten	15062	11505
I alt	287491	330005

Antallet af stemmer omregnes til procent af det samlede antal stemmer.

<i>Parti</i>	<i>Hyppighed</i>	<i>Frekvens (%)</i>
A. Socialdemokratiet	7608	23,0
B. Radikale Venstre	24090	7,3
C. Det Konservative Folkeparti	12677	3,8
F. Socialistisk Folkeparti	26819	8,1
I. Liberal Alliance	16061	4,9
K. Kristendemokraterne	9664	2,9
O. Dansk Folkeparti	40378	12,2
V. Venstre	113443	34,3
Ø. Enhedslisten	11505	3,5
I alt	330845	100,0

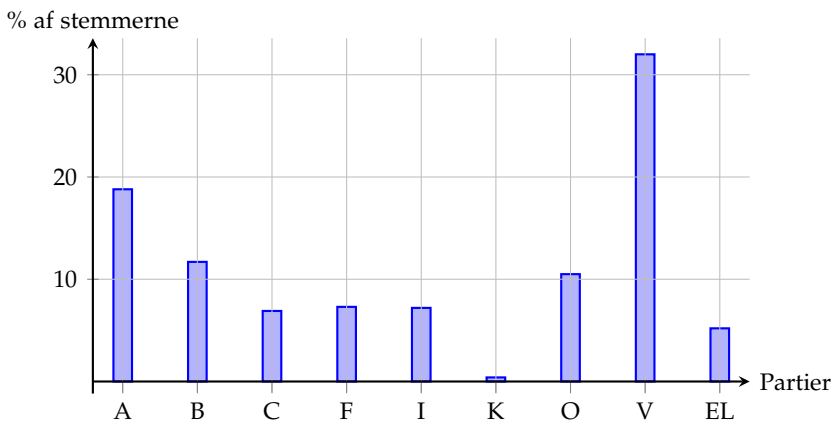


Video der viser hvordan deskriptiv statistik laves på ugrupperede observationer.

Øvelse 21 Beregn frekvensfordelingen på partier ved folketingsvalget 2011 for Vestjylland.

<i>Parti</i>	<i>Hyppighed</i>	<i>Frekvens</i>
A. Socialdemokratiet	76208	23,0%
B. Radikale Venstre	24090	7,3%
C. Det Konservative Folkeparti	12677	3,8%
F. Socialistisk Folkeparti	26819	8,1%
I. Liberal Alliance	16061	4,9%
K. Kristendemokraterne	9664	2,9%
O. Dansk Folkeparti	40378	12,2%
V. Venstre	113443	34,3%
EL. Enhedslisten	11505	3,5%
I alt	330845	100,0%

Pindediagrammet tegnes ved at angive observationsværdierne på x -aksen. På y -aksen angives frekvensen.



Øvelse 22 Tegn et pindediagram der viser frekvensfordelingen af stemmer ved folketingsvalget 2011 for Vestjylland.

Data som fx partier er ikke ordinale, hvilket betyder at de ikke kan ordnes. Sagt på en anden måde så kan det ikke siges at socialdemokratiet er før eller efter radikale venstre. Derfor giver det ingen mening af beregne kumuleret frekvens. For at kumuleret

frekvens skal give mening, skal data være ordinale. Her ses på karakter-data. Karakterer kan ordnes, fx er 02 mindre end 4. Med den kumulerede frekvens følger også trappediagram, kvartiler og boksplot. For ordinale data kan gennemsnit også beregnes.

I tabellen ses karakterfordelingen hos en årgang elever til skriftlig eksamen i matematik B-niveau.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Elever	902	3932	2314	4242	7293	2341	1731

For at beregne frekvensen af karakteren 4, divideres hyppigheden 4242 med det total antal 22755.

$$\frac{4242}{22755} \cdot 100 = 18,64$$

Karakter	Hyppighed	Frekvens	Kumuleret (%)
-3	902	3,96	3,96
0	3932	17,28	21,2
2	2314	10,17	31,4
4	4242	18,64	50,1
7	7293	32,05	82,1
10	2341	10,29	92,4
12	1731	7,61	100,0
Total	22755	100	



Video der forklarer beregningen af frekvensen.



Video der forklarer beregningen af den kumulerede frekvens.

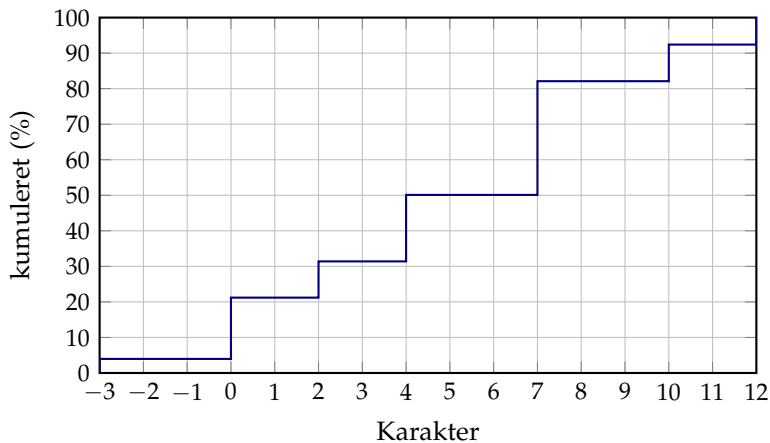
```
Maple
with(Gym):
data:=
[
  [-3, 902],
  [0, 3932],
  [2, 2314],
  [4, 4242],
  [7, 7293],
  [10, 2341],
  [12, 1731]
]
frekvensTabel(data)
```

Den kumulerede frekvens for karakteren 4, er den procentuelle

andel af elever der har fået karakteren 4 eller mindre. Den beregnes ved at lægge frekvensen sammen for karaktererne -3, 00, 02 og 4.

$$3,96 + 17,28 + 10,17 + 18,64 = 50,05$$

På trappediagrammet angives observationsværdierne på x -aksen og den kumulerede frekvens på y -aksen. Trappediagrammet kan bruges til at få en idé om fordelingen af karaktererne, men det vigtigste er at se hvor mange procent der ligger under (og over) en given observationsværdi. Det er også trappediagrammet der viser hvor kvartilerne er.



Video der forklarer hvordan trappediagrammet tegnes.

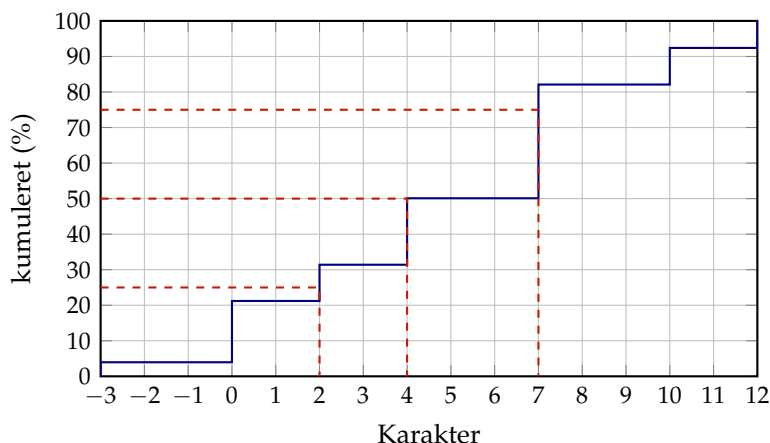


I Maple kan trappediagrammet tegnes med kommandoen `plotTrappekurve`, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

```
Maple
plotTrappekurve(data)
```

Kvartilsættes aflæses på trappediagrammet til 2, 7 og 10, ved hhv. 25 %, 50 % og 75 %.

Video der forklarer hvordan kvartilerne aflæses på trappediagrammet.



Kvartilsættet er 2, 4 og 7.

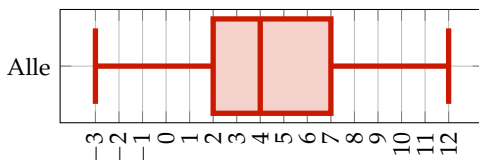
I Maple kan kvartilerne bestemmes med kommandoen `kvartiler`, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

Maple

```
kvartiler(data)
```

```
[2., 4., 7.]
```

Boksplottet kan tegnes med kvartilerne og største og mindste observationsværdi.



Boksplottet består af fem lodrette streger. Den første lodrette streg er ved den mindste observationsværdi, der i dette tilfælde er -3. Den anden lodrette streg er ved den første kvartil, der i dette tilfælde er 2. Den tredje lodrette streg er ved den anden kvartil - der også kaldes medianen - som i dette tilfælde er 4. Den fjerde lodrette streg er tredje kvartil, der i dette tilfælde er 7. Den femte lodrette streg er den største observationsværdi, der i dette tilfælde er 12.

I Maple kan kvartilerne bestemmes med kommandoen `kvartiler`, hvis data og Gym-pakken er indlæst.



Video der forklarer hvordan boksplottet tegnes.



Video der forklarer hvordan gennemsnittet beregnes.

Maple

gennemsnit(data)

5.01529334212261

Øvelse 23 Nedenstående tabel viser fordelingen af tænder der har eller har haft caries hos 15-årige.

Tænder	0	1	2	3	4	5	6
15-årige	7926	1929	1309	758	482	344	206

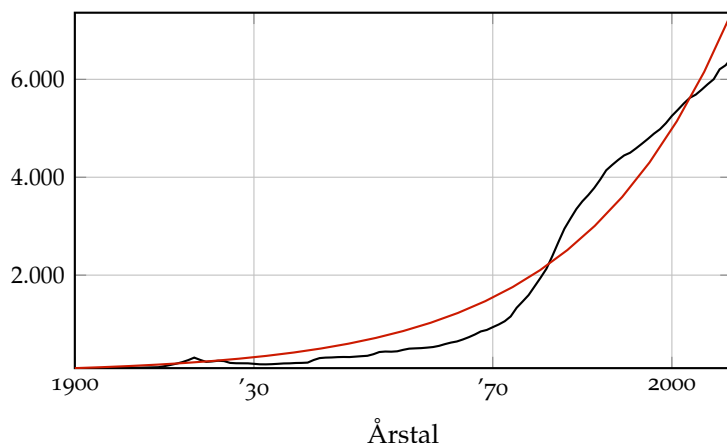
- Bestem den kumulerede frekvens af caries hos 15 årige.
- Tegn trappediagrammet.
- Bestem kvartilsættet.
- Tegn boksplottet for caries hos 15 årige.

1.7 Indekstal

Indekstal anvendes for at sammenligne størrelser i forhold til én given værdi. Dette kan bruges til at undersøge hvordan en værdi ændrer sig over tid i relation til andre værdier. Her ses på forbrugerprisindekset i Danmark i perioden 1900-2010 data kommer fra tabellen <http://statistikbanken.dk/PRIS8>.

Årstal	2012	2013	2014	2015	2016
Forbrugerprisindeks	6 768	6 821	6 860	6 891	6 909

Forbrugerprisindekset er et indeks der viser udviklingen i prisen for de vare som typisk købes af forbrugere. Dette indeks er udregnet af Danmarks Statistik siden 1900. Den gennemsnitlige vækst i forbrugerprisindekset har i perioden 1900-2010 været 3,987 % (den røde linie). Dette er bestemt ved at lave eksponentiel regression på forbrugerprisindekset med år 1900 som år 0.



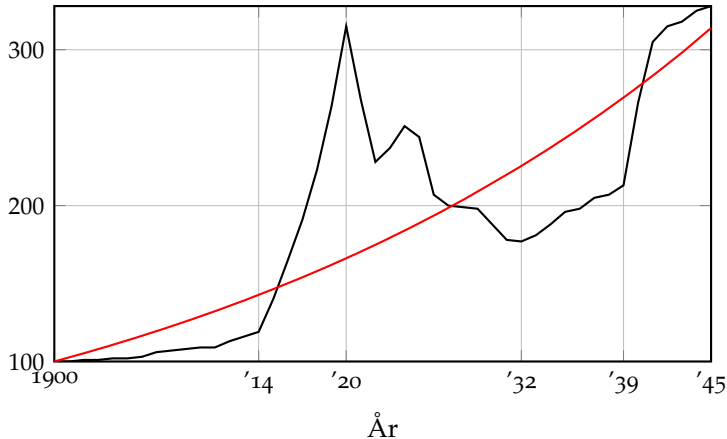
Indekset anvendes til at omregne priser. En vare der i 1985 (indeks: 3507) kostede 75 kr. kan omregnes til en 2010 (indeks: 6432) pris.

$$\frac{75 \text{ kr.}}{3507} \cdot 6432 = 173,55 \text{ kr.}$$

For at analysere udviklingen deles perioden op i tre dele.

1.7.1 Turbulens 1900-1945

I perioden 1900-1950 er den gennemsnitlige vækst i indekset 2,8%, hvilket er lavere end gennemsnittet for perioden 1900-2010. Men der er meget store udsving i indekset, derfor navnet turbulens.



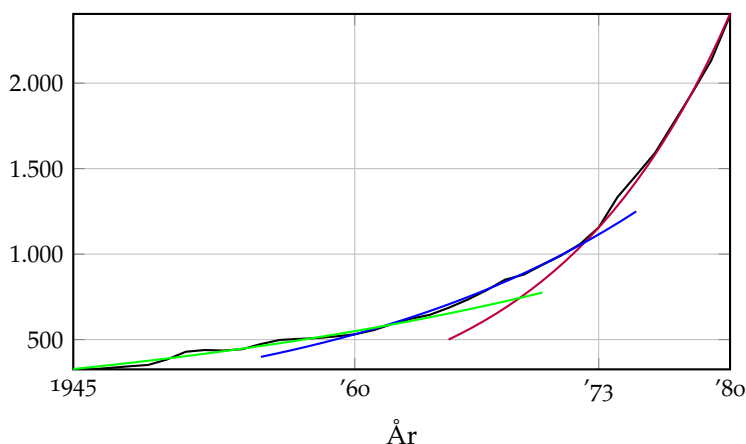
Historisk kan man så spørge:

1. I perioden 1900-1914 er der en meget lille vækst i indekset, hvad kendetegner denne periode historisk set?
2. Hvad skete der i 1914, siden at indekset pludseligt vokser kraftigt?
3. I perioden 1914-1920 er der en kraftig vækst i indekset, hvad kendetegner denne periode historisk set?
4. Hvad skete der i 1920, siden at indekset pludseligt falder?
5. I perioden 1920-1922 *falder* indekset, hvilket historisk er meget atypisk, hvad kendetegner denne periode historisk set?
6. Hvad skete der i 1922, siden at indekset igen begynder at vokse?
7. I periode 1922-1932, falder indekset, hvilket er den længste periode indekset er faldet i den tid indekset er beregnet, hvad kendetegner denne periode historisk set?
8. I 1932 begynder indekset at vokse langsomt, hvad skete der siden indekset begynder at vokse igen efter 10 år med fald?

9. I perioden 1932-1939 vokser indekset langsomt, hvad kendetegner denne periode historisk set?
10. I perioden 1939-1941 vokser indekset kraftigt, hvad starter og stopper denne vækst så hurtigt?
11. I perioden 1941-1945 vokser indekset langsomt, hvad kendetegner denne periode historisk set?

1.7.2 Stabilitet 1945-1980

I perioden 1945-1980 er der en meget god overensstemmelse mellem modellen for væksten i indekset og indekset selv. Der er ikke de store udsving i indekset når der tages højde for en stabil vækst, der dog kan deles op i tre perioder, med hver deres vækst i indekset.

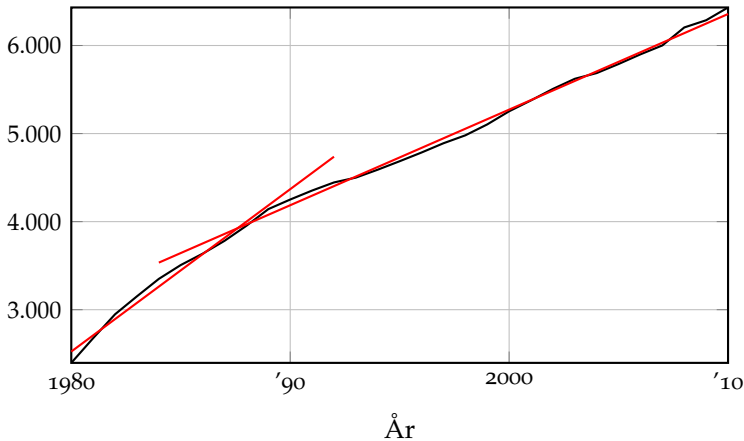


Perioden 1945-1980 er meget stabil sammenlignet med perioden 1900-1945. Der er ikke spring i væksten i indekset, som der var i den tidligere periode. Kan denne konklusion også forsvares historisk?

Der er tre vækstrater i perioden, 3,5 % i perioden 1945-1960 (den grønne linie), 5,9 % i perioden 1960-1973 (den blå linie) og 11,0 % i perioden 1973-1980 (den lilla linie). Hvad er den samfunds-faglige/historiske forklaring på denne opdeling af perioden?

1.7.3 Stagnation 1980-2010

I perioden 1980-2010 kan indekset ikke længere tilnærmes med en eksponentiel model. Der er stadigvæk en stabil vækst, men i denne periode er den lineær.



I perioden 1980-1989 er væksten 184 indekspoint pr. år. I 1980 svarer det til en vækst på 7,3 % og i 1989 til en vækst på 4,2 %. Hvad kendetegner denne periode? Hvad sker der i 1989?

I perioden 1989-2010 er væksten 108 indekspoint pr. år. I 1990 svare det til en vækst på 2,7 % og i 2010 til en vækst på 1,7 %.

Den periode som bedst kan sammenlignes med perioden 1989-2010 er perioden 1900-1911, som ligeledes var lineær med en vækst på 0,87 % i år 1911.

2

Funktioner

Definitionen på en funktion er

Definition 2 En variabel y kaldes en funktion af en variabel x , hvis der til hver værdi af x svarer præcis én værdi af y . Denne værdi kaldes funktionsværdien og man skriver $y = f(x)$.

Bemærk at denne definition kun gælder hvis der er én afhængig (y) og én uafhængig (x) variabel.

Der er nogle begrænsninger for funktioner, fordi nogle udregninger ikke er definerede.

- division med 0.
- kvadratroden af negative tal.

Disse udregninger kan heller ikke laves i regneudtryk for funktioner, derfor siger man at funktionen kun er defineret for nogle værdier af x . De værdier af x som funktionen er defineret for kaldes for funktionens *definitions­mængde* og den skrives $Dm(f)$.

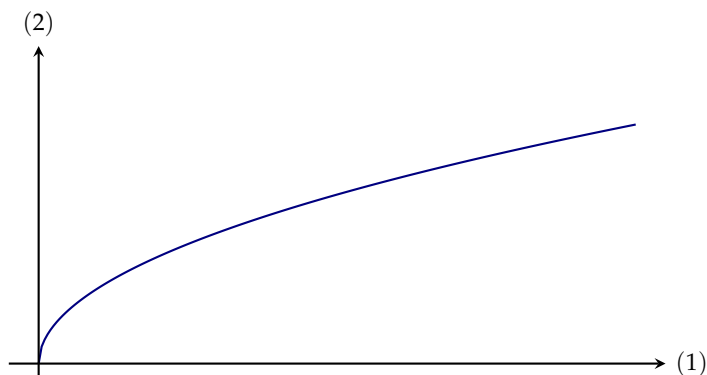
Til alle de x værdier, som ligger i definitions­mængden svarer - ifølge definitionen af en funktion - én værdi af y , disse værdier af y kaldes for funktionens *værdimængde* og den skrives $Vm(f)$.

Ved alle funktioner skal værdi- og definitions­mængde overvejes.

■ **Eksempel 5** Funktionen f givet ved forskriften $f(x) = 3x + 1$ har definitions­mængden $\mathbb{R}$, hvilket betyder at funktionen er defineret for alle reelle tal og værdimængden er også $\mathbb{R}$. ■

■ **Eksempel 6** Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Denne funktion er defineret for alle $x \geq 0$. Bemærk at der ikke er nogen graf for værdier af $x < 0$. Funktionen definitions­mængde er derfor $Dm(f) = [0, \infty[$ dette læses »alle reelle tal større end eller lig med 0«.

Værdimængden for funktionen er $Vm(f) = [0, \infty[$.



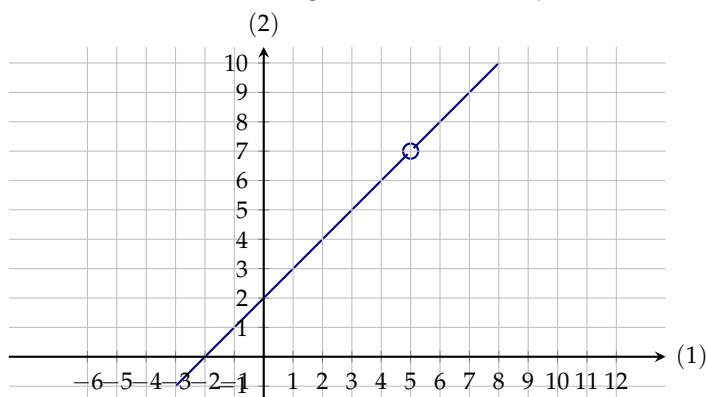
$$f(x) = \sqrt{x}$$

■

■ **Eksempel 7** Funktionen givet ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

har en begrænsning i sin definitionsmængde fordi $x - 5$ skal være forskelligt fra 0 og derfor kan x ikke være 5. Men for alle andre værdier af x er funktionen defineret, derfor bliver definitionsmængden $Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, hvilket læses »alle reelle tal undtagen 5. Værdimængden for f bliver så alle de værdier for y , undtagen den værdi der svarer til x -værdien 5. På grafen for $f(x)$ kan man se at det er værdien 7. Værdimængden er derfor $Vm(f) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.



$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

■

Øvelse 24 Bestem definitions- og værdimængde for følgende funktioner.

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

2.1 Lineære funktioner

Den lineære funktion $f(x) = ax + b$, hvor a er hældningskoefficienten, stigning pr. enhed. b er skæringen med y -aksen, start værdien. For at vise dette indsættes x -værdien for skæring med y -aksen $x = 0$.

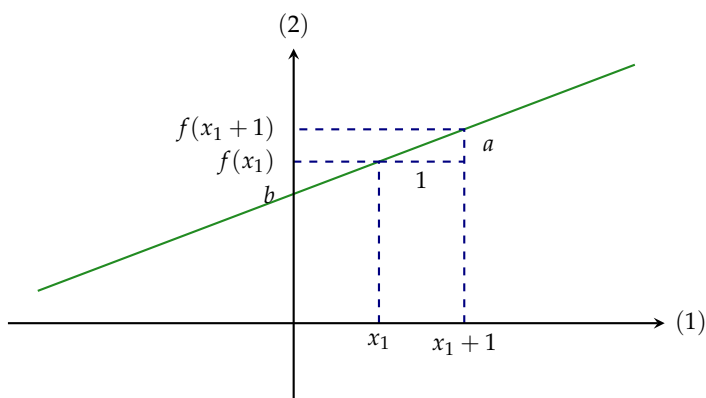
$$f(0) = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow f(0) = b$$

heraf ses at grafen for f vil skære y -aksen i punktet $(0, b)$.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1) + b \\ &= ax + a + b \\ &= f(x) + a \end{aligned}$$

Værdien $x+1$ indsættes i $f(x)$
Parentesen ganges ud
 $ax + b$ erstattes med $f(x)$

heraf ses at når x -værdien vokser med 1, vokser funktionsværdien med a .

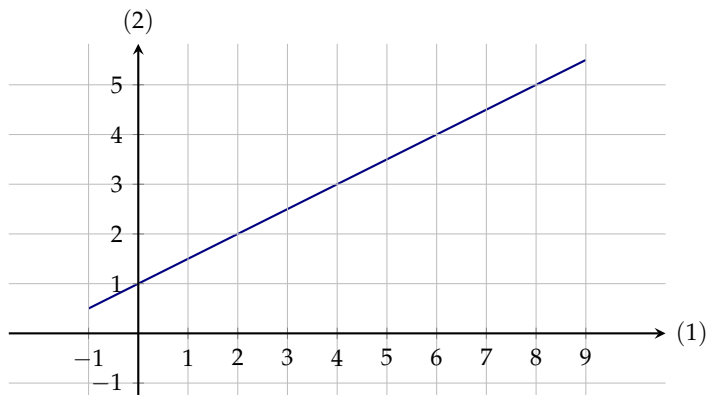


Opgaver hvor sammenhæng mellem graf og forskrift skal forklares.



Video der forklarer konstanternes betydning for grafens forløb for en lineær funktion.

■ **Eksempel 8** På figuren ses grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.



Denne graf skærer y -aksen i 1 og har hældningen $\frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

I Maple kan grafen for en funktion tegnes med kommandoen `plot`. Efter funktionsforskriften sættes komma og så skrives i hvilket interval funktionen skal tegnes, ved at skrive `x=fra .. til`. Det er meget vigtigt at der bruges netop to punktummer.

Maple : Graf for funktion.

```
plot(2*x+4,x=-3..7)
```



Video der viser hvordan kommandoen `plot` kan bruges i Maple

Sætning 1 For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, da vil

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad b = y_1 - ax_1$$



■ **Bevis** Da $f(x_1) = y_1$ vil $y_1 = ax_1 + b$ og da $f(x_2) = y_2$ vil

Video med bevis for to-punkts-formlen

$y_2 = ax_2 + b$. Ved at udregne $y_2 - y_1$ fås at

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b)$$

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b \quad \text{parenteserne ophæves}$$

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \quad \text{udtrykket reduceres}$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{udtrykket faktorerises}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad \text{ligningen divideres med } x_2 - x_1$$

Når a er kendt kan b beregnes ved at isolere b i en af ligningerne $y_1 = ax_1 + b$ og $y_2 = ax_2 + b$. Herved fremkommer formlen

$$y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$$

og tilsvarende for ligningen $y_2 = ax_2 + b$. ■

■ **Eksempel 9** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$.
 (2,3) og (3,6), Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{6-3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$b = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3$$

Regneforskriften bliver $f(x) = 3x - 3$ ■

■ **Eksempel 10** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$.
 (5,3) og (2,9), Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{9-3}{2-5} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$b = 3 + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

Regneforskriften bliver $f(x) = -2x + 13$ ■

■ **Eksempel 11** Funktionen $f(x)$ er lineær og $f(3) = 5$ og $f(6) = 4$,
 bestem regneforskriften for $f(x)$.

$$a = \frac{4-5}{6-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$b = 5 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5 + 1 = 6$$

Regneforskriften for $f(x)$ bliver $f(x) = -\frac{1}{3}x + 6$ ■



Video med eksempel på bestemmelse af forskrift for en lineær funktion ud fra to punkter.

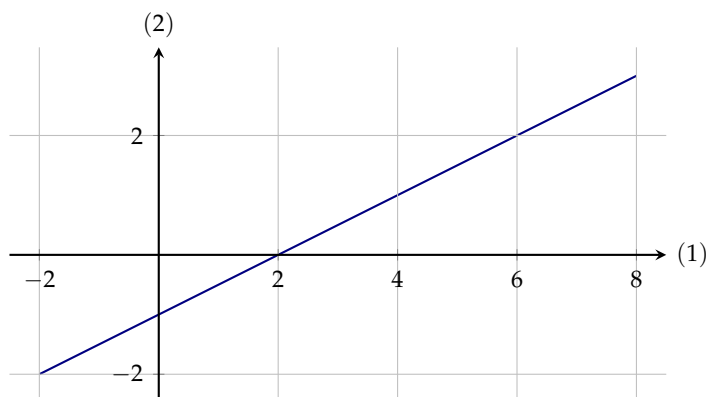


Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra to punkter.

Øvelse 25 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne, bestem forskriften for f .

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a) (3,6) og (2,4) | b) (5,1) og (15,2) |
| c) (2,4) og (4,3) | d) (8,7) og (12,28) |
| e) (4,4) og (6,2) | f) (-2,4) og (8,5) |
| g) (5,11) og (70,52) | h) (2, -4) og (-5,3) |
| i) (-2, -2) og (-5, -2) | j) (-2, -2) og (-2,5) |

■ **Eksempel 12** For at bestemme forskriften på grafen aflæses to punkter.



De to aflæste punkter er $(2, 0)$ og $(0, -1)$. Disse punkter indsættes i formlerne

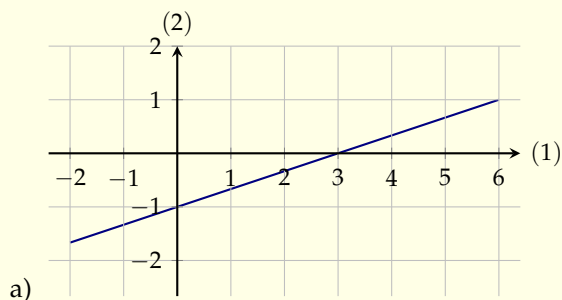
$$a = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$b = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

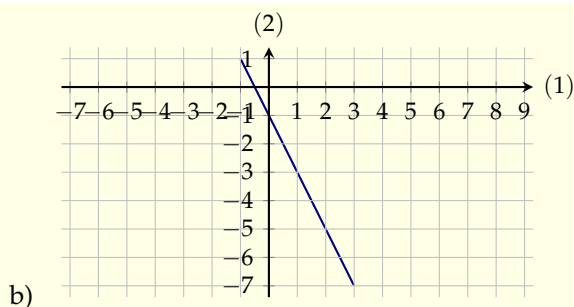
Forskriften bliver $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.



Øvelse 26 Bestem forskriften for funktionen f hvis graf ses på figuren.



Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra grafen, eller hvor grafen skal tegnes ud fra forskriften.



Konstanterne a og b er hældningen og skæringen med y -aksen. Men hvis funktionen anvendes til at beskrive en sammenhæng mellem to variable x og y med en relation til virkelige størrelser, får a og b også en betydning i relation til denne sammenhæng og funktionen kaldes sammen med beskrivelsen af variableerne en *model*.

■ **Eksempel 13** En patient får et saltvandsdrop. Dropflasken indeholder til at begynde med 950 mL saltvand, og patienten får 5 mL saltvand pr. minut. En model for sammenhængen mellem tid og dropflaskens indhold bliver så

$$y = -5x + 950$$

hvor y er dropflaskens indhold i mL og x er tiden i minutter. ■

■ **Eksempel 14** Efter 5 minutter er der 925 mL saltvand i dropflasken og efter 25 minutter er der 825 mL tilbage. Bestem a og b for den lineære sammenhæng mellem tid og dropflaskens indhold.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{925 - 825}{5 - 25} = \frac{100}{-20} = -5$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 825 - (-5) \cdot 25 = 950$$

Det betyder at der hvert minut løber 5 mL (a) saltvand ud af dropflasken og at flasken indeholdt 950 mL (b) fra start. ■

■ **Eksempel 15** En patient får et saltvandsdrop. Sammenhængen mellem dropflaskens indhold af saltvand og tiden i minutter ses i tabellen nedenfor. Det antages at sammenhængen er lineær.



Video med eksempel på fortolkning af konstanter i lineære og eksponentielle modeller.

Tid i min.	0	10	17	25
Indhold i mL	950	900	865	825

For at bestemme a og b i den lineære funktion udføres lineær regression på tabellens data. I maple skrives

Maple : Lineær regression.

with(Gym):

LinReg([0, 10, 17, 25],[950, 900, 865, 825],x)

$$-5x + 950$$

Den fundne model kan anvendes til at beregne enten den afhængige eller uafhængige variabel.

■ **Eksempel 16** Sammenhængen mellem indholdet af saltvand i et drop og tiden kan beskrives med følgende model

$$f(x) = -5x + 950$$

Hvor x er tiden i minutter og $f(x)$ er indholdet af saltvand i mL i dropet.

Hvor mange mL saltvand er der tilbage efter 50 minutter?

$$y = -5 \cdot 50 + 950 = -250 + 950 = 700$$

Efter 50 minutter er der 700 mL tilbage.

Hvor lang tid går der inden der er 200 mL tilbage?

$$200 = -5 \cdot x + 950 \Leftrightarrow 200 - 950 = -5 \cdot x \Leftrightarrow \frac{-750}{-5} = 150$$

Der går 150 minutter inden der kun er 200 mL tilbage. ■



Video med et eksempel på opstilling af funktion ud fra en sproglig beskrivelse.

Øvelse 27 I perioden 2004-2008 er det årlige offentlige forbrug steget med 18,5 mia. kr. pr. år. I 2004 var det årlige offentlige forbrug 388 mia. kr.

- Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver udviklingen i det årlige offentlige forbrug som funktion af tiden.
- Hvornår vil det offentlige forbrug være 500 mia.?
- Hvad vil det offentlige forbrug være i 2020?

Øvelse 28 Produktionen af øl i perioden 2010 til 2015 i et mikrobryggeri.

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Øl i mio. liter	0,23	0,31	0,42	0,49	0,61	0,71

Det antages at udviklingen i produktionen af øl følger en model som denne

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x er antallet af år efter 2010 og $f(x)$ er produktionen af øl i mio. liter.

- Benyt tabelles data til at bestemme a og b .
- Giv en fortolkning af a .
- I hvilket år vil mikrobryggeriet producere mere end 1,2 mio. liter øl?

2.1.1 Forskydning af grafen for en funktion

Grafen for enhver funktion kan forskydes parallelt med 2. akse ved at tilføje en konstant til funktionsforskriften. Er konstanten positiv forskydes grafen op og er konstanten negativ forskydes grafen ned. Grafen forskydes parallelt med 1. akse ved at tilføje en konstant til den uafhængige variabel. Er konstanten positiv forskydes grafen til venstre og er konstanten negativ forskydes

grafen til højre.

■ **Eksempel 17** Funktion med forskriften $f(x) = -2x$ kan forskydes parallelt med 2. akse ved at tilføje en konstant til regneudtrykket, så kommer funktionen til at se således ud

$$f(x) = -2x + k$$

Maple

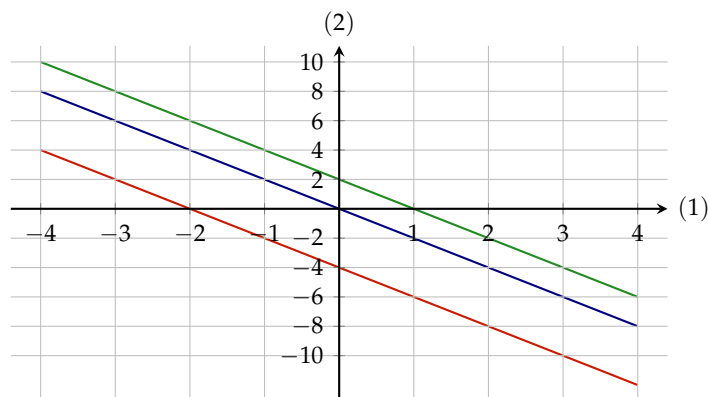
```
Explore(plot(-2x+k, x=-5..5, -5..5), k =-4..4)
```

Grafen forskydes parallelt med 1. akse ved at tilføje en konstant til den uafhængige variabel, så kommer funktionen til at se således ud

$$f(x) = -2(x + k)$$

Maple

```
Explore(plot(-2(x+k), x=-5..5, -5..5), k =-4..4)
```



- $y = -2 \cdot x$
- $y = -2 \cdot x + 2$
- $y = -2 \cdot (x + 2)$

I Maple kan der godt være to parametre

Maple

```
Explore(plot(-2(x+k)+p, x=-5..5, -5..5),  
k =-4..4, p=-4..4)
```

Øvelse 29 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = 2x + 3$$

For at parallelforskyde funktionen skal der to parametre ind i forskriften.

$$f(x) = 2(x + k) + 3 + p$$

- a) Hvilke værdier er der for k og p , for at grafen for f går gennem punktet $(-1, 2)$.

Øvelse 30 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = -4x + 1$$

- a) Hvilke værdier kan parameterne have, for at grafen for f går gennem punktet $(1, 6)$.

Øvelse 31 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = x$$

- a) Hvilke værdier kan parameterne have, for at grafen for f går gennem punktet $(1, 2)$.
- b) Er det nødvendigt med to parametre?

2.1.2 Lige-frem- og omvendt proportional

Definition 3 De to variable x og y siges at være lige-frem proportionale, hvis

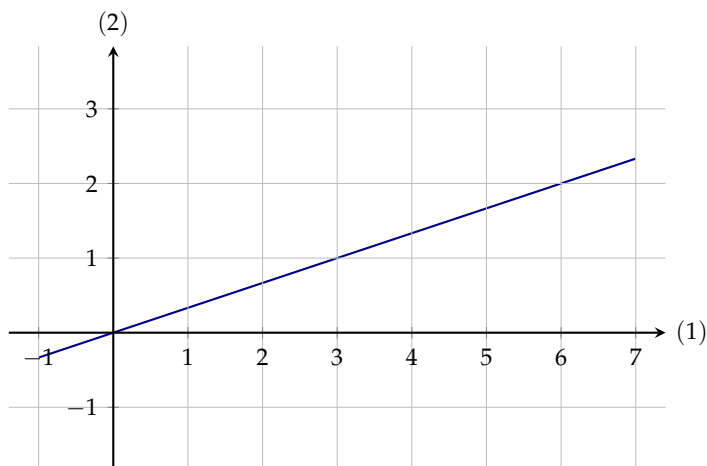
$$y = k \cdot x$$

Dette kan også skrives $\frac{y}{x} = k$ dvs. at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.



Video hvor lige-frem proportionalitet forklares.

■ **Eksempel 18** y er ligefrem proportional med x med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{3}$.



$$y = \frac{1}{3} \cdot x$$

■ **Eksempel 19** I formlen

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

er F og M ligefrem proportionale, hvis G, m og r er konstante.

$$F = \underbrace{\frac{G \cdot m}{r^2}}_k \cdot M$$

■ **Eksempel 20** I formlen

$$x \cdot y = a \cdot b$$

er x og y ikke ligefrem proportionale, selvom a og b er konstante.

$$x = \underbrace{a \cdot b}_k \cdot \frac{1}{y}$$

x og y kaldes omvendt proportionale.

■ **Eksempel 21** I formlen

$$P = a \cdot T^4$$

hvor a er en konstant, er der ingen ligefrem proportionalitet fordi T er i fjerde.



Video hvor omvendt proportionalitet forklares.

Øvelse 32 Hvilke af disse variable er der en ligefrem proportional sammenhæng mellem?

a) $m = n \cdot M$

b) $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

c) $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

d) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$

■ **Eksempel 22** Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formlen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot 4$$

Det betyder at k er 2,5.

Når $x = 20$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 2,5 \cdot 20$$

Det betyder at y er 50. ■

Øvelse 33 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2		7
y	1	2	

Øvelse 34 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x		2	5
y	6	8	

Definition 4 De to variable x og y siges at være omvendt proportionale, hvis

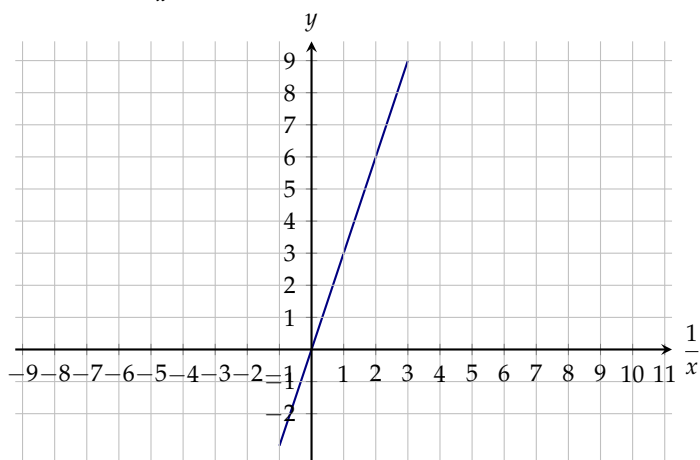
$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

Dette kan også skrives $y \cdot x = k$, k kaldes proportionalitetsfaktoren.

■ **Eksempel 23** I formlen

$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

er variablerne y og x omvendt proportionale. Grafisk kan det ses ved at lave et $(y, \frac{1}{x})$ -plot.



$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

■

■ **Eksempel 24** Variablerne x og y er omvendt proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formlen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot \frac{1}{4}$$

Det betyder at k er 40.

Når $x = 20$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 40 \cdot \frac{1}{10}$$

Det betyder at y er 4.

■

Øvelse 35 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2	8	
y	2		$\frac{1}{3}$

Øvelse 36 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	6		12
y	10	6	

2.1.3 Inverse funktioner

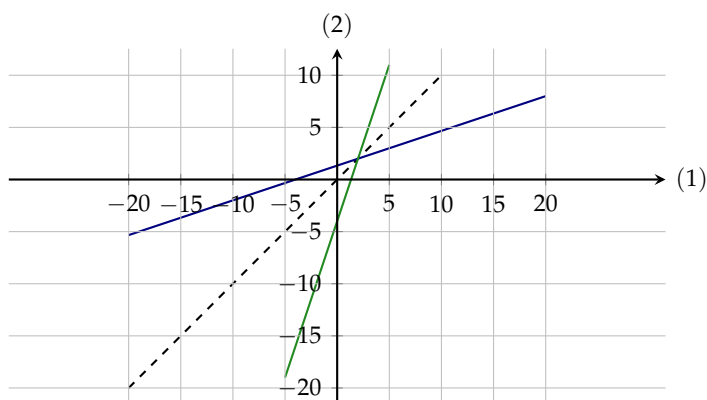
En invers funktion er en funktion hvor x og y er byttet om. Symbolet for en invers funktion er $^{-1}$. Den inverse funktion til funktionen $f(x)$:

$$y = 3x - 4$$

er således funktionen $f^{-1}(x)$, hvor x og y er byttet om: $x = 3y - 4$ hvor y isoleres

$$-3y = -x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Når man ser på det grafisk, ser man at graferne for de to funktioner er spejlinger af hinanden i linien $y = x$.



--- Spejlingsakse

— $y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3}$

— $y = 3 \cdot x - 4$



Video hvor inverse funktioner forklares. Eksempler på bestemmelse af inverse funktioner.

Definition 5 — Invers funktion. Den inverse funktion til f kaldes f^{-1} , og den inverse funktion f^{-1} er defineret som funktionen der opfylder at

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

■ **Eksempel 25** Det betyder at for $f(x) = 3x - 4$ og $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

skal der gælde at $f(f^{-1}) = x$. Dette ses af følgende udregning.

$$f(f^{-1}(x)) = 3 \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) - 4 = (x + 4) - 4 = x$$

■

Øvelse 37 Undersøg om følgende funktioner er inverse til hinanden.

a) $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ og $g(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = 4x - 8$ og $g(x) = \frac{1}{4}x - 2$

d) $f(x) = x - 3$ og $g(x) = x + 3$

I den inverse funktion er x og y byttet om, det kan bruges til at sige noget om hvilken type af funktion en invers funktion er. Her ses tabellen og hvilke typer af funktioner der findes. Denne gang er den udvidet med hvilken type de inverse funktioner er. Det kan ses ud fra om x og y er hhv. $+$ og $\cdot$. For den lineære funktion som er en $(+, +)$ -funktion og den inverse er en $(+, +)$ -funktion og derfor også lineær. Men eksponentialfunktionen som er en $(+, \cdot)$ -funktion, der vil den inverse funktion være en $(\cdot, +)$ -funktion. Og det er en logaritmefunktion. Senere ses på potens, eksponentiel- og logaritmefunktionerne.

Funktion			Invers funktion		
Lineær funktion	x	$+$	y	$+$	Lineær funktion
	y	$+$	x	$+$	
Potensfunktion	x	$\cdot$	y	$\cdot$	Potensfunktion
	y	$\cdot$	x	$\cdot$	
Eksponentiel-funktion	x	$+$	y	$+$	Logaritme-funktion
	y	$\cdot$	x	$\cdot$	
Logaritme-funktion	x	$\cdot$	y	$\cdot$	Eksponentiel-funktion
	y	$+$	x	$+$	

For at bestemme den inverse til en funktion, byttes om på de to

variable, typisk x og y , og derefter isoleres variabelen y .

■ **Eksempel 26** For funktionen $f(x) = 2x - 3$, hvor $f(x) = y$, kan den inverse funktion udregnes ved at erstatte y med x og x med y . Da kommer ligningen til at se således ud.

$$x = 2y - 3$$

og i denne ligning isoleres y .

$$x = 2y - 3$$

$$x + 3 = 2y$$

3 lægges til ligningen

$$\frac{x+3}{2} = y$$

ligningen divideres med 2

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = y$$

brøken deles op

Den inverse funktion er så $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. ■

Øvelse 38 Bestem den inverse funktion til f .

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$

c) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = 3x - 3$

e) $f(x) = 2x - 4$

f) $f(x) = -2x - 2$

g) $f(x) = 3x + 5$

h) $f(x) = ax + b$

2.2 Eksponentielle funktioner

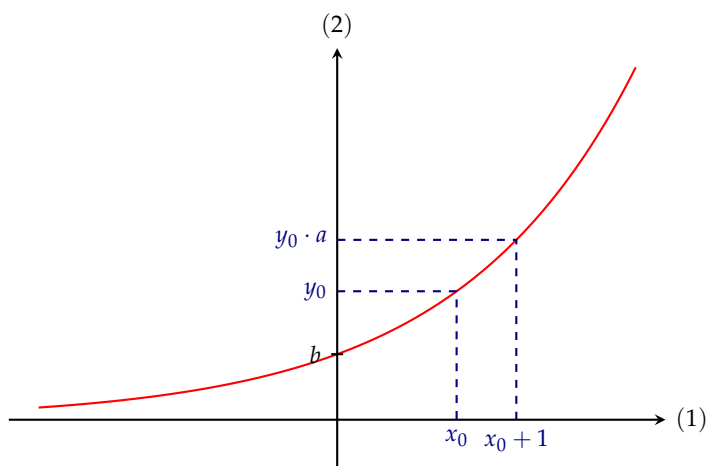
Definition 6 En funktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $a > 0$ og forskellig fra 1 kaldes for en eksponentiel funktion.

Forskriften for en eksponentiel funktion er $f(x) = b \cdot a^x$ hvor b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren.

Sætning 2 — Konstanternes betydning for grafens forløb. For eksponentielle funktioner med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ gælder der, at grafen for funktionen går gennem punktet $(0, b)$, dvs grafen skærer 2.aksen i b . Der gælder ligeledes, at grafen går gennem punktet $(x_0 + 1, a \cdot y_0)$.



Video med en forklaring af sammenhængen mellem a og b forløbet af grafen for en eksponentiel funktion.



■ **Bevis** Når grafen skærer 2.aksen er x -værdien 0. Funktionsværdien kan så beregnes

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

Ved at indsætte funktionsværdien $x_0 + 1$ fås, at

$$f(x_0 + 1) = b \cdot a^{x_0+1} = b \cdot a^{x_0} \cdot a^1 = y_0 \cdot a$$

Dette viser at grafen for f vil gå gennem punktet $(x_0 + 1, y_0 \cdot a)$. ■

Definition 7 — Voksende og aftagende. En funktion er voksende hvis

$$x_1 < x_2 \text{ gælder at } f(x_1) < f(x_2)$$

En funktion er aftagende hvis der for to værdier x_1 og x_2 hvor $x_1 < x_2$ gælder at $f(x_1) > f(x_2)$.

Sætning 3 — Betydningen af begyndelsesværdi og fremskrivningsfaktor.

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder følgende

a) Grafen for en eksponentiel funktion er voksende, hvis fremskrivningsfaktoren a er større end 1, og aftagende hvis a er mellem 0 og 1.

b) Jo større a er i intervallet $]1, \infty[$ jo hurtigere vokser grafen. Jo mindre a er i intervallet $]0, 1[$ jo hurtigere aftager grafen.

Beviset for påstand a) kræver kendskab til logaritme funktionen, og udskydes derfor til denne funktion er indført.

■ **Bevis — Sætning 3 b).** Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer større end 1 fås følgende.

$$a_1 < a_2$$

$$a_1^x < a_2^x$$

opløft begge sider med x .

Da $a > 1$ skal ulighedstegnet ikke vendes

$$b \cdot a_1^x < b \cdot a_2^x$$

multipliser med b .

Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer mellem 0 og 1 fås følgende.

$$a_1 < a_2$$

$$a_1^x > a_2^x$$

opløft begge sider med x .

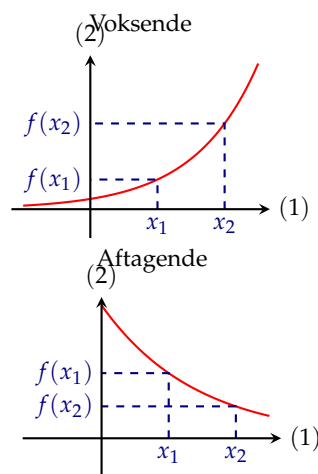
Da $0 < a < 1$ skal ulighedstegnet vendes

$$b \cdot a_1^x > b \cdot a_2^x$$

multipliser med b .

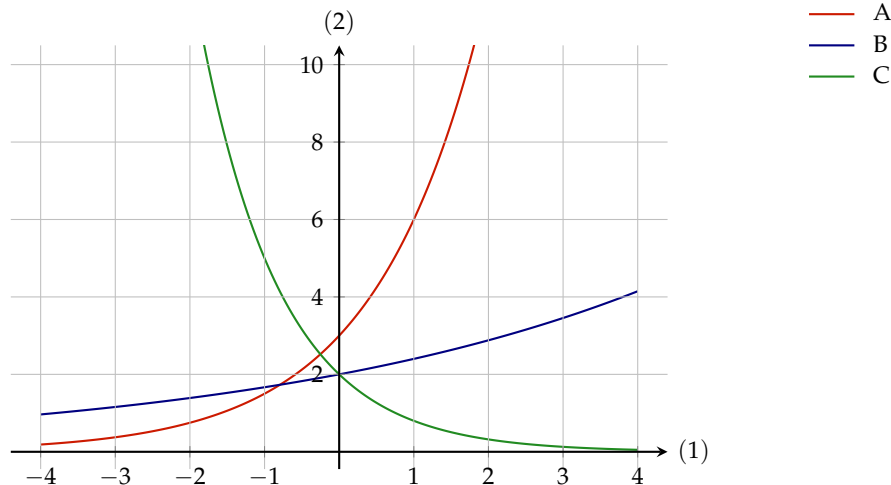
Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

■



Video med forklaring på konstanternes betydning for grafens forløb for en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 27** På figuren ses grafen for tre funktioner



Af de tre funktioner

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

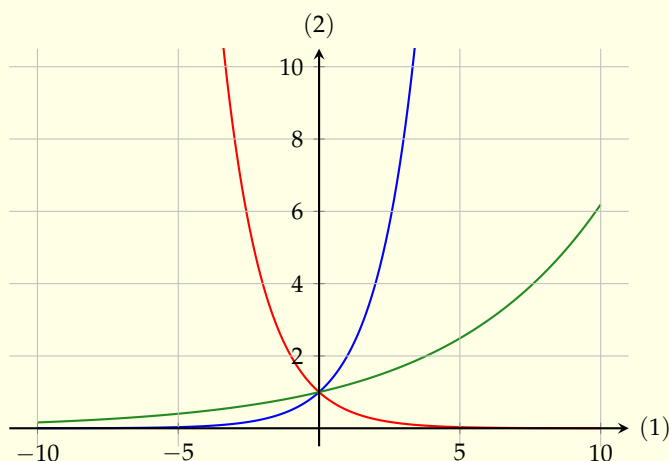
$$g(x) = 2 \cdot 1,2^x$$

$$h(x) = 2 \cdot 0,4^x$$

er A graf for funktionen f da f har den største fremskrivningsfaktor, og grafen A vokser hurtigst og har den største b -værdi, da grafen skærer y -aksen højest af de tre grafer. Funktionen for grafen B er g da den har en fremskrivningsfaktor, som er større end 1 (grafene er voksende) men mindre end fremskrivningsfaktoren for f , og grafen vokser langsommere end grafen for A. C er grafen for funktionen h , da grafen er aftagende og fremskrivningsfaktoren er mindre end 1. ■

Øvelse 39 Figuren viser grafen for funktionerne

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 0,5^x \quad \text{og} \quad h(x) = 1,2^x$$



— B
— A
— C

a) Gør rede for hvilken graf, der hører til hvilken funktion.

Sætning 4 Forskriften for en eksponentiel funktionen $f(x) = b \cdot a^x$, kan bestemmes, hvis to punkter på dens graf kendes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

■ **Bevis** Hvis fremskrivningsfaktoren a er kendt, kan b beregnes hvis ét punkt (x_1, y_1) er kendt. I ligningen $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ isoleres b ved at dividere med a^{x_1} .

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Er fremskrivningsfaktoren ikke kendt, skal den beregnes ved at bruge endnu et punkt. Hvis de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger på grafen, betyder det at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Ved division



Opgaver hvor sammenhængen mellem grafen og forskriften for en eksponentiel funktion skal forklares.



Video med bevis for to-punkt formelen for en eksponentiel funktion.

af y_2 med y_1 fås, at

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

forkort med b

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

potensregnerregel $\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2-x_1}$$

da $y > 0$ findes $x_2 - x_1$ roden af $\frac{y_2}{y_1}$

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$



Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en eksponentiel funktion ud fra to punkter.

■ **Eksempel 28** Grafen for en eksponentielt voksende funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Grafen går gennem punkterne $P(1,6)$ og $Q(3,24)$.

Tallene a og b kan bestemmes

$$a = \sqrt[3-1]{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2 \quad b = \frac{6}{2^1} = 3$$



Opgaver hvor forskriften for en eksponentiel funktion skal bestemmes ud fra to punkter.

Øvelse 40 Bestem forskriften for en eksponentiel funktion med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem punkterne $(2,6)$ og $(4,24)$.

Øvelse 41 Væksten af en bakteriekultur kan beskrives med en eksponentielt voksende funktion $f(x)$, hvor x er antallet af timer og $f(x)$ er antallet af bakterier. Det oplyses, at $f(3) = 864$ og $f(6) = 1493$.

a) Bestem en forskrift for f .

Forskriften for en eksponentiel funktion kan også bestemmes med regression.

■ **Eksempel 29** I tabellen ses en opgørelse over den årlige svinetransport ud af Danmark i perioden 2006-2009.

Årstal	2006	2007	2008	2009
Mio. svin	4,3	4,9	6,3	8,0

I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, er en funktion f af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor x er antal år efter 2005.

Med eksponentiel regression bestemmes forskriften til

$$f(x) = 4,2 \cdot 1,24^x$$

I Maple skrives

Maple

```
with(Gym):
ExpReg([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],x)
```

$$4.1571.235^x$$

■

Øvelse 42 Tabellen nedenfor viser udviklingen i et lands energiproduktion (målt i GW) i perioden 2005-2010.

Årstal	2005	2007	2008	2009	2010
Energiproduktion	202	421	623	1132	1541

I en model kan udviklingen i energiproduktion beskrives ved en funktion af typen

$$E(t) = b \cdot a^t$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i MW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Benyt data fra tabellen til at bestemme en forskrift for E .

Definition 8 Vækstraten r er fremskrivningsfaktoren a minus en.

$$r = a - 1$$



Video med eksempel på bestemmelse af vækstraten for en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 30** I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, i perioden 2006-2009, er en funktion f af typen

$$f(x) = 4,2 \cdot 1,24^x$$

hvor x er antal år efter 2006.

Tallet 4,2 viser antallet af svin der blev transporteret ud af Danmark i år 2006. Tallet 1,24 viser at den gennemsnitlige vækstrate pr. år i årene 2006-2009 var 0,24 eller 24%. ■

Øvelse 43 Udviklingen i energiproduktion i et land, i perioden 2005-2010, beskrives ved modellen

$$E(t) = 2,5 \cdot 1,09^t$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i GW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Bestem vækstraten for energiproduktionen.

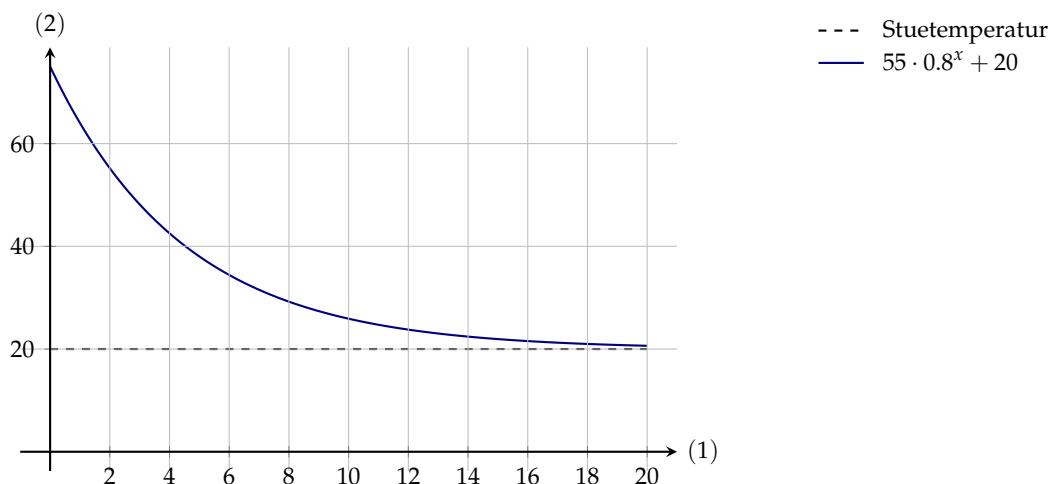
2.2.1 Forskydning af grafen for en eksponentielfunktion

Grafen for en eksponentielfunktion kan forskydes, på samme måde som en lineær funktion. Forskriften for den forskydte graf ser således ud.

$$f(x) = b \cdot a^{x+k} + p$$

hvor k er grafens forskydning parallelt med 1. akse og p er grafens forskydning med grafen parallelt med 2. akse.

■ **Eksempel 31** Afkøling af en kop varm cacao i stuetemperatur er et eksempel på en eksponentialfunktion der er forskudt parallelt med 2. akse.



■

I Maple kan Explore kommandoen bruges til at undersøge en eksponentielfunktion.

Maple

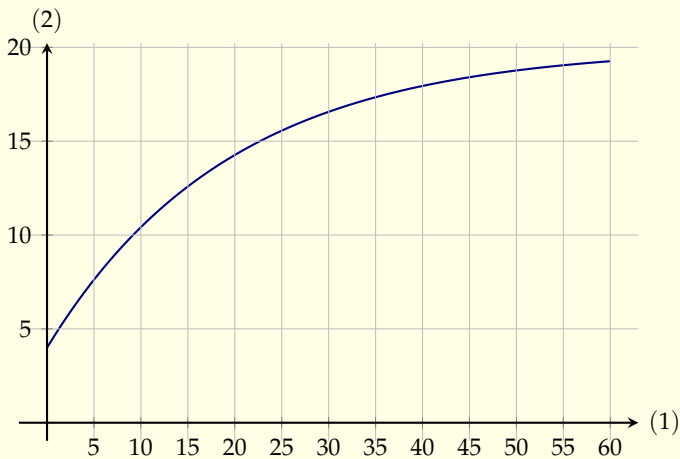
```
Explore(plot(2 * 1.2(x+k) + p, x=-10..10, -10..10),
        k=-4..4, p=-4..4)
```

Øvelse 44 Brug Maples Explore funktion til at undersøge parallelforskydninger af funktionen

$$f(x) = 22 \cdot 0,85^x$$

- Hvilke værdier for parameterne gør, at grafen for f går gennem punktet (2,9)?
- Er der nogle punkter, grafen ikke kan gå gennem?
- Er det muligt at forskyde grafen, så den går gennem to vilkårlige punkter?

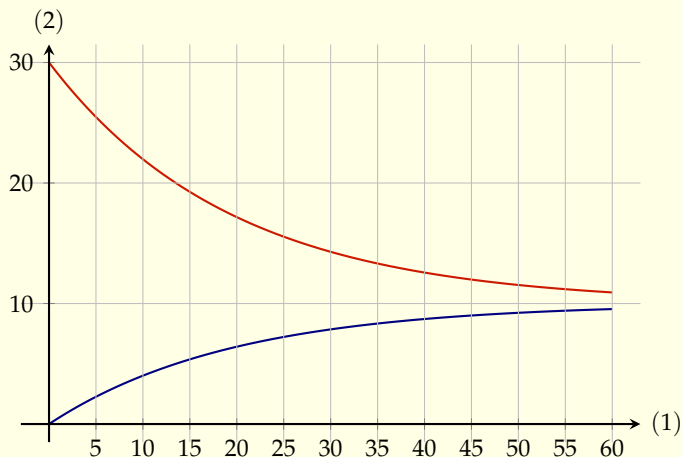
Øvelse 45 På grafen ses temperaturen af noget koldt saftevand der står ved stuetemperatur.



$$-16 \cdot 0.95^x + 20$$

- Hvad er temperaturen af saftevandet efter 5 min. ved stuetemperatur?
- Hvad er stuetemperaturen?
- Forklar hvordan grafen er blevet manipuleret fra den sædvanlige eksponentielle model.
- Hvordan kan starttemperaturen af saftevandet beregnes?

Øvelse 46 På grafen ses temperaturen af to legemer af samme materiale, der er i kontakt med hinanden og derfor laver en varmeoverførsel.



$$\text{Red line: } 20 \cdot 0,95^x + 10$$

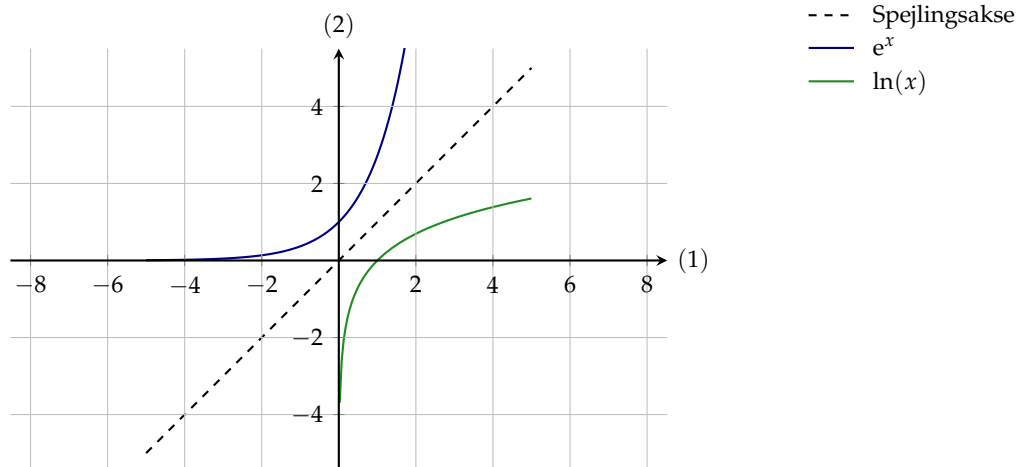
$$\text{Blue line: } -10 \cdot 0,95^x + 10$$

- Forklar hvordan graferne er blevet manipuleret fra den sædvanlige eksponentielle model.
- Hvad er størrelsesforholdet mellem de to legemer?
- Kan sluttemperaturen af de to legemer forudsiges?
- Beregn temperaturen af 200 mL vand på 5°C og 800 mL vand på 25°C .
- Opskriv en formel for beregning af temperaturen af en blanding af vand med to forskellige temperaturer og volumener.

2.3 Logaritmefunktioner

Definition 9 — Den naturlige logaritme. Den naturlige logaritme $\ln(x)$ er den inverse funktion til den eksponentielle funktion e^x , hvor $e \approx 2,718281828$. Dette betyder at

$$\ln(e^x) = x \quad e^{\ln(x)} = x$$



Sætning 5 — Logaritmeregneregler. For den naturlige logaritme gælder følgende regneregler for $x, y > 0$.

- a) $\ln(e) = 1$
- b) $\ln(1) = 0$
- c) $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$
- d) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- e) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

■ **Bevis — Sætning 5 a) og b).** Ifølge definitionen af den naturlige logaritme er $\ln(e^x) = x$.

$$\ln(e^1) = 1$$

definition 9 for $x = 1$. Bemærk at $e^1 = e$

$$\ln(e^0) = 0$$

definition 9 for $x = 0$. Bemærk at $e^0 = 1$

■ **Bevis — Sætning 5 c).**

$$x^a = x^a$$

$$x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a$$

$$x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$$

$$\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$$

definition 9 $x = e^{\ln(x)}$

potensregnereglen $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

den naturlige logaritme anvendes

■ **Bevis — Sætning 5 d).**

$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)})$$

$$= \ln(e^{\ln(x) + \ln(y)})$$

$$= (\ln(x) + \ln(y)) \cdot \ln(e) \quad \text{sætning 5 c)}$$

$$= \ln(x) + \ln(y) \quad \text{sætning 5 a)}$$

definition 9 giver at $x = e^{\ln(x)}$

potensregnereglen $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

■ **Bevis — Sætning 5 e).**

$$\ln(x) = \ln(x)$$

$$\ln\left(x \cdot \frac{y}{y}\right) = \ln(x)$$

x ganges med $1 = \frac{y}{y}$

$$\ln\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = \ln(x)$$

faktorerne ombyttes

$$\ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x)$$

sætning 5 d) anvendes

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

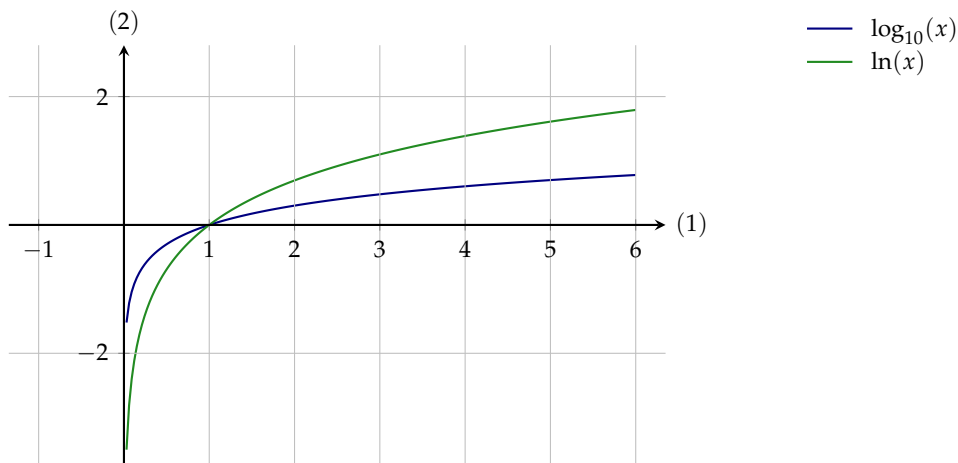
$-\ln(y)$ lægges til

Definition 10 — Logaritmen med grundtal a . Logaritmen med grundtal a er den inverse funktion til eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$. Dette betyder at

$$\log_a(a^x) = x \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Sætning 6 Funktionen $\ln(x)$ er proportional med $\log_a(x)$, med proportionalitetsfaktor $\ln(a)$.

$$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$$



■ Bevis

$$x = a^{\log_a(x)}$$

definition 10

$$e^{\ln(x)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^{\log_a(x)}$$

definition 9

$$e^{\ln(x)} = e^{\ln(a) \cdot \log_a(x)}$$

potensregneregler $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

$$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$$

den naturlige logaritme anvendes

■

Da $\ln(x)$ er proportional med $\log_a(x)$ vil alle regnereglerne fra sætning 5 gælde for $\log_a(x)$ for alle grundtal a .

Logaritmen med grundtal 10 anvendes, ofte fx i definitionen af koncentrationen af H_3O^+ pH og decibel dB. Denne logaritme skrives ofte log uden angivelse af grundtal.

Logaritmeregnereglerne skal her bruges til at løse ligninger med eksponentialfunktioner og potensfunktioner.

Maple : Den naturlige logaritme.

$\ln(x)$

Maple : 10-tals logaritmen.

$\log[10](x)$

Maple : Eksponentialfunktionen e^x .

$\exp(x)$

Maple : Tallet e .

$\exp(1)$

Det er et problem for livet i havet hvis vandet bliver surt. Det er fordi havdyr ofte har et skelet indvendigt som fisk eller udvendigt som muslinger, og dette skelet består af calcium og calcium kan reagere med H_3O^+ . Det betyder at havdyrernes skelet bliver opløst i vandet, hvilket dyrerne ikke kan overleve. I surt vand er der mere H_3O^+ end i basisk vand. pH værdien fortæller præcist hvor meget H_3O^+ der er i vandet med formlen

$$pH = -\log_{10}([H_3O^+])$$

Eller hvor mængden af H_3O^+ er isoleret.

$$[H_3O^+] = 10^{-pH}$$

Det betyder at i vand med en pH-værdi på 7,6 er der ti gange så meget H_3O^+ som i vand med en pH-værdi på 8,6.

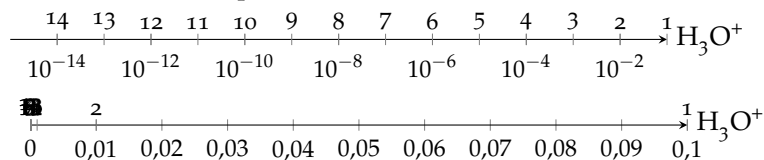
■ **Eksempel 32** For at beregne mængden af H_3O^+ i havvand med en pH-værdi på 8,6, indsættes pH-værdien i formlen

$$[H_3O^+] = 10^{-8,6}$$

Det giver $2,511886432 \cdot 10^{-9}$. ■

Grunden til at H_3O^+ måles på en logaritmisk skala, kan ses på følgende akser. På akserne er pH-værdien vist i forhold til

indholdet af H_3O^+ . Mens den første akse der er logaritmisk fint viser alle pH-værdierne, er det ikke rigtigt muligt at se forskel på pH-værdierne 3 til 14, på den anden akse.



Det kunne selvfølgelig også være lige meget, hvis det ikke var fordi der er meget stor forskel på om pH-værdien er 11 eller 3.

Øvelse 47 Bestem den procentvise forskel mellem havvands indhold af H_3O^+ når pH-værdien falder fra 8,3 til 8,1.

2.3.1 Forskydning af logaritmefunktionen

Logaritmefunktionen indholder kun en parameter, der er grundtallet. Undersøg med kommandoen Explore hvordan sammenhængen er mellem grafen for logaritmefunktionen og grundtallet.

Maple

```
Explore(plot(log[a](x), x=-8..8, -4..3), a=2..10)
```

Grafen for logaritmefunktionen, med den naturlige logaritme $\ln$ kan også forskydes, hvor forskriften med parameterne k og p .

$$\ln(x+k) + p$$

Maple

```
Explore(plot(ln(x+k)+p, x=-8..8, -10..10),
  k=-3..10, p=-10..10)
```

Øvelse 48 Undersøg den parameteriserede logaritme funktion

$$f(x) = \ln(x+k) + p$$

- a) Undersøg sammenhængen mellem parameteren k og funktionens definitionsmængden.

2.4 Mere om eksponentialfunktionen

Fordoblingskonstanten T_2 er det antal år pengene skal stå på kontoen for, at saldoen fordobles eller sagt på en anden måde, hvor lang tid går der før saldoen er steget med 100%.

Definition 11 — Fordoblingskonstanten. Fordoblingskonstanten T_2 er den konstant der opfylder ligningen

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

hvor f er en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 33** Hvis du fik 6% i rente pr. år, hvor mange år vil der så gå, før saldoen er blevet fordoblet? Det er denne ligning vi skal løse $1,06^n = 2$.

$$1,06^n = 2$$

$$\ln(1,06^n) = \ln(2)$$

$$n \cdot \ln(1,06) = \ln(2)$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)}$$

den naturlige logaritme anvendes

sætning 5 c) anvendes

ligningen divideres med $\ln(1,06)$

hvilket er 11,9 år. ■

Dette eksempel kan generaliseres til følgende sætning.

Sætning 7 Fordoblingskonstanten, T_2 , for funktionen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kan bestemmes med formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

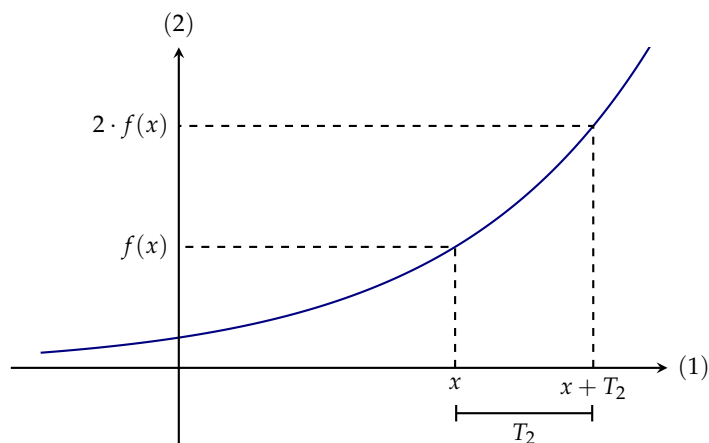
■ **Bevis** Fordoblingskonstanten T_2 er det antal enheder (år) som x -værdien skal vokse med for at y -værdien fordobles.



Video med eksempel på anvendelse af fordoblings- og halveringskonstanten.



Video med bevis for formlen for fordoblingskonstanten.



Dette kan omskrives til ligningen

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

i denne ligning skal T_2 isoleres. Først anvendes funktionsudtrykket for $f(x) = b \cdot a^x$

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

så isoleres T_2 .

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

$$a^x \cdot a^{T_2} = 2 \cdot a^x$$

$$a^{T_2} = 2$$

$$\ln(a^{T_2}) = \ln(2)$$

$$T_2 \cdot \ln(a) = \ln(2)$$

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

ligningen divideres med b

ligningen divideres med a^x

den naturlige logaritme anvendes

sætning 5 c) anvendes

ligningen divideres med $\ln(a)$

■

Sætning 8 Den eksponentielt aftagende udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $0 < a < 1$ har halveringskonstanten

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

■ **Eksempel 34** Bestem fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 1,03^x$. Ved at bruge formlen $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \approx 23,4$$

fordoblingskonstanten er 23,4. ■

■ **Eksempel 35** Bestem halveringskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 0,7^x$. Ved at bruge formlen $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,7)} \approx 1,9$$

halveringskonstanten er 1,9. ■



Video med eksempel på bestemmelse af fordoblingskonstanten.



Video med eksempel på bestemmelse af halveringskonstanten.



Opgaver med fordoblings- og halveringskonstant.

Øvelse 49 Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for funktionen f .

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = 34 \cdot 1,025^x$ | b) $f(x) = 4 \cdot 1,3^x$ |
| c) $f(x) = 2 \cdot 11^x$ | d) $f(x) = 11 \cdot 32^x$ |
| e) $f(x) = 2 \cdot 1,001^x$ | f) $f(x) = 34 \cdot 0,93^x$ |
| g) $f(x) = 34 \cdot 0,03^x$ | h) $f(x) = 0,2 \cdot x^{0,0721}$ |

Øvelse 50 Befolkningen i Nepal var i 1998 22,3 mio. I 1999 var den 22,8 mio. Antag at der er tale om en eksponentiel udvikling.

- Opstil en model for befolkningsudviklingen i Nepal.
- Bestem fordoblingstiden for befolkningen i Nepal.
- Bestem befolkningens størrelse i 2015.
- Bestem den relative forskel mellem modellen og det faktiske befolkningstal i 2015, hvor der var 28,4 mio.

Kilde: Globalis

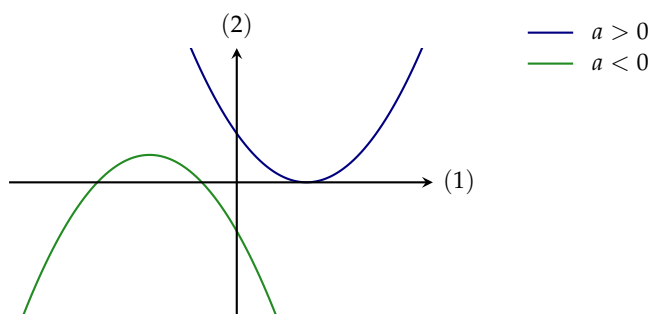
2.5 Andengradspolynomium

Definition 12 Et andengradspolynomium p er en funktion med forskriften

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

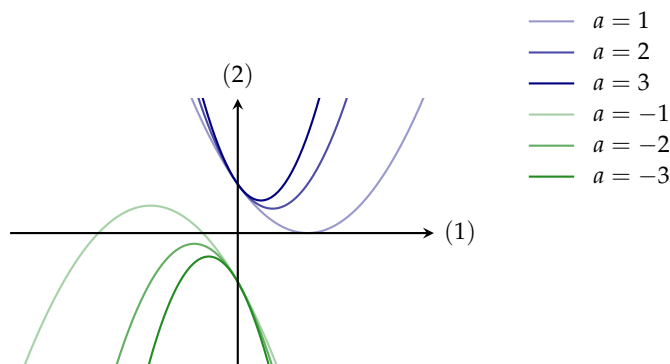
hvor $a \neq 0$ og a, b og c er reelle tal.

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel. Konstanterne a, b og c i andengradspolynomiet påvirker hvordan grafen ser ud. Er a positiv vender grene op og er a negativ vender grene ned.



Video der forklarer betydningen af konstanterne for grafens forløb for et andengradspolynomium.

Jo større eller mindre a er, jo hurtigere vokser eller aftager grafen.

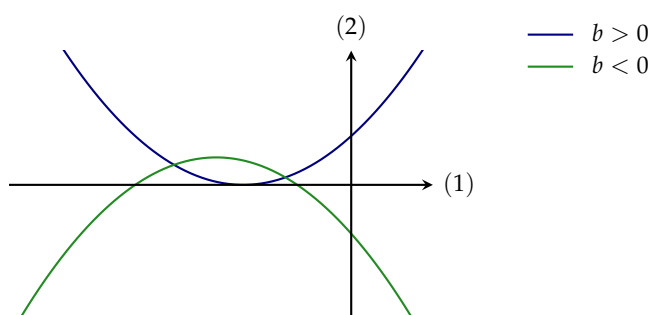


Video der forklarer, hvordan grafen for et andengradspolynomium tegnes.

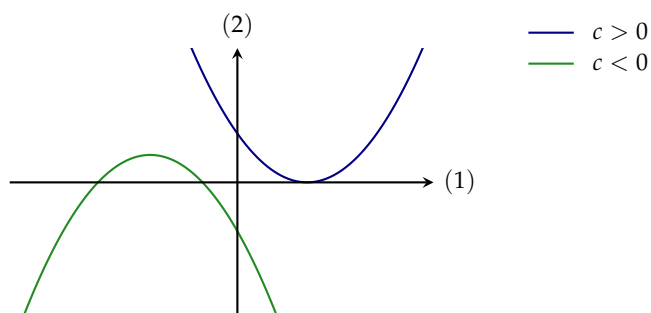


Opgaver hvor grafen for et andengradspolynomium skal skitseres.

b er hældning på grafen i grafens skæringspunkt med 2. akse.



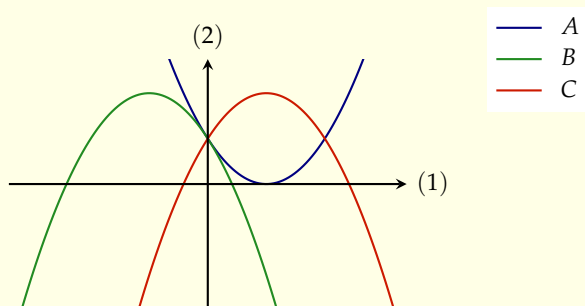
c er grafens skæringspunkt med 2. akse.



Opgaver hvor sammenhængen mellem graf og forskrift skal bestemmes.

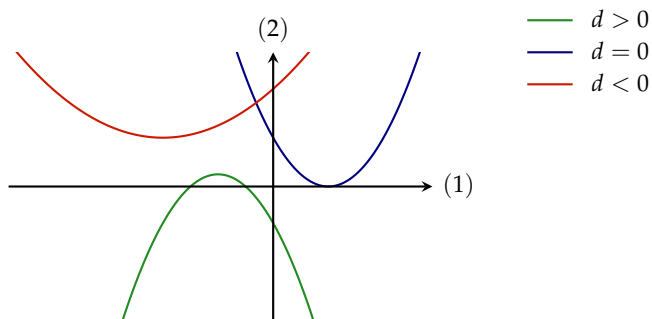
Øvelse 51 Grafen for de tre funktioner f, g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

$$f(x) = -x^2 - 4x + 4 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad h(x) = -x^2 + 4x + 4$$

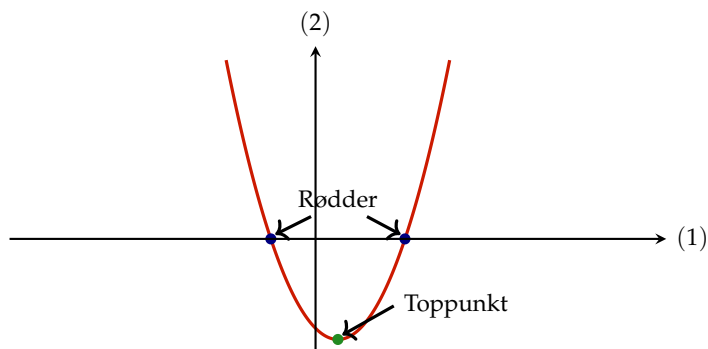


Hvis grafen for polynomiet skærer 1. akse, kaldes disse skæringspunkter for polnomiets rødder. Et andengradspolynomium

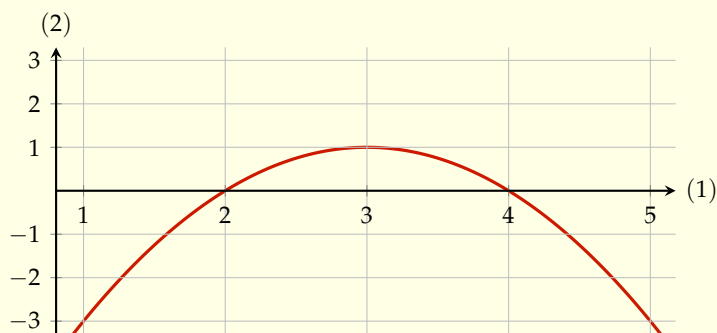
har ingen rødder hvis diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ er negativ, hvis diskriminanten er 0 har polynomiet en rod.



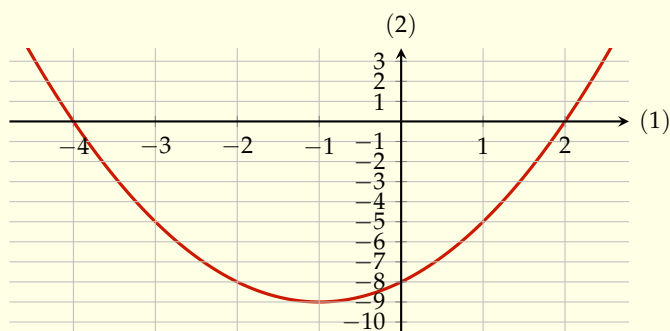
Det punkt hvor graferne skifter fra at være voksende til at være aftagende, eller omvendt, kaldes for grafens toppunkt.



Øvelse 52 Bestem rødder og toppunkt for parabeln.



Øvelse 53 Bestem rødder og toppunkt for parablen.



Grafen for andengradspolynomiet kan forskydes parallelt med 1. og 2. akse. Det gøres ved at indsætte de to parametre p og s i forskriften for $f(x) = x^2$.

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

I Maple kan denne parameterfunktion undersøges med kommandoen Explore.

Maple

```
Explore(plot((x+s)^2+p, x=-8..8, -10..10),
        s=-3..10, p=-10..10)
```



Video der forklarer forskydningen af grafen for $f(x) = x^2$.

Øvelse 54 Undersøg funktionen med forskriften

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

hvor p og s er parametre.

- Hvad er sammenhængen mellem p og s og toppunktet for parablen?
- Hvilke værdier kan p og s have for at grafen går gennem punktet $(3, 3)$.

Øvelse 55 Undersøg sammenhængen mellem p og s og a , b og c i de to forskrifter

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

og

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætning 9 — Rødder. Grafen for polynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$ mulige skæringspunkter med førsteaksen - polynomiets rødder - kan findes med formlen

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

hvor $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, når $d \geq 0$ og $a \neq 0$.



Video bevis for formelen til bestemmelse af rødderne i et andengradspolynomium.

■ **Bevis** Der hvor grafen skærer 1. aksens er y -værdien 0. Det betyder, at for at finde rødderne skal ligningen $0 = ax^2 + bx + c$ løses.

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$4a \cdot 0 = 4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot c$$

$$0 = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac$$

$$b^2 - 4ac = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac + b^2 - 4ac \quad b^2 - 4ac \text{ lægges til}$$

$$b^2 - 4ac = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 \quad b^2 - 4ac \text{ erstattes med } d$$

$$d = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2$$

$$d = (2ax + b)^2$$

$$\sqrt{d} = \pm(2ax + b)$$

$$\pm\sqrt{d} = 2ax + b$$

$$-b \pm \sqrt{d} = 2ax$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = x$$

ligningen ganges med $4a$

omskrivninger

$b^2 - 4ac$ lægges til

$b^2 - 4ac$ erstattes med d

1. kvadratsætning

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$$

kvadratroden tages af ligningen

ligningen ganges med -1

b trækkes fra

ligningen divideres med $2a$

For at ligningen har rødder skal $d \geq 0$ fordi ellers er $\sqrt{d}$ ikke defineret. ■



Viden der gennemgår beregningen af løsningen til en andengradslikning.

■ **Eksempel 36** Rødderne til et andengradspolynomium

$$p(x) = x^2 - 2x - 3$$

kan beregnes ved at løse andengradsligningen

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

Dette gøres ved først at finde a , b og c .

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$$

Derefter beregnes diskriminanten med formlen $d = b^2 - 4ac$.

$$d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 - 4 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Nu kan løsningen til ligningen beregnes med formlen $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

■

Øvelse 56 Bestem rødderne i polynomierne

a) $p(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

d) $p(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$

Sætning 10 — Topunkt. Topunktet for grafen for andengradspolynomiet

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

kan findes med formlen

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right)$$

hvor $d = b^2 - 4ac$.



Opgaver hvor en andengradsligning skal løses.



Video bevis for toppunktsformlen.

■ **Bevis** Toppunktet ligger mellem de to rødder, derfor kan førstekoordinaten til toppunktet beregnes som

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-b + \sqrt{d} - b - \sqrt{d}}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2b}{2a} \right) = \frac{-b}{2a}\end{aligned}$$

Dette er 1.koordinaten til toppunktet. For at bestemme 2.koordinaten, beregnes $p(\frac{-b}{2a})$.

$$\begin{aligned}p\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c \\ &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} \cdot \frac{2}{2} + c \cdot \frac{4a}{4a} \\ &= \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-d}{4a}\end{aligned}$$



Video med eksempel på bestemmelse af toppunktet.

■ **Eksempel 37** Bestem toppunktet for polynomiet

$$p(x) = x^2 - 4x + 3$$

Formlen $(-b/2a, -d/4a)$ hvor $d = b^2 - 4ac$, anvendes.

1. koordinaten til toppunktet

$$\frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

2. koordinaten til toppunktet

$$\frac{-((-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3)}{4 \cdot 1} = \frac{-(16 - 12)}{4} = -1$$

Koordinatsættet til toppunktet er $(2, -1)$. ■

Øvelse 57 Bestem toppunktet for polynomierne

a) $p(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

d) $p(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$



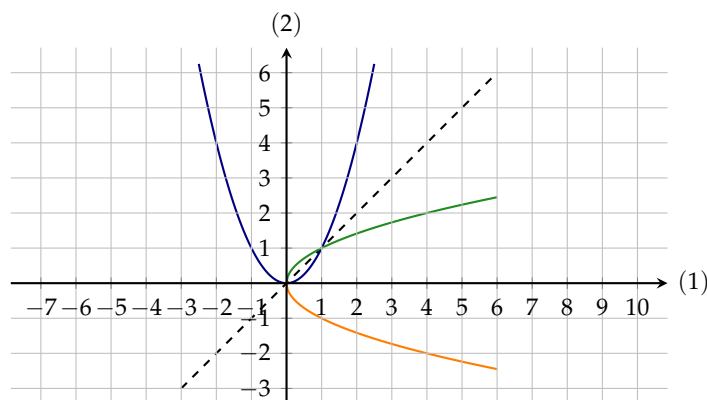
Opgaver hvor toppunktet for et andengradspolynomium skal bestemmes.

2.6 Den inverse funktion til andengradspolynomiet

Funktionen $f(x) = x^2$ har to forskellige funktioner som dens inverse alt efter hvilket definitionsområde, der er gældende. Den inverse funktion findes ved at ombytte x og y derfor vil den inverse funktion være

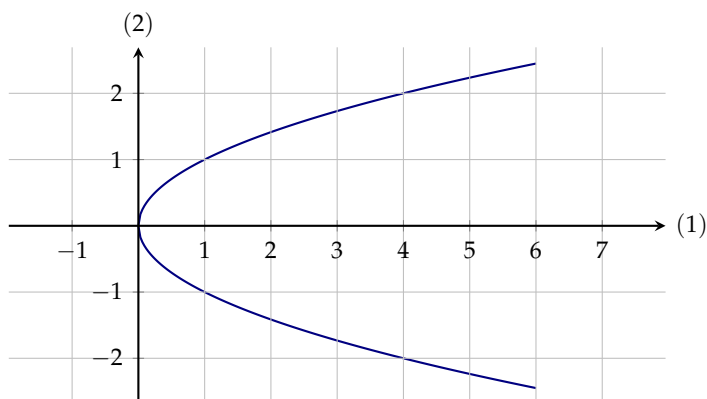
$$x = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

Denne funktion kan som det ses af grafen ikke være én funktion men er sammensat af de to funktioner $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ og $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$



- Spejlingsakse
- $f(x) = x^2$
- $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Dette kan ikke sammensættes til en enkelt funktion fordi denne graf, ikke er grafen af en funktion, fordi der til nogle x -værdier findes to funktionsværdier.



Eftersom at grafen for et andengradspolynomium altid har denne form, skal et andengradspolynomium altid begrænses i sin definitionsområde inden den inverse bestemmes. Den inverse til et andengradspolynomium får værdiområdet fra andengradspolynomiet som definitionsområde.

■ **Eksempel 38** Bestem den inverse funktion til $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, hvis graf går gennem punktet $(-2, 6)$
isoleret y i ligningen

$$x = -y^2 + 6y - 2$$

Det giver de to ligninger

$$y = 3 - \sqrt{7 - x}$$

$$y = 3 + \sqrt{7 - x}$$

Bemærk at definitionsområdet for begge funktioner er værdiområdet for f . Definitionsområdet for f^{-1} er $x \leq 7$ i begge tilfælde. Værdiområdet for $3 + \sqrt{7 - x}$ er $x \geq 3$, da $\sqrt{7 - x}$ ikke kan være negativt. Værdiområdet for $3 - \sqrt{7 - x}$ er $x \leq 3$ af samme grund.

Da grafen skal gå gennem punktet $(-2, 6)$ må den søgte inverse funktion være

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{7 - x}$$

■

Øvelse 58 Bestem den inverse funktion med definition- og værdimængde for funktionen med forskriften

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Grafen for den inverse funktion går gennem punktet $(14, 6)$.

Øvelse 59 Bestem den inverse funktion med definition- og værdimængde for funktionen med forskriften

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1$$

Grafen for den inverse funktion går gennem punktet $(-1, 0)$.

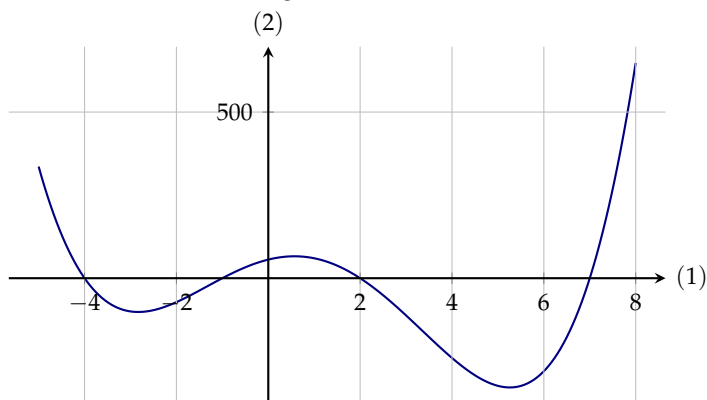
2.7 Polynomier generelt

Et polynomium er en funktion der består af led af typen ax^n hvor n er et helt positivt tal. Det led med det største giver navn til polynomiet. Er $n = 4$ kaldes polynomiet for et fjerdegradspolynomium. Der hvor grafen for et polynomium skærer 1.aksen siges polynomiet at have en rod. Et polynomium kan have lige så mange rødder som graden af polynomiet.

■ **Eksempel 39** Fjerdegradspolynomiet

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 27x^2 + 34x + 56$$

Har fire rødder i -4, -1, 2 og 7.



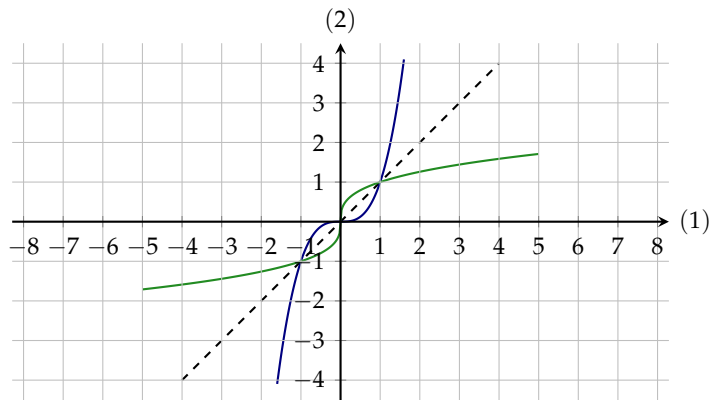
■

Rødderne i et polynomium p bestemmes ved at løse ligningen $p(x) = 0$.

Den inverse funktion til $f(x) = x^3$ er

$$x = y^3 \Leftrightarrow y = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Den inverse funktion er en stykkevis funktion. Disse funktioner kan ses på følgende graf.



--- Spejlingsakse

— $f(x) = x^3$

— $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \end{cases}$

Det er også muligt at lave regression til en polynomium, det er dog vigtigt at være opmærksom på, at man skal tænke sig godt om. For det første skal der være mindst ét datapunkt mere en graden på polynomiet. Det betyder at der skal være mindst tre datapunkter for at lave regression til en andengradspolynomium. For det andet kan størrelsen på koefficienterne blive så små at de er uden betydning. For det tredje bliver regressionen altid bedre jo større grad polynomiet har, men det betyder ikke at det er en bedre model. Det er vigtigt at have en faglig begrundelse for valget af model.

■ **Eksempel 40** Nogle datapunkter er mål

x	-4	-2	0	2	4	6
y	158	146	142	145	157	177

Det antages at de den bedste model er et andengradspolynomium.

Modellen bestemmen i Maple med kommandoen PolyReg. Efter at data er indtastet skal graden af polynomiet skrive, her skrives 2.

Maple

```
PolyReg([-4, -2, 0, 2, 4, 6], [158, 146, 142, 145, 157, 177], 2, x)
```

$$x^2 - .128571428571442 * x + 141.628571428571$$

Det ses at R^2 bliver større hvis graden af polynomiet er større.

Men det er ikke i sig selv et argument for at vælge et polynomium af større grad som model. Det er fordi der er flere parametre, der kan tilpasses og derfor vil modeller bedre kunne tilpasses data. Men der skal faglige argumenter til for at vurdere hvad den bedste model er.

Maple

```
PolyReg([-4, -2, 0, 2, 4, 6], [158, 146, 142, 145, 157, 177], 2)
```

giver en R^2 på 0,99960, mens

Maple

```
PolyReg([-4, -2, 0, 2, 4, 6], [158, 146, 142, 145, 157, 177], 5)
```

giver en R^2 på 1,00000.

■

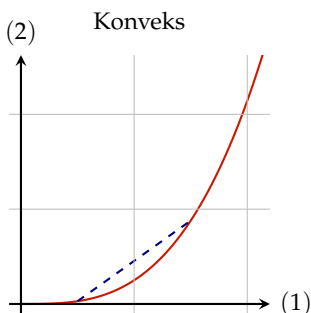
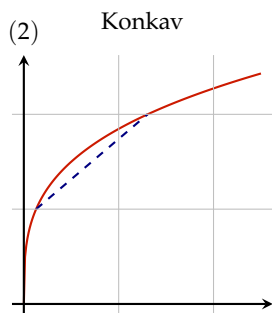
2.8 Potensfunktion

Definition 13 En potensfunktion er en funktion med regneforskriften

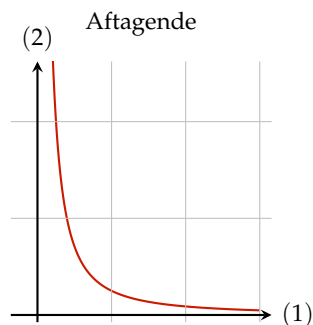
$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $b > 0$ og både a og b er reelle tal.

Grafen for en potensfunktion med regneforskrift $f(x) = bx^a$ kan have tre typer af forløb. Forløbet af grafen afhænger af a . Hvis $a > 1$ er grafen voksende og konveks. For a mellem 0 og 1 er grafen for potensfunktionen voksende og konkav.



For $a < 0$ er grafen aftagende.

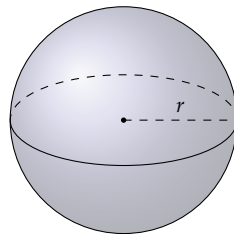
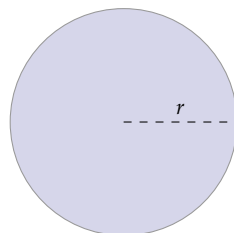


Sammenhængen mellem arealet A og radius r af en cirkel, er et eksempel på en potensfunktion

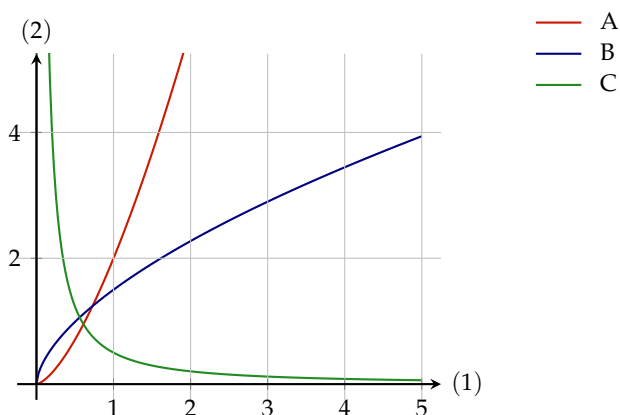
$$A = \pi \cdot r^2$$

Eller sammenhængen mellem volumen V og radius r af en kugle

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$



■ **Eksempel 41** Figuren viser graferne for funktionerne

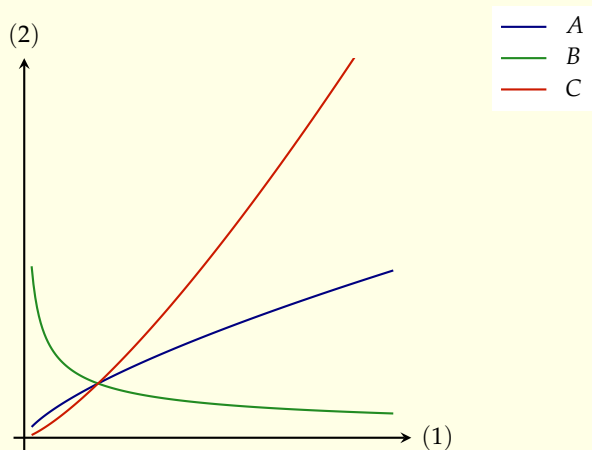


$$f(x) = 1,5 \cdot x^{0,6} \quad g(x) = 2 \cdot x^{1,5} \quad h(x) = 0,5 \cdot x^{-1,3}$$

A er grafen for g da grafen er konkav og voksende og eksponenten er større end 1 i funktionen f . B er grafen for f da grafen er konveks og voksende og eksponenten er mellem 0 og 1. C er grafen for h , da grafen er konveks og aftagende og eksponenten er mindre end 0. ■

Øvelse 60 Grafen for de tre funktioner f , g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

$$f(x) = 1,5 \cdot x^{1,3} \quad g(x) = 1,5 \cdot x^{-0,5} \quad h(x) = 1,5 \cdot x^{0,7}$$

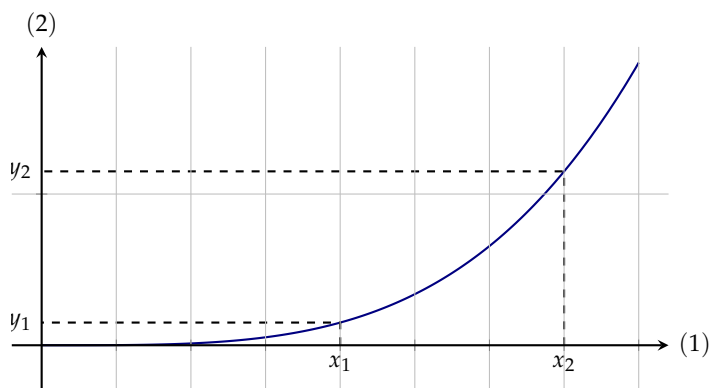


Potensfunktionen er en funktion der beskriver sammenhænge, som fx hvis én billet koster 50 kr. og der sælges 400 og prisen på biografbilletter stiger med 6%, og antallet af solgte billetter falder med 20%. Så vil den nye pris være 53 kr og der vil blive solgt 320 billetter. Inden prisen blev sat op var den samlede indtjening 20 000 kr og efter prisstigningen er den samlede indtjening 16 960 kr.

Vides det, at der er tale om en potensfunktion og kendes to punkter kan regneforskriften findes.

Sætning 11 En potensfunktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot x^a$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$ så er

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} \quad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$



Det vides at $f(x_1) = y_1$ og at $f(x) = b \cdot x^a$, disse to udtryk medfører, at $y_1 = f(x_1) = b \cdot x_1^a$ altså, $y_1 = b \cdot x_1^a$. Tilsvarende vil det gælde for $y_2 = b \cdot x_2^a$. Disse to ligninger divideres.

$$\frac{b \cdot x_1^a}{b \cdot x_2^a} = \frac{y_1}{y_2}$$

brøken forkortes med b

$$\frac{x_1^a}{x_2^a} = \frac{y_1}{y_2}$$

potensregnereglen $\frac{y^s}{x^s} = \left(\frac{y}{x}\right)^s$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a = \frac{y_1}{y_2}$$

den naturlige logaritme

$$\ln\left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \quad \text{logaritmeregnereglen } \ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$a \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \quad a \text{ isoleres}$$

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \quad \text{logaritmeregnereglen } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$a = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{\ln(x_1) - \ln(x_2)}$$

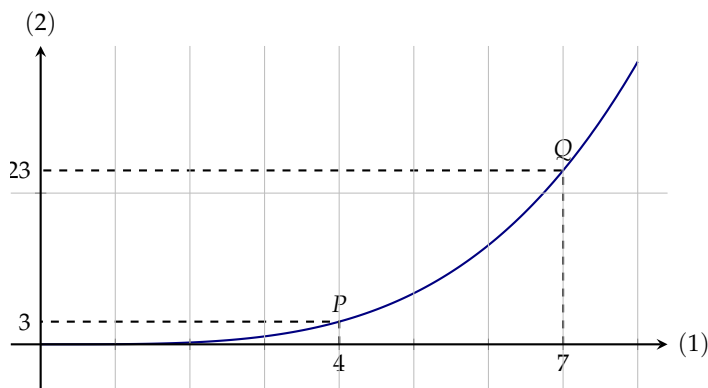
Nu kendes a , hvilket bruges til at finde b , fordi

$$b \cdot x_1^a = y_1$$

Og dette medfører, at

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

■ **Eksempel 42** Grafen for en potensfunktion går gennem punkterne $P(4,3)$ og $Q(7,23)$.



Forskriften for funktionen udregnes ved først at finde a ,

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(23) - \ln(3)}{\ln(7) - \ln(4)} = 3,64$$

og derefter b : $b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{3}{4^{3,64}} = 0,0193$. Forskriften bliver

$$f(x) = 0,0193 \cdot x^{3,64}$$



Video med eksempel på beregning af forskrift, afhængig og uafhængig variabel i en potensfunktion.

■

Øvelse 61 Bestem forskriften for en potensfunktion hvis graf går gennem punkterne $(2, 23)$ og $(6, 138)$.

Øvelse 62 I en biograf koster én billet 50 kr og de sælger i gennemsnit 150 billetter til en forestilling. De beslutter at sætte prisen op til 55 kr og derefter sælger de 120 billetter til en forestilling. Det antages at sammenhængen mellem prisen på billetten og antallet af solgte billetter kan beskrives med modellen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor x er prisen på billetterne og $f(x)$ er det gennemsnitlige antal solgte billetter.

- Bestem a og b i modellen.
- Bestem ændringen i den samlede indtægt for biografen.

Sætning 12 For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ og for et tal k gælder, at

$$f(x \cdot k) = f(x) \cdot k^a$$

■ **Bevis**

$$\begin{aligned} f(x \cdot k) &= b \cdot (x \cdot k)^a \\ &= b \cdot x^a \cdot k^a \\ &= f(x) \cdot k^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{potensregnereglen } (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n \\ f(x) &= b \cdot x^a \end{aligned}$$

■

Det betyder, at når x ændres med en procent p_x , ændres $y = f(x)$ også med en procent p_y . Fra procentregning vides, at et tal ændres en procent ved at gange det med $p + 1$, hvor p er den procent tallet ønskes ændret med.

■ **Eksempel 43** Ønskes tallet 54 øget med 20 %, beregnes

$$54 \cdot (0,20 + 1) = 64,8$$

■



Opgaver hvor forskrift, afhængig og uafhængig variabel skal beregnes for en potensfunktion.

Det betyder at sætning 12 betyder

Sætning 13 For potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ gælder at en procentændring i p_x i den uafhængige variabel x medfører en procentændring p_y i den afhængige variabel $y = f(x)$. Sammenhængen mellem p_x og p_y er

$$(1 + p_x)^a = p_y + 1$$



Video med eksempel på beregning af procentprocentvækst.

■ **Eksempel 44** Arealet af en cirkel bestemmes med formlen $A = \pi \cdot r^2$, hvor r er radius på cirklen. Når radius vokser med 30%

$$(1 + 0,30)^2 - 1 = 0,69$$

vokser arealet med 69%. ■

■ **Eksempel 45** Lad $f(x) = 0,3 \cdot x^{4,1}$. Antag at x øges med 3%. Hvor mange procent ændres $f(x) = y$ med?

Sættes $p_x = 0,03$ og $a = 4,1$ ind i formlen fås

$$p_y = (1 + 0,03)^{4,1} - 1 = 0,129$$

y ændres med 12,9%. ■



Opgaver hvor procentprocentvækst skal beregnes.

Øvelse 63 Sammenhængen mellem alderen og arealet af en musling kan beskrives med sammenhængen

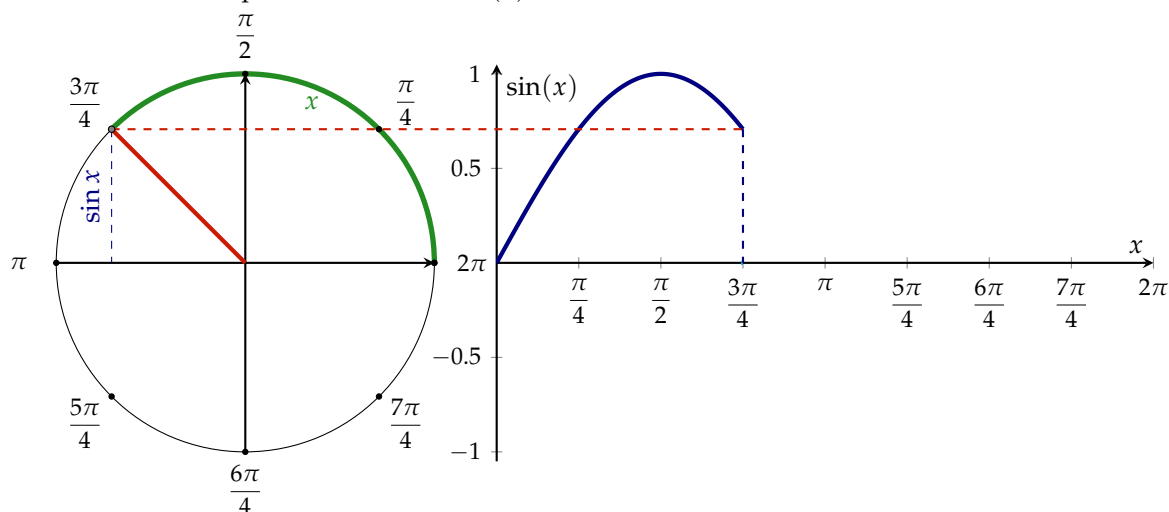
$$A = 0,3 \cdot t^{0,9}$$

hvor A er arealet af muslingen og t er alderen af muslingen.

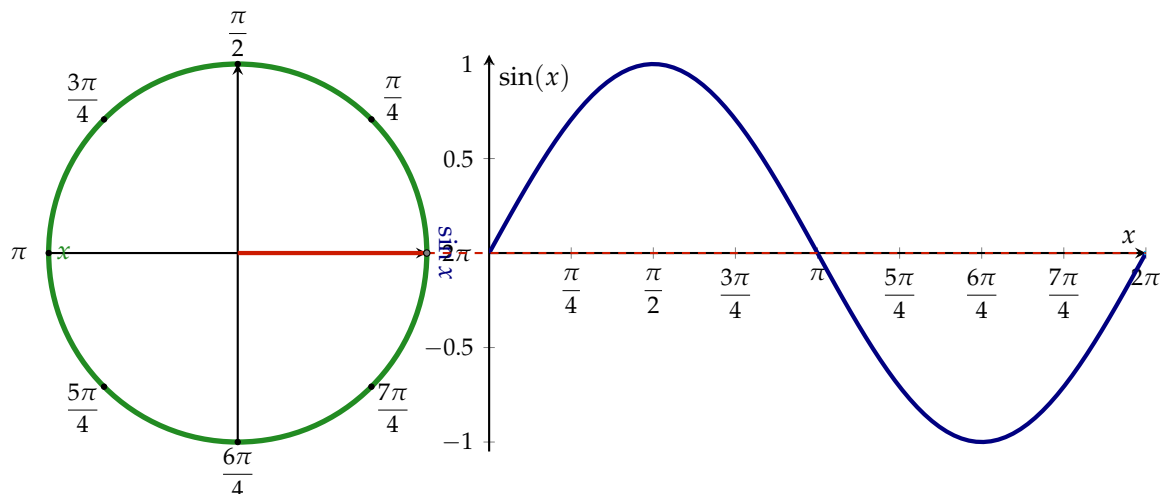
- Bestem muslingens areal, når alderen er 12.
- Bestem muslingens alder, når arealet er 0,9.
- Bestem hvor mange procent arealet øges med, når muslingens alder øges med 25%.

2.9 De trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner bruges til at modellere periodiske begivenheder fx svingninger eller lydbølger. For at forstå $\sin(x)$ som en funktion ses på definitionen af $\sin(x)$ ud fra enhedscirklen.



Ved at fortsætte hele vejen rundt i cirklen tegnes en hel periode for sinusfunktionen.

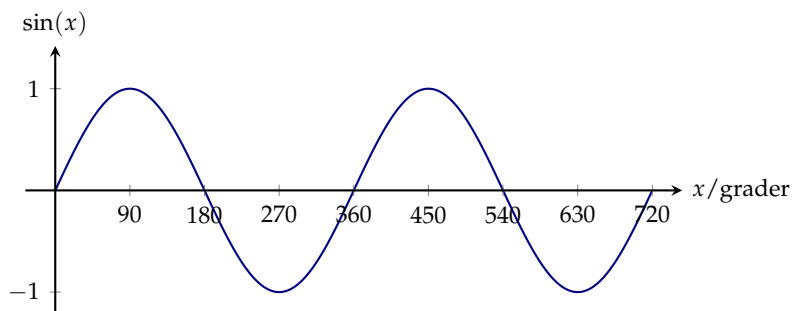


Buelængden x kaldes for radian. En radian er en anden måde at angive en vinkel på. Hver radian svare til et gradtal. Fx π radian

svare til 180° . Formlen til omregning mellem grader og radian er

$$\text{radian} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{grad}$$

Sinusfunktionen $\sin(x)$ har grafen hvor vinklen er angivet i grader.



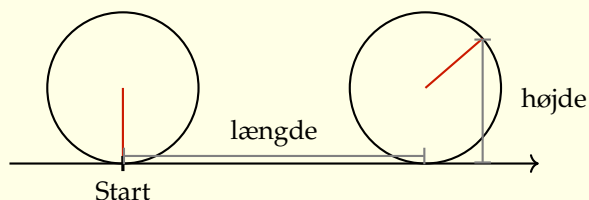
Denne funktion kan parametriseres med parametrene A , B , C og D

$$f(x) = A \cdot \sin(B \cdot x + C) + D$$

Øvelse 64 Undersøg denne funktion og bestem sammenhængen mellem grafen og parameterne A , B , C og D .

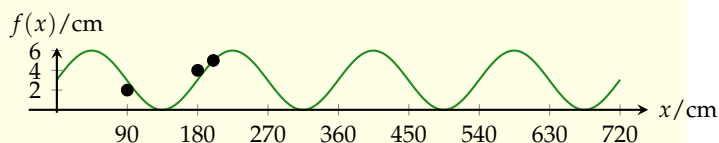
- Lav i dit IT-værktøj en sinuskurve med fire parametre A , B , C og D som du kan manipulere i et passende interval.
- Beskriv i ord hvordan A , B , C og D påvirker grafen og tegn eksempler.

- c) Tag flere cirkelrunde genstande fx tallerkner eller et stykke karton og mål radius. Sæt en prik eller marker på anden måde et punkt på kanten af tallerkenen. Tril nu tallerkenen om mål sammenhørende værdier for længden tallerkenen har trillet og højden af punktet over bordet.



Længde i cm	0			...
Højden i cm	0			...

- d) Indsæt punkterne i et koordinatsystem og bestem værdier for A, B, C og D , der gør at grafen på bedste vis kommer tæt på punkterne, ved at manipulere med værdierne for A, B, C og D i jeres IT-værktøj.



- e) Argumenter for sammenhængen mellem A, B, C og D og radius. Vis hvordan resultatet af jeres argumentation passer med jeres data.
- f) Hvis en af konstanterne ikke afhænger af radius, hvad afhænger den så af?

■ **Eksempel 46** Løs ligningen

$$3 \cdot \sin(2x) = 2, \quad 0 \leq x \leq 5$$

I Maple bruges kommandoen `intervalsolve` fordi der er angivet

et interval for

Maple

```
intervalsolve(3*sin(2*x) = 2.0, x = 0 .. 5)
```

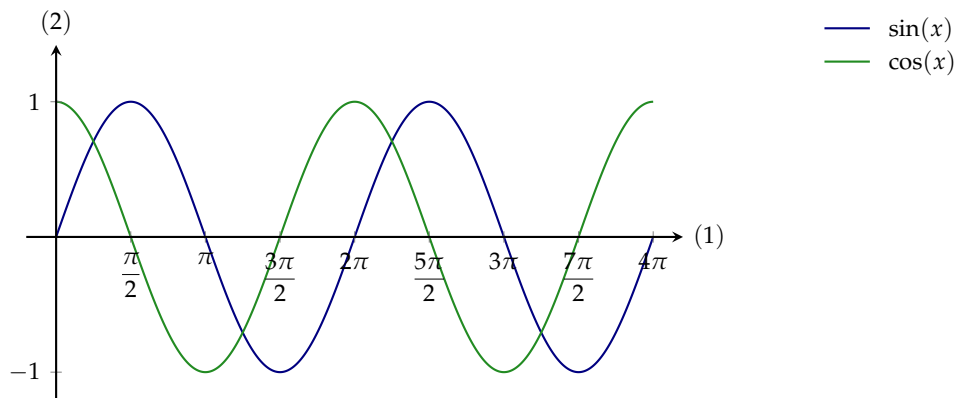
```
[.3648638281, 1.205932499, 3.506456482, 4.347525152]
```

Ligningen har fire løsninger i intervallet 0 til 5. ■

Øvelse 65 Løs ligningen

$$3 \cdot \sin(\pi x) = 3, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Funktionen cosinus kan på tilsvarende vis beskrives. Graferne for sinus og cosinus ses på figuren.

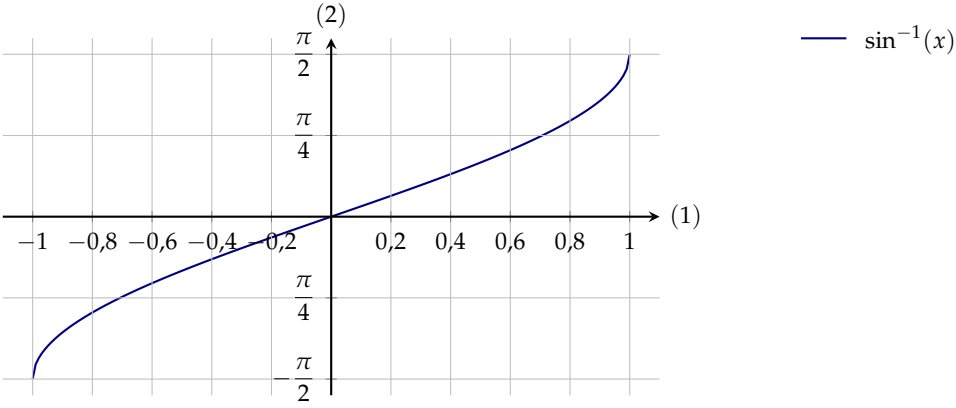


Som det ses kan funktionen $\cos(x)$ kan også beskrives som en forskydning af funktionen $\sin(x)$ hvor x er forskudt $\frac{\pi}{2}$. Derfor er

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Den inverse funktion til $\sin(x)$ har definitionsmængden $[-1; 1]$, fordi det var værdimængden for $\sin(x)$ og værdimængden $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Grafen for den inverse sinusfunktion bestemmes igen med enhedscirklen. Men denne gang afsættes x -værdien fra enhedscirklen på grafens 2. akse og 2. koordinaten til punktet på cirkelperiferien afsættes på grafens 1. akse. Det giver følgende graf.



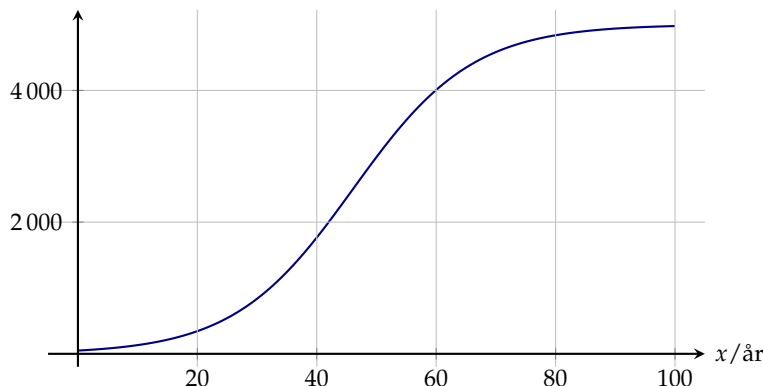
2.10 Funktionskompositioner

Funktioner kan kombineres på flere forskellige måder som det i dette afsnit skal ses på. Formålet med at kombinere funktioner er, at få nogle nye funktioner, der kan beskrive sammenhænge der ikke er mulige med de funktioner der hidtil er beskrevet. Det gælder fx funktionen

$$f(x) = \frac{5000}{1 + 100 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$$

Der beskriver antallet af individer i en population af truede dyr, efter at dyrene er beskyttet af en international aftale om ikke at fange dyret.

Antal individer



$$f(x) = \frac{5000}{1 + 100 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$$

2.10.1 Regning med funktioner

Det er muligt at lave nye funktioner ved at lægge funktioner sammen, eller gange dem med hinanden, eller trække dem fra eller dividere dem med hinanden.

■ **Eksempel 47** To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x^2$$

Ved at bruge de fire regnearter kan der laves nye funktioner.

$$f(x) + g(x) = 2x + 3 + x^2$$

$$f(x) - g(x) = 2x + 3 - x^2$$

$$f(x) \cdot g(x) = (2x + 3) \cdot x^2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x^2}$$

Ved division mellem funktioner skal der være opmærksom på muligheden af at dividere med nul. I dette tilfælde skal definitionsmængden indskrænktes til $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, altså alle tal undtagen nul.

■

Øvelse 66 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 4x - 12$$

$$g(x) = x^2 - 9$$

- Bestem forskriften for de to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Tegn grafen for to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Bestem definitionsmængderne for de to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Bestem forskriften for grafen for $\frac{g}{f}(x)$.
- Løs ligningen $f(x) + g(x) = 0$.

Det kan give nogle nye typer af funktioner at kombinere funktioner, men det er ikke sikkert at det sker. Det kan godt give funktioner, der allerede er kendt eller kan opnås ved at forskyde kendte funktioner.

2.10.2 Stykkevise og sammensatte funktioner

De kendte funktioner som lineære, eksponentielle, potens, polynomier og trigonometriske kan sammensættes og stykkes sammen til nye funktioner.

■ **Eksempel 48 — Sammensatte funktioner.** To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot 0,9^x$$

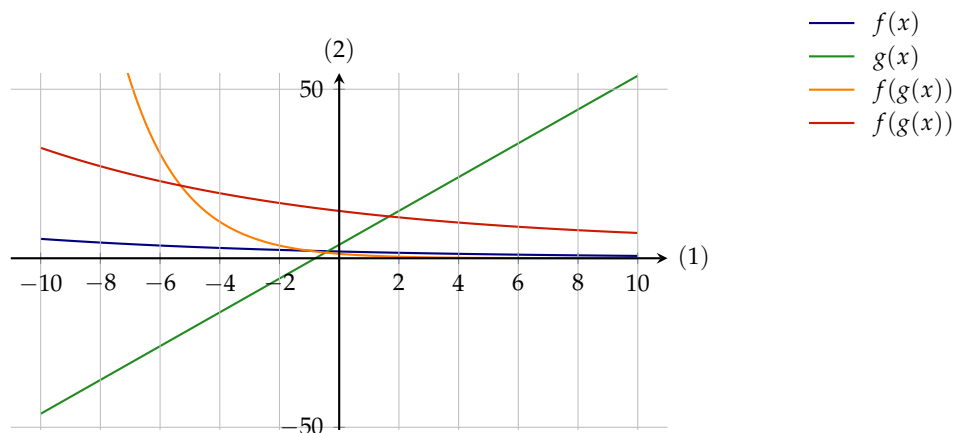
$$g(x) = 5 \cdot x + 4$$

Kan sammensættes til funktionerne $f(g(x))$ og $g(f(x))$. Det giver to nye funktioner.

$$f(g(x)) = 2 \cdot 0,9^{5x+4}$$

$$g(f(x)) = 5 \cdot (2 \cdot 0,9^x) + 4$$

Her ses grafen for alle fire funktioner



På graferne kan det ses at det godt kan give grafer der blot er forskydninger af de allerede kendte funktioner. ■

Øvelse 67 Givet to funktioner f og g .

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

Vis at $g(f(x))$ er et andengradspolynomium.

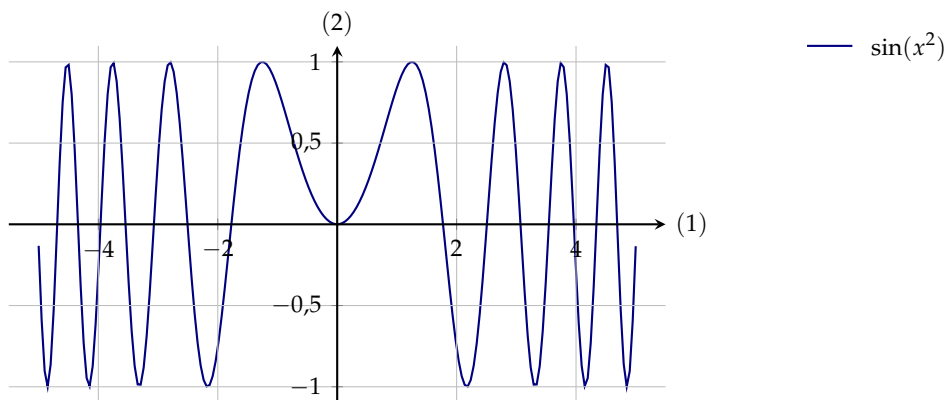
Øvelse 68 Givet to funktioner f og g .

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2$$

Løs ligningen $g(f(x)) = f(g(x))$

■ **Eksempel 49** Funktionen $\sin(x^2)$ er et eksempel på en sammensat funktion. Den er sammensat af de to funktioner $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x^2$. Den er så funktionen $f(g(x))$.



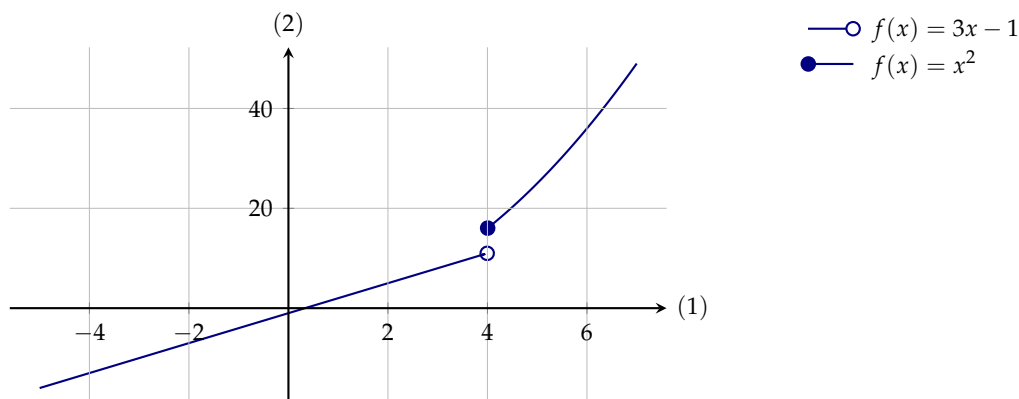
På grafen ses, at denne graf ikke kan fremkomme som forskydningen af en af de allerede kendte grafer. ■

Øvelse 69 Undersøg hvilken værdi parameterne a , b , c og d kan have for at

$$a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d = (\sin(x))^2$$

■ **Eksempel 50 — Stykkevisse funktioner.** En funktion der er bestemt af flere funktionsforskrifter med hvert deres interval kaldes en stykkevis funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 4 \\ x^2 & 4 \leq x \end{cases}$$



På grafen markeres endepunktet for intervallerne med en $\bullet$ hvis endepunktet er indeholdt i intervallet. ■

I Maple kan stykkevis funktioner defineres med kommandoen `piecewise`, bemærk at intervallet kommer først og forskriften bagefter.

Maple

```
f(x) := piecewise(x < 4, 3*x-1, 4 <= x, x^2)
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} 3x - 1 & x < 4 \\ x^2 & 4 \leq x \end{cases}$$

For at tegne grafen for en stykkevis funktion, skal kommandoen `plot` indeholde `discont` for, at gøre Maple opmærksom på, at funktionen ikke er sammenhængende.

Maple

```
plot(f(x), x=-5..5, discont)
```

Øvelse 70 En stykkevis funktion er givet

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & x < 2 \\ 3x - 2 & 2 \leq x \end{cases}$$

Bestem værdien af a så grafen for f er sammenhængende.

2.11 Eksamensspørgsmål

- a) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + b$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt.
- b) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for eksponentialfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt. Bevis formlerne til beregning af fordoblings- og halveringskonstanten.
- c) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for potensfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot x^a$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt. Bevis formlen til beregning af procentvækst.
- d) Gennemgå betydningen af konstanterne a, b og c for grafens forløb for andengradspolynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$. Bevis formlen til beregning af rødderne.

3

Sandsynlighedsregning

Ikke alt kan forudsiges. For at undersøge det tilfældige, laves sandsynlighedsregning. Det tilfældige kan være et eksperiment eller en computersimulering. Start med en simpel simulering af 50/50. I stedet for en mønt, kan der også bruges en terning fx hvor 1-3 er plat og 4-6 er krone.

Øvelse 71 — Kast med mønt. Du skal bruge fire mønter til dette eksperiment.

- a) Kast med en mønt og prøv at forudsige resultatet.
- b) Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.
- c) Kast med én mønt 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- d) Kast med to mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- e) Kast med tre mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- f) Kast med fire mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- g) Blev det lettere eller svære at forudsige resultatet når der var flere mønter?

Hvad sker der hvis der bliver flere mulig udfald? Prøv nu med en terning. Først kan 1 og 2 slås sammen til ét udfald. Det samme med 3 og 4. Og med 5 og 6.

Øvelse 72 — Kast med terning. Du skal bruge fire terninger til dette eksperiment.

- a) Kast med en terning og prøv at forudsige resultatet.
- b) Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.
- c) Kast med én terning 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- d) Kast med to terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- e) Kast med tre terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- f) Kast med fire terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- g) Blev det lettere eller svære at forudsige resultatet når der var flere terninger?

Eksperimenter som ovenstående kaldes stokastiske eksperimenter. Det er muligt at opskrive sandsynligheden for et udfald af kast med en mønt eller en terning, hvis det antages at alle udfald har samme sandsynlighed. Sandsynlighedsfeltet for kast med en ærlig¹ mønt er:

Udfald	Plat	Krone
Sandsynlighed	0,5	0,5

¹ En ærlig mønt eller terning, har samme sandsynlighed for alle udfald.

For at kunne regne for eksempel gennemsnit gives alle udfald en numerisk værdi, dette kaldes for den stokastiske variabel, der ofte har symbolerne X , Y og Z . I dette tilfælde har plat værdien 0 og krone værdien 1.

X	0	1
$P(X=u)$	0,5	0,5

Værdierne som den stokastiske variabel kan antage, kaldes for udfaldsrummet. Udfaldsrummet siges at være symmetrisk, hvis alle udfald har samme sandsynlighed. Dette kaldes også for den

uniforme fordeling. Hvis den stokstiske variabel kun kan antage heltallige værdier kaldes fordelingen for diskret. Som eksempel på en diskret uniform fordeling ses på fordelingen der opstår når et tal mellem 1 og 20 udvælges tilfældigt. 7 tal mellem 1 og 20 udvalgt tilfældigt.

20, 3, 3, 19, 19, 14, 12

Her er det svært, næsten umuligt at vide hvilke tal der kommer frem, men udvælges 10 000 til ses et system hvor hvert udfald fremkommer ca. 5 % af gangene. I tabel 3.1 ses udfaldet af sådan en simulering.

Maple kan lave en simulering der genererer tilfældige tal med kommandoerne `DiscreteUniformRandomVariable` (definition af den stokastiske variabel) og `Sample` (simulering der genererer datasæt).

Maple : Simulering af tilfældige tal.

```
with(Gym):
with(Student[Statistics]):
X := DiscreteUniformRandomVariable(1, 20):
data := Sample(X, 10000):
```

Definition 14 — Sandsynlighed.

$$P(H) = \frac{G}{M}$$

Hvor H er en hændelse, det kan være et enkelt udfald eller en gruppe af udfald. G er antallet af udfald hvor hændelsen indtræffer (gunstige udfald) og M er antallet af mulige udfald.

Øvelse 73 Opskriv sandsynlighedsfeltet for kast med én ærlig 6-sidet terning.

For at kunne udregne sandsynlighedsfeltet for mere komplicerede eksperimenter ses på kombinatorik.

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
1	486	4,86	4,86
2	528	5,28	10,1
3	504	5,04	15,2
4	490	4,9	20,1
5	519	5,19	25,3
6	490	4,9	30,2
7	527	5,27	35,4
8	499	4,99	40,4
9	495	4,95	45,4
10	510	5,1	50,5
11	527	5,27	55,7
12	479	4,79	60,5
13	507	5,07	65,6
14	516	5,16	70,8
15	457	4,57	75,3
16	516	5,16	80,5
17	502	5,02	85,5
18	474	4,74	90,3
19	473	4,73	95
20	501	5,01	100

Tabel 3.1: Tabellen viser udfaldet af computersimuleringen hvor der udtages 10 000 tilfældige tal mellem 1 og 20.

3.1 Kombinatorik

Kombinatorik bruges til at udregne antallet af udfald i en situation eller eksperiment. Det bruges til at udregne både antallet af gunstige udfald og antallet af mulige udfald.

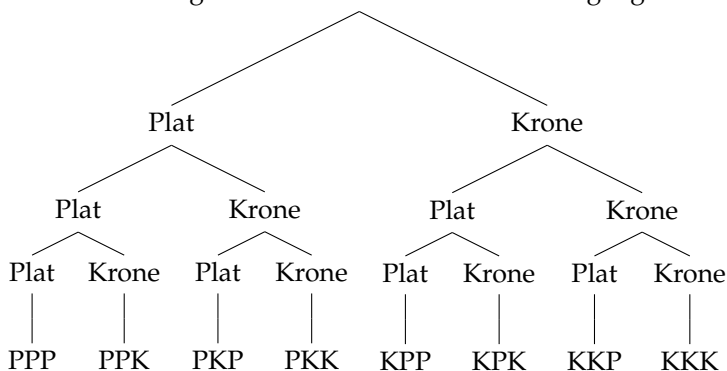
3.1.1 Multiplikationsprincippet

En computer er bygget op omkring 2-talssystemet. Det er fordi den enkleste måde at se et elektrisk signal på, er om den er tændt eller slukket. Tændt gives værdien 1 og slukket gives værdien 0.

En enkel måde at se effektiviteten af sådan et system er ved at tælle på dine fingre. Du har sikkert ti fingre. Hvis en finger er bøjet har den værdien 0 og hvis den er strakt har den værdien 1. For at undersøge hvor mange mulige måder dine fingre kan være indstillet på kan man bruge multiplikationsprincippet. Finger ét kan være bøjet eller strakt, det er to muligheder. Finger to kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2$ muligheder. Finger tre kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2 \cdot 2$ muligheder. Da du har ti fingre er det $2^{10} = 1024$ muligheder eller indstillinger. Det betyder at du med denne metode kan tælle til 1024 på dine fingre og ikke kun til 10.

En anden måde at visualisere multiplikationsprincippet er ved brug af tælletræer.

Antal mulige udfald ved kast med mønt tre gange



Men tælletræet viser også et anden ikke uvæsentligt element. Der er 8 forskellige kombinationer ved tre kast med en mønt, men

der er kun 4 forskellige, hvis rækkefølgen ikke tages i betragtning. Det betyder, at når tre mønter kastes samtidig, er der kun fire forskellige udfald og sandsynligheden for de fire udfald er ikke lige stor.

Øvelse 74 Lav et tælletræ for byg-selv burger og bestem hvor mange forskellige burgere du kan bygge. Du kan vælge grov eller hvid bolle. Okse, kylling eller vegetar bøf. Hvidløg eller burger dressing. Med eller uden ost.

Øvelse 75 I et forsøg bruges tre 6-sidede terninger.

- Lav et tælletræ for kast med tre 6-sidede terninger.
- Hvor mange forskellige udfald er der når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen?
- Bestem sandsynligheden for de forskellige udfald når der ikke tages hensyn til rækkefølgen.

3.1.2 *Kombinationer uden tilbagelægning*

I de situationer hvor det samme udfald ikke kan ske to gange, kan ovenstående formel ikke bruges.

Jeg har bogstaverne:

A, h, i, w, K, E, g, n

Jeg kan anbringe dem i $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ forskellige rækkefølger, fordi jeg har 8 bogstaver at vælge imellem når jeg skal vælge det første bogstav og 7 når jeg skal vælge det næste osv. Dette skrives $8!$ for nemheds skyld.

Men hvis jeg kun ser efter om der er tale om store eller små bogstaver, kan jeg ikke se forskel på

A, h, i, w, K, E, g, n

A, h, n, w, K, E, g, i

Disse to rækkefølger eller kombinationer er ens.

Generelt er der i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Men da der ikke er forskel på de r succeser og

$(n - r)$ fiaskoer, kan der ikke ses forskel på rækkefølgen som de to fremkommer i. Fx er $F_1S_3S_1F_2S_4S_2$ og $F_1S_1S_2F_2S_4S_3$ ens da rækkefølgen af succeser ikke har betydning, mens $F_1S_3S_1F_2S_4S_2$ og $S_1F_1S_3F_2S_4S_2$ er forskellige da rækkefølgen af succes og fiasko har ændret sig. Derfor er antallet af måder r succeser kan fremkomme i n forsøg

$$\frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Det betyder, at antallet af forskellige kombinationer af store eller små bogstaver, i følgende bogstaver

A, h, i, w, K, E, g, n

er $n = 8$, $r = 5$ da jeg regner lille bogstav som en succes.

$$M = \frac{8!}{5! \cdot (8 - 5)!} = 56$$

Det havde ikke gjort nogen forskel om jeg havde regnet stort bogstav som succes.

$$M = \frac{8!}{3! \cdot (8 - 3)!} = 56$$

Øvelse 76 I en klasse er der 25 elever og 18 er piger. På hvor mange forskellige måder kan de stilles op på en række, hvis det eneste der tæller er, om de er drenge eller piger?

Øvelse 77 I en pose slik er der 4 lakridser og 7 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

Øvelse 78 I en pose slik er der 1 lakrids og 10 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

4

Statistik

Hele idéen med statistik er at afgøre om den forskel, der er mellem to målinger eller to grupper er signifikant. Den deskriptive statistik indeholder metoder til at overskue store datamængder, men disse metoder viser dog ikke noget om disse forskelle skyldes tilfældighed eller om der er en årsag bag forskellene. Dette leder frem til det centrale dogme i statistik.

Det at forkaste 0-hypotesen ved en statistisk signifikansprøve betyder at man mener at forskellen mellem to grupper af individer eller to målinger er så stor at den ikke kan bero på ren tilfældighed.

0-hypotesen er den hypotese, at der *ikke* er forskel på de to grupper af individer eller de to målinger.

Statistiske signifikansprøver er en beregning af sandsynligheden for at forkaste en rigtig hypotese hhv. acceptere en forkert hypotese. Her vi vi komme ind for flere signifikansprøver. Signifikansprøven er afhængig af datatypen.

Forskellen mellem to grupper eller to målinger kan være i mange forskellige variable. Fx kan det være højden på mænd og kvinder. De to grupper er så mænd og kvinder og variabelen er højden. Det kan også være holdning der er variabelen og grupperne kan være de politiske partier. Grupperne kan også være radioaktive materialer og variabelen kan være henfaldstiden.

Hvornår forskellen er stor nok, afhænger af signifikansniveauet (hvor mange fejl konklusioner man vil acceptere), mængden af data (stikprøvestørrelsen) og hvor stor forskellen er.

Ren tilfældighed vil sige, at der *kun* er tale om tilfældighed og *ikke* en underliggende årsag. Indenfor statistik kaldes tilfældigt for stokastisk.

Data kan komme fra mange forskellige kilder. Det kan være alt



Video der forklarer hvad statistik er og kan bruges til.

fra dit eget forsøg i matematik, kemi, fysik, geografi eller biologi. Men de kan også være data fra Danmarks Statistik eller andre offentlige kilder.

Statistiske tests bruges særligt i natur- og sundhedsvidenskabeligt arbejde. Men det er også begyndt at blive anvendt i forbindelse med markedsføring.

I politik anvendes meget ofte deskriptiv statistik, men statistiske test er ikke et validt argument. Hvis det var det, ville der fx ikke være nogle diskussion om global opvarmning.

4.1 Binomialfordeling og test

Binomialfordelingen, som er en fordeling af sandsynlighederne for at et uafhængigt udfald med en fast sandsynlighed indtræffer et bestemt antal gange.

Sandsynligheden for at en udfaldet indtræffer r gange er antallet af mulige måder udfaldet kan indtræffe på r gange sandsynligheden for at det sker en gang.

Sætning 14 — Binomialkoefficienten. Antallet af kombinationer et udfald indtræffer r ud af n gange er

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

når udfaldet indtræffer kaldes det en succes, ellers er det en fiasko.

■ **Bevis** Der er i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Men da der ikke er forskel på de r succeser og $(n - r)$ fiaskoer, kan der ikke ses forskel på rækkefølgen de to fremkommer i. Fx er

$$F_1 S_3 S_1 F_2 S_4 S_2 \text{ og } F_1 S_1 S_2 F_2 S_4 S_3$$

ens da rækkefølgen af succeser ikke har betydning, mens

$$F_1 S_3 S_1 F_2 S_4 S_2 \text{ og } S_1 F_1 S_3 F_2 S_4 S_2$$

er forskellige da rækkefølgen af succes og fiasko er forskellig. Da antallet af forskellige rækkefølger succeser kan fremkomme på er

$r!$ og tilsvarende er antallet af forskellige rækkefølger fiaskoer kan fremkomme på er $(n - r)!$. Antallet af forskellige måde succeser og fiaskoer kan blandes med hinanden, er den søgte binomialkoefficient $\binom{n}{r}$. Disse tre forskellige rækkefølger er tilsammen alle muligheder rækkefølger, og der var i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Det betyder at

$$n! = \binom{n}{r} \cdot r! \cdot (n - r)!$$

Derfor er antallet af måder r succeser kan fremkomme i n forsøg er

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

■

Øvelse 79 Bestem binomialkoefficienten $\binom{7}{3}$.

Øvelse 80 Bestem binomialkoefficienten $K(9,2)$.

I Maple beregnes binomialkoefficienten med kommandoen `binomial`.

Maple : Binomialkoefficienten.

```
binomial(7, 2)
```

21

Sætning 15 — Binomialsandsynligheder. Den matematiske formel for sandsynligheden, P , for at udfaldet, X , med sandsynlighed, p , indtræffer r ud af n gange er

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

■ **Bevis** I et binomialforsøg kan en udfald enten indtræffe dette kaldes succes eller ikke indtræffe dette kaldes fiasko. Forsøget udføres n gange og $P(n, r, p)$ er sandsynligheden for at udfaldet med

sandsynlighed p har succes r ud af n gange. Antallet af hændelser hvor der er succes r ud af n gange er binomialkoefficienten.

Da udfaldene er uafhængige kan den samlede sandsynlighed beregnes ved at multiplicere sandsynlighederne for de enkelte udfald. Sandsynligheden for succes er p og derfor er sandsynligheden for r succeser p^r . Sandsynligheden for fiasko er $1 - p$ og derfor er sandsynligheden for $n - r$ fiaskoer $(1 - p)^{n-r}$. Sandsynligheden for at udfaldet med sandsynligheden p indtræffer r ud af n gange er derfor

$$P(n, r, p) = \underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{Antal hændelser}} \cdot \underbrace{p^r \cdot (1 - p)^{n-r}}_{\text{sandsynligheden for hændelsen}}$$

■ **Eksempel 51** Antag at der er en meget stor gruppe (helst uendelig stor) hvor 62,79% er piger. Sandsynligheden for at udtrække en pige er ($p=0,6279$). Hvis jeg udtrækker 40 personer (n), hvad er sandsynligheden for, at der er netop 26 piger (r) i denne gruppe.

$$P(40, 26, 0.6279) = \binom{40}{26} \cdot 0,6279^{26} \cdot (1 - 0,6279)^{40-26} = 0,126$$

Der er altså en sandsynlighed på 12,6% for at det blev netop 26 ud af 40, der var piger. ■

I Maple vil kan udregning se således ud.

Maple : Binomialsandsynligheder.

$$\text{binomial}(40, 26) * 0.6279^{26} * (1 - 0.6279)^{40-26}$$

$$0.1258941729$$

En binomialfordelt stokastisk variabel X er defineret ved antallet af forsøg n og sandsynligheden for succes p . Den skrives $X \sim b(n, p)$.

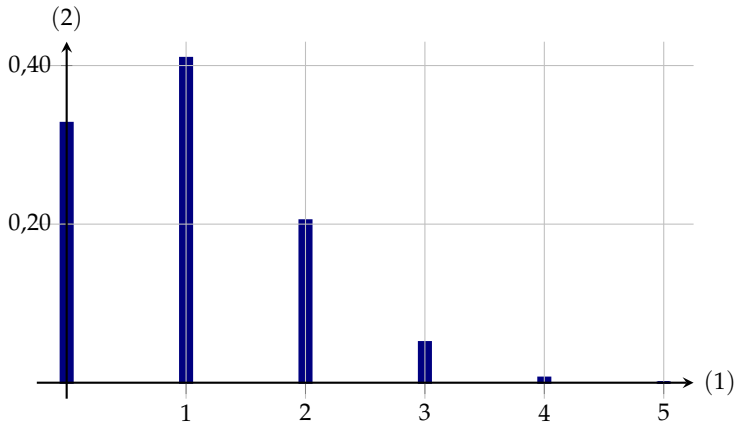
■ **Eksempel 52** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(5, 0.2)$.

Bestem $P(X = 3)$.

$$P(5,3,0.2) = \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot (1 - 0,2)^{5-3} = 0,0512$$

■

Et plot af en binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(5,0.2)$ er et pindediagram



På diagrammet kan det ses at 1 succes ud af 5 er den mest sandsynlige hændelse, med en sandsynlighed på over 40 %.

I Maple kan dette diagram tegnes med kommandoen `pindediagramBIN`.

Maple : Plot af binomialfordeling.

```
pindediagramBIN(5, 0.2)
```

plot af binomialfordelingen.

Øvelse 81 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(11,0.3)$.

- Bestem $P(X = 5)$.
- Tegn binomialfordelingen for X .
- Bestem den mest sandsynlige hændelse.

d) Bestem sandsynligheden for den mindst sandsynlige hændelse.

■ **Eksempel 53** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(8, 0.25)$.

Bestem $P(X \leq 3)$.

For at bestemme $P(X \leq 3)$ skal $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ og $P(X = 3)$ bestemmes og lægges sammen.

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^8 = 0,10$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^7 = 0,27$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^6 = 0,31$$

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^5 = 0,21$$

Derefter lægges værdierne sammen

$$P(X \leq 3) = 0,10 + 0,27 + 0,31 + 0,21 = 0,89$$

Der er altså 89 % sandsynlighed for at der er 3 eller færre succeser.

■

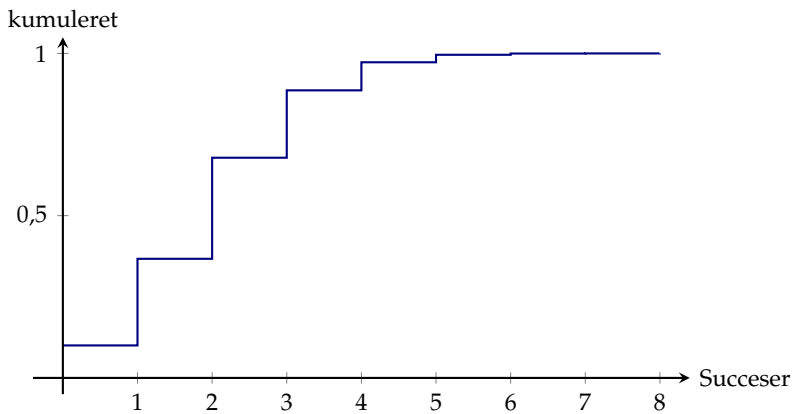
I Maple gøres dette mere enkelt med kommandoen `bincdf`.

Maple

```
bincdf(8, .25, 3)
```

```
0.8861846923
```

$P(X \leq r)$ er den kumulerede sandsynlighed. Dette kan illustreres i trappediagrammet for den kumulerede sandsynlighed.



I Maple tegnes trappekurven for en binomialfordelt stokastisk variabel X med kommandoen `trappekurveBIN`.

Maple

```
trappekurveBIN(8, 0.25)
```

plot af trappekurve for en binomialfordelt stokastisk variabel X med antalsparameter 8 og sandsynlighed 0,25.

Definition 15 — Middelværdi. Middelværdien for en stokastisk variabel X med udfald u_i med sandsynlighed $P(X = u_i)$.

$$\mu(X) = E(X) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot P(X = u_i) = u_1 \cdot P(X = u_1) + u_2 \cdot P(X = u_2) + \dots$$

Sætning 16 For en stokastisk variabel X gælder følgende regnearter for middelværdien. Hvor a er et tal.

$$\begin{aligned} E(a) &= a \\ E(a \cdot X) &= a \cdot E(X) \\ E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \\ E(a + X) &= a + E(X) \end{aligned}$$



Video med bevise for regnearterne for middelværdien.

■ **Bevis** For alle regnereglerne skal definitionen af middelværdien bruges, det betyder at

$$E(X) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i$$

for den stokastiske variabel X . For den stokastiske variabel Y gælder der at

$$E(Y) = \sum_{j=1}^m v_j \cdot P_j$$

$$\begin{aligned} E(a) &= a \cdot P_1 && \text{Sandsynligheden når der kun er et udfald er 1.} \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(a \cdot X) &= \sum_{i=1}^n a \cdot u_i \cdot P_i && \text{Definitionen af middelværdien.} \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i && a \text{ ikke afhænger af udfaldet.} \\ &= a \cdot E(X) && \text{Definitionen af middelværdien.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (u_i + v_j) \cdot P_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_i \cdot P_{i,j} + v_j \cdot P_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_i \cdot P_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_j \cdot P_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i \cdot 1 + \sum_{j=1}^m v_j \cdot P_j \cdot 1 \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(a + X) &= \sum_{i=1}^n (a + u_i) \cdot P_i \\
&= \sum_{i=1}^n a \cdot P_i + \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i \\
&= \sum_{i=1}^n a \cdot P_i + \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i \\
&= a \cdot \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i \\
&= a \cdot 1 + \sum_{i=1}^n u_i \cdot P_i \\
&= a + E(X)
\end{aligned}$$

■

Definition 16 — Varians. Variansen for en stokastisk variabel X med udfald u_i med sandsynlighed $P(X = u_i)$.

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^2 \cdot P(X = u_i)$$

Sætning 17 Variansen for en stokastisk variabel X med udfald u_i med sandsynlighed $P(X = u_i)$.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$= E(X^2 + E(X)^2 - 2 \cdot X \cdot E(X))$$

$$= E(X^2) + E(X)^2 - E(2 \cdot X \cdot E(X))$$

$$= E(X^2) + E(X)^2 - 2 \cdot E(X) \cdot E(X)$$

$$= E(X^2) + E(X)^2 - 2 \cdot E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

definition af varians.

2. kvadratsætning

Regneregler for middelværdien

Regneregler for middelværdien

Reducering $E(X) \cdot E(X) = E(X)^2$

Reducering $E(X)^2 - 2 \cdot E(X)^2 = -E(X)^2$

Definition 17 — Spredning. Spredningen eller standard afvigelsen for en stokastisk variabel X .

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$



Video hvor beregning af middelværdi, varians og spredning forklares.

■ **Eksempel 54** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(4, 0.7)$.

- Bestem middelværdien for X .
- Bestem variansen for X .
- Bestem spredningen for X .

Først beregnes sandsynligheden af hvert udfald.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,7^0 \cdot 0,3^4 = 0,0081$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,7^1 \cdot 0,3^3 = 0,0756$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^2 = 0,2646$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^1 = 0,4116$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^0 = 0,2401$$

Dette samles i en overskuelig tabel

u	0	1	2	3	4
$P(X = u)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Nu kan middelværdien beregnes

$$E(X) = 0 \cdot 0,0081 + 1 \cdot 0,0756 + 2 \cdot 0,2646 + 3 \cdot 0,4116 + 4 \cdot 0,2401 = 2,8$$

Nu kan variansen beregnes

$$\text{Var}(X) = 0^2 \cdot 0,0081 + 1^2 \cdot 0,0756 + 2^2 \cdot 0,2646 + 3^2 \cdot 0,4116 + 4^2 \cdot 0,2401 - 2,8^2 = 0,84$$

Nu kan spredningen beregnes

$$\sigma(X) = \sqrt{0,84} = 0,9165$$

■

I Maple kan en binomialfordelt stokastisk variabel X defineres med kommandoen `BinomialRandomVariable` der er i pakken `Student[Statistics]`. Derefter kan middelværdi, varians, spredning og sandsynlighederne for de enkelte udfald beregnes. Kommandoerne ses i tabellen herunder.

Middelværdi	Mean
Varians	Variance
Spredning	StandardDeviation
Sandsynlighed af udfald	ProbabilityFunction

```
Maple
with(Student[Statistics]):
X := BinomialRandomVariable(4, 0.7): Mean(X)

2.8

Variance(X)

0.84

StandardDeviation(X)

0.9165151390

ProbabilityFunction(X, 0)

0.00810

ProbabilityFunction(X, 1)

0.0756
```

Øvelse 82 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(10, 0.4)$.

- a) Bestem middelværdien for X .
- b) Bestem variansen for X .

- c) Bestem spredningen for X .
- d) Bestem $P(X \leq 4)$.
- e) Bestem den mindste værdi for u så $P(X \leq u) \geq 0,8$.

Øvelse 83 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(6, 0.1)$.

- a) Bestem middelværdien for X .
- b) Bestem variansen for X .
- c) Bestem spredningen for X .
- d) Bestem $P(X \leq 2)$.
- e) Bestem den mindste værdi for u så $P(X \leq u) \geq 0,95$.

Øvelse 84 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(6, 0.85)$.

- a) Bestem middelværdien for X .
- b) Bestem variansen for X .
- c) Bestem spredningen for X .
- d) Bestem $P(X \leq 2)$.
- e) Bestem den mindste værdi for u så $P(X \leq u) \geq 0,05$.

Maple kan lave en simulering af en stokastisk variabel med en antals- og sandsynlighedsparameter. Her ses et eksempel på en stokastisk variabel med antalsparameter 8 og sandsynlighedsparameter 0,6. Der er lavet en simulering 10 gange. Det er muligt at bestemme frekvenser, trappediagram, gennemsnit og spredning.

Maple : Simulering.

```
with(Gym):
with(Student[Statistics]):
```



```

X := BinomialRandomVariable(8, .6):
Sample(X, 10)
          [5,6,3,5,3,6,4,6,3,4]

data:=Sample(X, 100):
gennemsnit(data)
          4,82

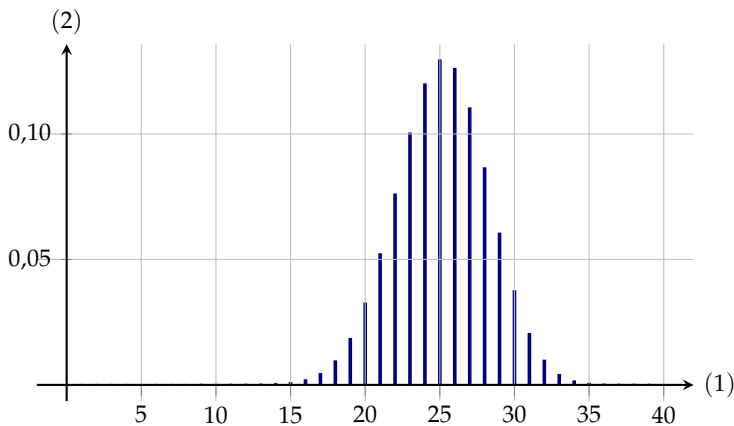
Mean(X)
          4,8

```

4.2 Binomialtest

For at undersøge om

Men dette er ikke nok til at afgøre om denne stikprøve er sandsynlig. Hele fordelingen skal tages i betragtning. Sandsynligheden for at 0 til 40 var piger skal udregnes. Dette er bedst at vise i en graf.



På grafen kan det nu aflæses, at der er lidt over 5% sandsynlighed for, at der er 21 piger i den gruppe på 40 personer, som er udtrukket.

4.2.1 Binomialtest

Ved en binomialtest undersøges om et resultat er sandsynligt. Der er to sandsynligheder som kan undersøges.

- Sandsynligheden for at få et resultat der er lige som dette eller

større $P(X \geq r)$.

- Sandsynligheden for at få et resultat der er lige som dette eller mindre $P(X \leq r)$.

■ **Eksempel 55** For at beregne sandsynligheden for at antallet af piger vil være 26 eller flere ud af 40, når sandsynligheden for pige er 0,6279. Skal følgende udregnes

$$P(X \geq 26) = P(X = 26) + P(X = 27) + \dots + P(X = 40)$$

Det giver 0,4556. Der er altså en sandsynlighed på 45,56% for at der er 26 eller flere piger i gruppen på 40 personer. Dette kaldes binomialtestens p -værdi. Hvis p -værdien er større end signifikansniveauet accepteres 0-hypotesen. Er der valgt et 5% signifikansniveau vil 0-hypotesen accepteres. Det betyder at det accepteres at 26 piger i gruppen er sandsynligt. ■

■ **Eksempel 56** I et spil spilles med en 6 sidet terning. En spiller får 5 seksere i 12 kast. Undersøg om dette kan accepteres, eller om der er tale om snyd, på et 5% signifikansniveau. Sandsynligheden for at få et sekser er $1/6$ og der kastes 12 gange og er 5 succeser.

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + \dots + P(X = 12)$$

I Maple defineres binomialfordelingen

Maple

$$\text{BF}(n, r, p) := \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Derefter beregnes summen

Maple

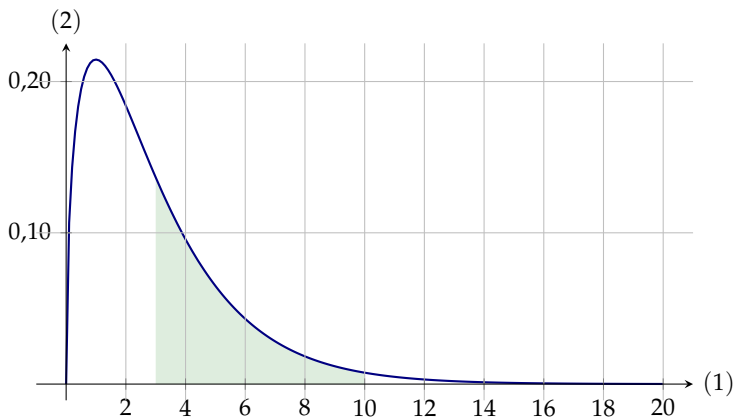
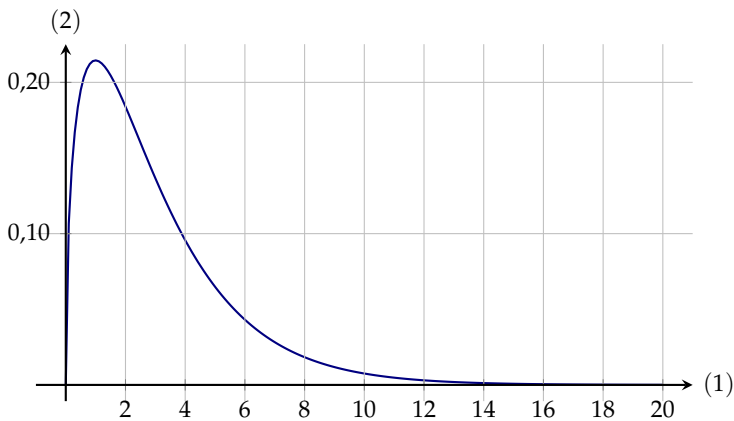
```
sum(BF(12,i,1/6),i=5..12)
```

Dette giver 0,03635. p -værdien 3,6% er altså mindre end signifikansniveauet på 5% og 0-hypotesen forkastes. Personen i spillet er altså heldigere end 5% af alle spillere eller også synder personen. ■

Øvelse 85 Befolkningen i Sydafrika er på 47,8 mio. indbyggere hvor af 18% har HIV/AIDS. 14% af kvinderne i alderen 15-49 år har HIV/AIDS og 4% af mændene i alderen 15-49 år har HIV/AIDS. Test om følgende stikprøven kan siges at være signifikant på 5%-niveau.

Gruppe	Antal
Kvinder i alderen 15-49 år med HIV/AIDS	15
Kvinder i alderen 15-49 år uden HIV/AIDS	55
Total	70

4.3 χ^2 -fordeling



Video der forklarer beregning af de forventede værdier i en krydstabel, når det antages at de to variable er uafhængige (nulhypotesen er sand).



Video der forklarer beregning af de forventede værdier (hypotetisk) ud fra en kendt fordeling (frekvens).



Video der forklarer beregning af χ^2 -værdien.



Video der forklarer χ^2 -fordelingen ved simulering

Fordelingsfunktionen for χ^2 fordelingen er

$$f(x, k) = \frac{x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{k/2} \cdot (k/2 - 1)!}$$

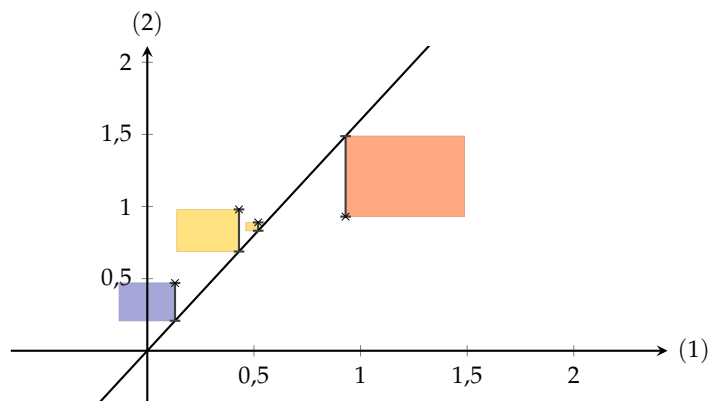
hvor k er antallet af frihedsgrader dvs et positivt heltal og x er et positiv tal. $(\frac{k}{2} - 1)!$ er Γ »Gamma« funktionen når k er et helt positivt tal, og det er det i dette tilfælde.



Video der forklarer χ^2 -testen i relation til χ^2 -værdien, kritisk værdi og signifikansniveau.

4.4 Mindste kvadraters metode

Metoden består i at bestemme den linje, hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linien og Y-værdierne fra data er mindst mulig.



Når der tages udgangspunkt i modellen

$$Y = \alpha X$$

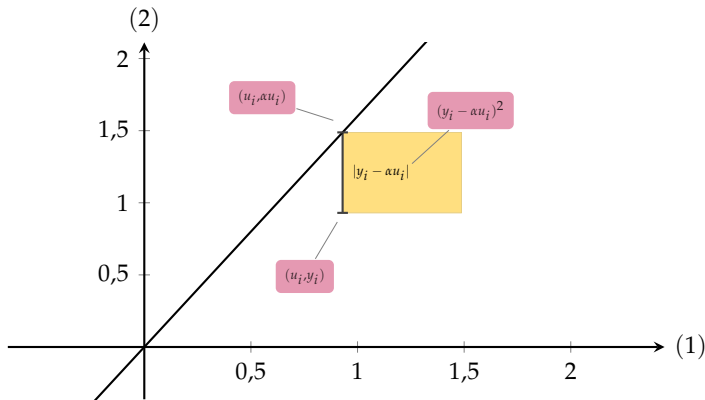
er arealet af et kvadrat $(y_i - \alpha u_i)^2$, hvor (u_i, y_i) er datapar.



Video der forklarer χ^2 fordelingstest i Maple



Video der forklarer χ^2 uafhængighedstest i Maple



Summen af arealerne er

$$\text{Areal}(\alpha) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha u_i)^2$$

hvor n er antallet af datapar.

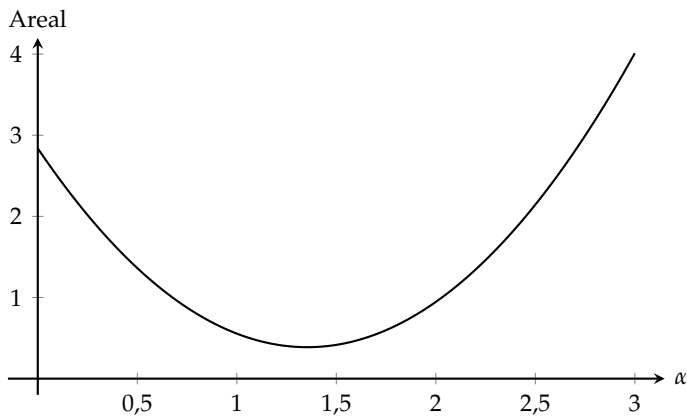
I dette tilfælde er der 4 datapar. Summen af de 4 arealer bliver

$$\text{Areal}(\alpha) = (.98 - .43\alpha)^2 + (.93 - .93\alpha)^2 + (.47 - .13\alpha)^2 + (.89 - .52\alpha)^2$$

Dette kan reduceres til

$$\text{Areal}(\alpha) = 2.8383 - 3.6204\alpha + 1.3371\alpha^2$$

der kan udtrykkes ved en graf.



Den α (hældning) der gør at summen af kvadraterne er mindst mulig er derfor toppunktet af denne graf. Dette kan bestemmes med en *monotoniundersøgelse*.

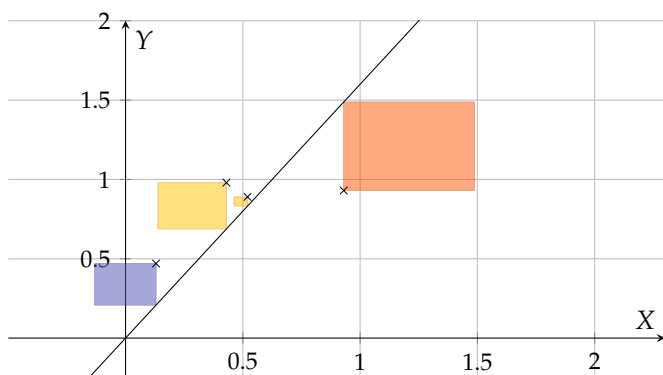
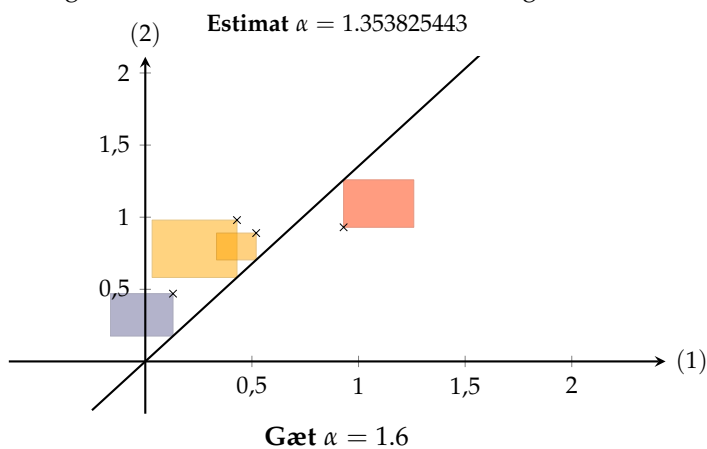
Først differentieres udtrykket

$$\frac{d(2.8383 - 3.6204\alpha + 1.3371\alpha^2)}{d\alpha} = -3.6204 + 2.6742\alpha$$

der efter løses ligningen

$$-3.6204 + 2.6742\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.353825443$$

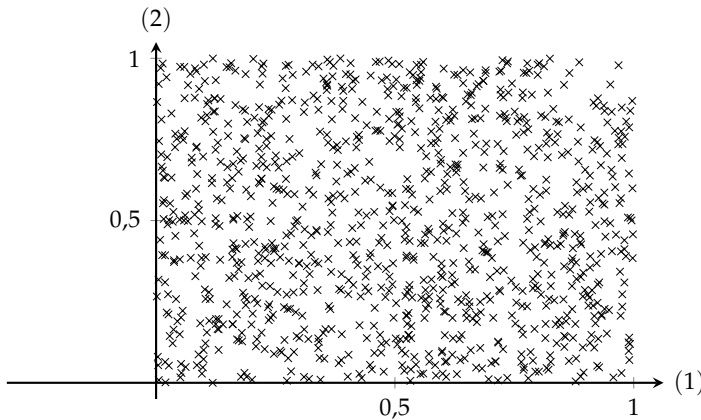
af grafen ses at dette er et minimum. Derfor er det denne værdi af α hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linien og Y-værdierne fra data, er mindst mulig.



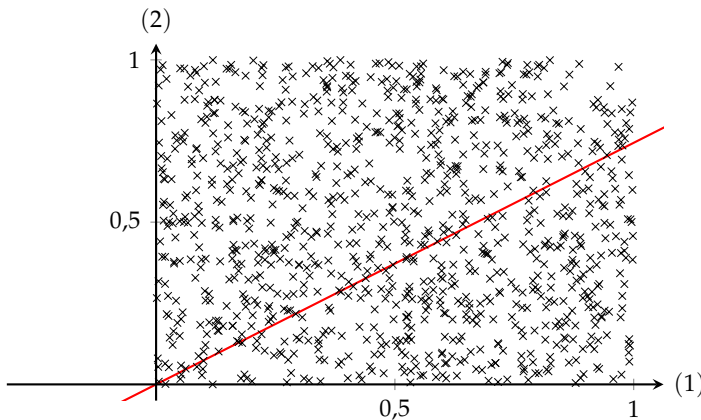
I det daglige arbejde med regression, benyttes et IT-redskab til at udføre beregningerne, ud fra en givet model. I dette eksempel er der benyttet en meget simpel model, men i princippet er det de samme beregninger som IT-redskabet benytter selvom modellen er mere kompliceret.

4.4.1 Regressionsmodellens gyldighed

Da det ikke er muligt at tale om gyldighed, med kun 4 datapar, udvides data til at omfatte 1000 datapar.



Regressionen udføres med mindste kvadraters metode som beskrevet ovenfor. α estimeres til 0,7445. Det giver følgende linie.



Betingelserne for at regressionen er gyldig er at de lodrette afstande mellem linien og Y-værdierne (herefter **residualerne**) er normalfordelte med middelværdi 0 og varians σ^2 , samt at variansen er den samme for alle værdier af X .

De fire residualer i eksemplet fra tidligere ($y_i - \alpha u_i$) er følgende med α på 1,353825443.

$$0,98 - 1,353825443 \cdot 0,43 = 0,3978550595$$

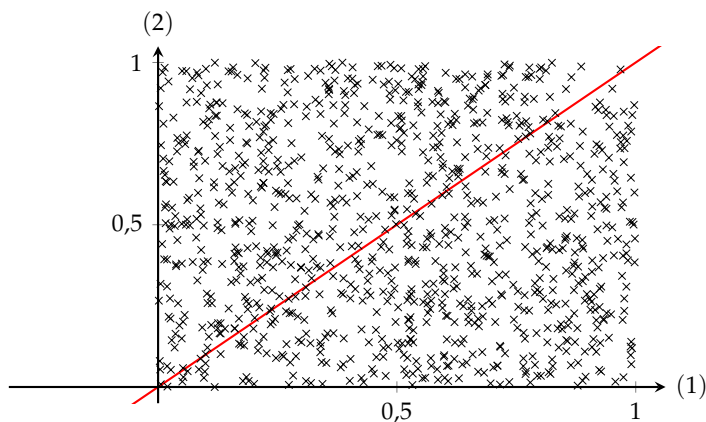
$$0,93 - 1,353825443 \cdot 0,93 = -0,329057662$$

$$0,47 - 1,353825443 \cdot 0,13 = 0,2940026924$$

$$0,89 - 1,353825443 \cdot 0,52 = 0,186010769$$

Middelværdien μ og spredningen σ for residualerne er $\mu = 0,1279, \sigma = 0,3666$. Som det ses er μ ikke tæt på 0 og derfor, kan det hurtigt konkluderes at betingelserne for, at regressionen er gyldig, ikke er opfyldt.

Et bedre estimat for α er $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \approx 1$ idet det forudsættes at alle punkterne er tilfældigt placeret indenfor kvadratet bestående af førsteaksen, andenaksen, $y = 1$ og $x = 1$. Det giver følgende linie.



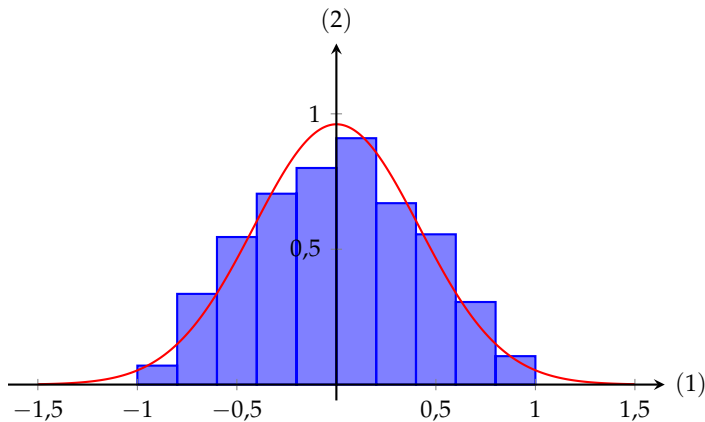
Middelværdien μ og spredningen σ for residualerne er nu $\mu = 0,0006, \sigma = 0,4150$. Som det ses er μ tæt på 0 og derfor, kan det hurtigt konkluderes at denne betingelse for, at regressionen er gyldig, er opfyldt.

Som det næste skal det undersøges om residualerne er normalfordelt med samme spredning. For at gøre det inddeles residualerne i et passende antal intervaller, i dette tilfælde vælges 10 intervaller.

Interval	Hyppighed	Frekvens
$[-1, -0.8[$	14	1.4 %
$[-0.8, -0.6[$	67	6.7 %
$[-0.6, -0.4[$	109	10.9 %
$[-0.4, -0.2[$	141	14.1 %
$[-0.2, 0[$	160	16.0 %
$[0, 0.2[$	182	18.2 %
$[0.2, 0.4[$	134	13.4 %
$[0.4, 0.6[$	111	11.1 %
$[0.6, 0.8[$	61	6.1 %
$[0.8, 1]$	21	2.1 %

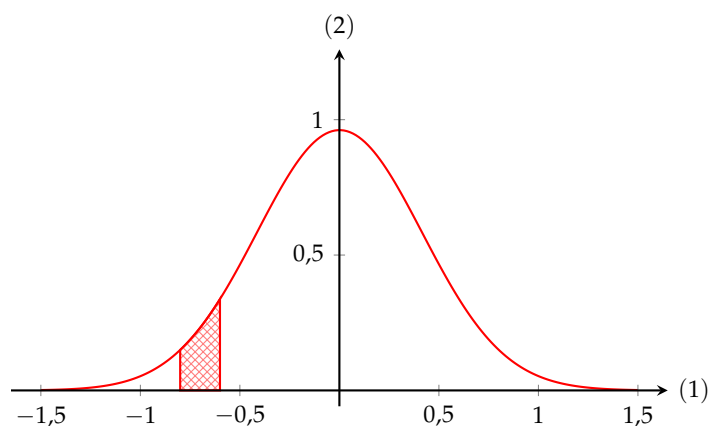
Forskriften for normalfordelingen er

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$$



De tilsvarende forventede antal i de enkelte intervaller beregnes som arealet mellem grafen for normalfordelingen og førsteaksen. Eksempel for intervallet $]-0.8, -0.6]$.

$$1000 \cdot \int_{-0.8}^{-0.6} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} dx \approx 47.1$$



Her ses en sammenligning af de observerede og forventede antal residualer i de enkelte intervaller, når det antages at der er tale om en normalfordeling.

Forskellen undersøges med en χ^2 -test og p -værdien er 0.0003 og derfor forkastes hypotesen at der er tale om en normalfordeling. Da det var en betingelse at residualerne er normalfordelt for at der er tale om en gyldig regression, må konklusionen være at der ikke er tale om en gyldig regression.

Interval	Observeret	Forventet
$] -\infty, -0.8]$	14	26.9
$] -0.8, -0.6]$	67	47.1
$] -0.6, -0.4]$	109	93.3
$] -0.4, -0.2]$	141	147.2
$] -0.2, 0]$	160	185.0
$] 0, 0.2]$	182	185.1
$] 0.2, 0.4]$	134	147.5
$] 0.4, 0.6]$	111	93.6
$] 0.6, 0.8]$	61	47.3
$] 0.8, \infty[$	21	27.0

For at estimere α så afvigelserne er normalfordelt med middelværdi 0 og samme spredning anvendes χ^2 -fordelingstest. Det giver en p -værdi der er 0,00033335, og derfor forkastes nulhypotesen og modellen har derfor ingen gyldighed.

4.4.2 Regressionsmodellens troværdighed

For at vurdere modellens troværdighed er beregnes R^2 -værdien - **regressionskoefficienten**. R^2 -værdien ligger mellem 0 og 1, hvor 0 betyder at modellen er utroværdig og 1 betyder at modellen er troværdig.

R^2 kaldes også for forklaringsgraden og fortæller noget om hvor god den uafhængige variabel er til at forklare ændringer i den afhængige variabel. Hvis der kan siges at være tale om en årsagssammenhæng.

R^2 beregnes som 1 minus summen af kvadraterne på residualerne divideret med summen af kvadraterne på den vertikale afstand mellem de faktiske værdier og deres gennemsnit.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

For den venstre model bliver R^2

$$R^2 \approx 1 - \frac{0,6185}{(2 - 2,833)^2 + (2,5 - 2,833)^2 + (4 - 2,833)^2} \approx 1 - \frac{0,6185}{2,166} \approx 0,71$$

For den højre model bliver R^2

$$R^2 \approx 1 - \frac{1,0625}{(2 - 2,833)^2 + (2,5 - 2,833)^2 + (4 - 2,833)^2} \approx 1 - \frac{1,0625}{2,166} \approx 0,51$$

Igen ses at den venstre model er den bedste af de to modeller. Men nu kendes forklaringsgraden og derfor kan vi overordnet sige om der er tale om en god eller dårlig model. For den venstre models vedkommende betyder R^2 at 71% af variationen i y kan forklares af variation i x . Den resterende variation på 29% må forklares af andre variable, usikkerhed og tilfældighed. Vis der anvendes et 5% signifikansniveau skal R^2 derfor være større end 95% for at sammenhængen kan siges at være signifikant.

4.5 Eksamensspørgsmål

Med udgangspunkt i et eksempel skal du gennemgå hypotese og beregning af de forventede værdier med udgangspunkt i en forventet fordeling og beregning af χ^2 -værdien. Redegør for hvordan χ^2 -fordelingen fremkommer og hvordan den bruges i χ^2 fordelingstesten.

5

Opsparing og lån

Grunden til at det er en god idé at spare op, er at der på den korte bane vil komme perioder hvor udgifterne er større end indtægten. Nogle udgifter betales fx kun hver tredje måned eller to gange om året mens indtægten er hver måned. Den mest simple form for opsparing er, hvor det blot er penge, der ikke er blevet brugt.

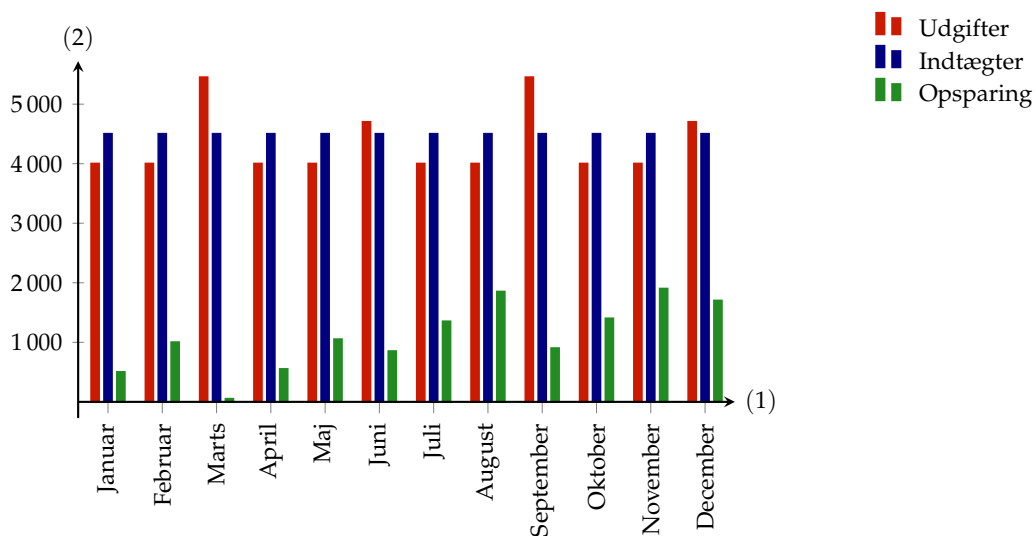
■ **Eksempel 57** I følgende eksempel ses på indtægter og udgifter for et år.

Måned	Mad	Husleje	Forskring	El	Udgifter	Indkomst	Akkumuleret opsparing
Januar	1000	3000			4000	4500	500
Februar	1000	3000			4000	4500	1000
Marts	1000	3000	750	700	5450	4500	50
April	1000	3000			4000	4500	550
Maj	1000	3000			4000	4500	1050
Juni	1000	3000		700	4700	4500	850
Juli	1000	3000			4000	4500	1350
August	1000	3000			4000	4500	1850
September	1000	3000	750	700	5450	4500	900
Oktober	1000	3000			4000	4500	1400
November	1000	3000			4000	4500	1900
December	1000	3000		700	4700	4500	1700

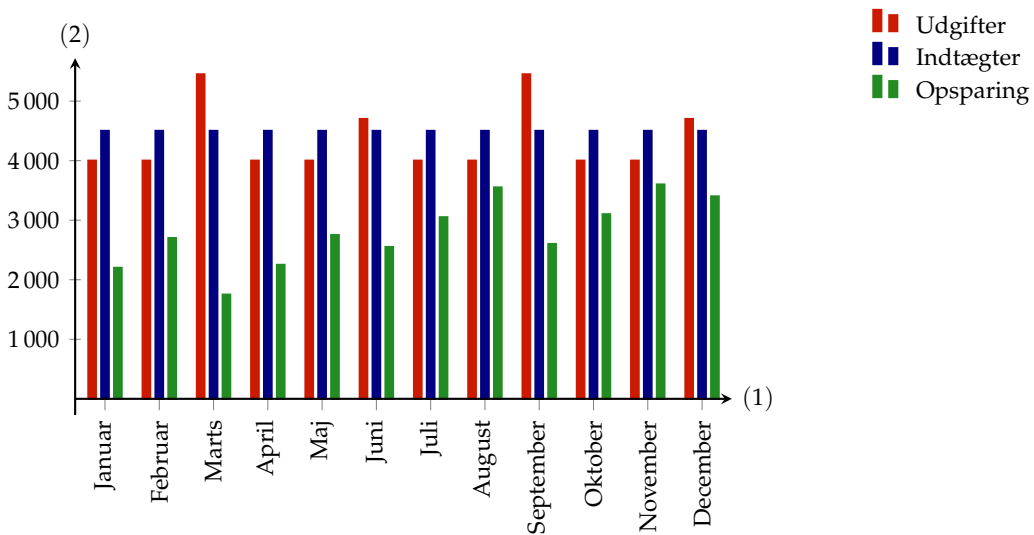
Det ses, at det er nødvendigt at spare op i januar og februar fordi i marts skal penge bruges til forsikring og el. Hvis pengene ikke var blevet sparet op, ville det være nødvendigt at låne penge

for at betale regningerne til el og forsikring. Lånet skulle så betales tilbage i de følgende måneder. Hvis de samlede udgifter over året var over 1700 større, ville der blive opbygget en gæld der ikke kunne betales tilbage.

Grafisk vil året se således ud.



Hvis opsparingen ikke bliver brugt, vil det følgende år se således ud. Selvom opsparingen ikke er særlig stor hver måned, er den allerede efter 2 år næste lige så stor om indkomsten i en enkelt måned.



■

Indtægter kan være løn, SU, dagpenge, renteindtægt, udbytte, lejeindtægt, overskud fra en virksomhed og lignende.

Udgifter kan være skat, renteudgifter, lejeudgifter, serviceydelser (transport, frisør, tandlæge, børnepasning, osv.), cykel, bil, ferierejser, mad osv.

Det er som sagt vigtigt, at indtægterne samlet set er større end udgifterne. Men hvorfor, hvad er meningen? En opsparing skal bruges til at gøre dig uafhængig af et lønnet arbejde og offentlig støtte. Hvis du ikke bliver uafhængig, så i hvert fald mindre afhængig. Det betyder, at din indkomst kommer fra renteindtægt, udbytte, lejeindtægt, overskud fra en virksomhed og ligende. For at få denne type af indtægt skal der bruges penge på at købe aktiver som fast ejendom, aktier og obligationer. Eller du skal bruge tid på at skabe intellektuel ejendom (fx youtube video, kunst, litteratur, opfindelser) eller opbygge din egen virksomhed. Dette betyder også at du ikke skal have udgifter til fx gæld og at du generelt skal have så få udgifter som muligt. Hvis du vil være økonomisk uafhængig skal du have aktiver. Hvor mange aktiver du skal have, for at være økonomisk uafhængig afhænger af hvor mange udgifter du har og afkastet af dine aktiver? Din opsparing skal altså bruges til at købe aktiver. Dine aktiver giver dig et afkast der afhænger af,

hvor meget du har.

■ **Eksempel 58** Du har sparet 10 000 kr. op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget får du så pr. år?

$$10\,000 \cdot 0,03 = 300$$

Det giver dig 300 kr. om året. ■

300 kr. virker ikke af meget, men hvis du ikke bruger pengene med det samme, men sparer dem op sammen med de 10 000 kr. vil det blive til mange flere penge. For at regne ud hvor mange, bruges kapitalfremskrivningsformlen.

Sætning 18 — Kapitalfremskrivning.

$$K_n = K_0 \cdot (r + 1)^n$$

K_n er kapitalen K_0 vokset til efter n terminer til renten r .

■ **Eksempel 59** Du har sparet 10 000 kr. op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget har du så efter 20 år?

$$10\,000 \cdot (1 + 0,03)^{20} = 18\,061$$

Efter 20 år har du 18 061 kr. . ■

I Maple bruges den finansielle solve. N står for antallet af terminer, der i dette tilfælde er år. $R\%$ er renten i procent og NV er nutidsværdien af de penge du giver for aktivet. Bemærk at NV er negativ fordi du giver penge for det. FV er fremtidsværdien på de 18 061, som er positiv fordi du får pengene.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 20, R% = 3, NV = -10000)

$$FV = 18061.11235$$

■ **Eksempel 60** Du har købt et aktiv til 10 000 kr. og sælger det efter 20 år til 15 000 kr. .

Hvad er aktivet årligt blevet forrentet med?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for r .

$$10\,000 \cdot (1 + r)^{20} = 15\,000$$

Din årlige rente har været 2,05 %. ■

I Maple bruges den finansielle solve. Med $N = 20$ fordi antallet af terminer/år er 20 og $NV = -10\,000$ fordi der indsættes 10 000 kr., som du ikke længere har til rådighed. $FV = 15\,000$ er den værdi som pengene har i fremtiden, dvs. om 20 år.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 20, NV = -10000, FV = 15000)

$$R\% = 2.048015365$$

■ **Eksempel 61** Det bedste aktiv du kan købe giver 10 % i årligt afkast, du skal om 5 år bruge 70 000 kr. .

Hvor meget skal du købe af aktivet for at have 70 000 kr. om 5 år?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for K_0 .

$$K_0 \cdot (1 + 0,1)^5 = 70\,000$$

Du skal købe for 43 465 kr. . ■

I maple bruges den finansielle solve.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 5, FV = 70000, R% = 10)

$$NV = -43464.49261$$

Øvelse 86 Line har indsat 3 000 kr. på en opsparingskonto til 5 % i rente.

a) Hvor meget vil der stå på kontoen efter 3 år?

b) Hvor mange år går der inden der står mindst 5 000 kr. på kontoen?

■ **Eksempel 62** Du har årlige udgifter for 250 000 kr. . Du kan investere i et aktiv der giver 7 % i afkast om året. Hvor meget skal du investere for at det dækker dine udgifter og du er økonomisk uafhængig og ikke behøver anden indkomst?

For at løse opgaven opstilles denne ligning.

$$250\,000 = x \cdot 0,07$$

Ligningen løses og det giver 3,6 mio. kr. . ■

For at have 3,6 mio. kr. at investere skal der spares meget op. Typisk vil det ikke være muligt at gøre dette på én gang, men løbene over flere år. For at regne dette ud anvendes opsparingsannuitet.

Sætning 19 — Opsparingsannuitet.

$$K = y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

K kapital efter at der hver termin n er indbetalt y kr til en fast rente på r .

■ **Eksempel 63** Du spare 500 kr. op om måneden til 0,1 % i månedlig rente (1,2 % i årlig rente). Hvor mange penge vil du have efter 20 år?

De 20 år er 240 måneder.

$$500 \cdot \frac{(1 + 0,001)^{240} - 1}{0,001} = 135\,548$$

Efter 240 måneder hvor der samlet er opsparet 120 000 kr. , vil der på grund af renterne være 135 548 kr. . ■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette. Her er NV 0 fordi der ikke er sparet nogle penge op endnu og PMT er -500 fordi der hver måned skal betales 500 til opsparingen.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 240, R% = .1, PMT = -500, NV = 0)

$$FV = 135548.3555$$

Grunden til at det er en stor fordel at blive økonomisk uafhængig er, at alle når til et tidspunkt hvor det ikke er muligt eller behageligt at arbejde fordi man er nedslidt mentalt eller fysisk, eller fordi ens arbejde er blevet automatiseret og man har ikke energi til at uddanne sig til et nyt arbejde. Et arbejdsliv er normalt mellem 25 og 65 år. I eksemplet er det 40 år. Dette giver 480 måneder.

■ **Eksempel 64** Hvor stor bliver en opsparing med en årlig rente på 5 %, og en månedlig opsparing på 2 500 kr.?

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{Årlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{månedlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0,05} - 1 = 0,00407$$

Nu kan den samlede opsparing udregnes

$$500 \cdot \frac{(1 + 0,00407)^{480} - 1}{0,00407} = 3,7 \text{ mio.}$$

■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 480, R% = 0.407, PMT = -2500, NV = 0)

$$FV = 3701550.265$$

Øvelse 87 Agnetes forældre lavede en børneopsparing til hende da hun blev født. De indsætter 3 000 kr. hvert år og hun kan hæve pengene når hun bliver 18 år.

- a) Hvor mange penge kan Agnete hæve, hvis banken giver 3 % i rente?
- b) Hvor mange af pengene er renter?
- c) Efter 8 år beslutter Agnetes forældre, at de vil investere pengene i stede for at få 3 % i rente. Ved den nye investering får de 5 % i rente. Hvor meget kan Agnete hæve mere end hvis forældrene ikke havde investeret pengene i aktier?

En opsparing på 2 500 kr. , kan virke meget stor, hvis indkomsten kun er 4 500 kr. Derfor vil en typisk person opspare mere senere i livet, hvor indkomsten typisk er større, og mindre i starten hvor indkomsten er lille. Dette gør at beregningen ikke er helt så simpel.

Øvelse 88 Med baggrund i statistikbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en typisk person vil spare op og med udgangspunkt i en rente på 5 % udregne hvad den samlede opsparing vil blive.

- a) Find statistik på den gennemsnitlige indkomst i aldersgrupper i statistikbanken.
- b) Antag af personen kan opspare 15% af den del af indkomsten der er over 200 000 kr. . Bestem hvor stor opsparingen vil være i de forskellige aldersgrupper. Brug opsparingsannuitetsformlen med udgangspunkt på 0 i hver aldersgruppe. Antag at renten er 5 % om året.
- c) Antag at personen arbejder til hun er 65 år. Brug kapitalfremskrivning til at beregne hvad opsparingen i hver aldersgruppe er når personen er 65 år. Antag at renten er 5 % om året.
- d) Hvilken aldersgruppe har bidraget mest til den samlede opsparing?
- e) Hvad er den samlede opsparing?

- f) Lav en model i dit IT-værktøj, hvor du kan ændre på parametrene: Alder for økonomisk uafhængighed, årlig rente, den procentvise andel af indkomsten der spares op.
- g) Benyt modellen til at lave en opsparing der giver en alder for økonomisk uafhængighed på 50 år.

Ofte vil du i løbet af dit liv optage et større lån til et hus og bil. Sådan et lån vil du ikke kunne tilbagebetale på én gang, sådan som du ellers gør når du låner af dine venner eller familie. Real-kreditforeningen eller instituttet vil også kræve renter og gebyrer i den periode, hvor du skylder dem penge. For at lave en udregning af, hvad du skal betale løbene, og hvor meget du endnu skylder bruges gældsannuitetsformlen.

Sætning 20 — Gældsannuitet.

$$H = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y (ydelsen) i kr. er hvor meget der skal indbetales hver termin, n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r .

■ **Eksempel 65** Du har lånt 1,5 mio. kr. til et hus til en rente på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlig afdrag.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0,03} - 1 = 0,002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen der skal løses for at svare på spørgsmålet er altså

$$1\,500\,000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0,002466)^{-360}}{0,002466}$$

Det giver et månedlig afdrag på 6 292 kr. . Hertil kommer sikkert nogle forskellige gebyrer og bidrag. ■

I maple bruges den finansielle solve. Bemærk at ydelsen er negativ fordi det er penge du skal betale, mens hovedstolen er positiv fordi det er penge du »får«.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 360, R% = 0.2466, NV = 1500000, FV = 0)

$$PMT = -6291.101719$$

Det er også muligt at vende problemstillingen.

Øvelse 89 Du har lånt 1,9 mio. kr. til et hus til en rente på 2,5 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlige afdrag.

■ **Eksempel 66** Du har i dit budget plads til at afdrage 5 000 kr. til et hus og renten er på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0,03} - 1 = 0,002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$H = 5\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,002466)^{-360}}{0,002466}$$

Det giver et samlet beløb på ca. 1,2 mio. kr. ■

Med Maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(PMT = -5000, R% = 0.2466, N = 360, FV = 0)

$$NV = 1192160.028$$

Øvelse 90 Du har i dit budget plads til at afdrage 8 000 kr. til et hus og renten er på 4 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Eller du kan se på det efter du har lånt pengene og sidder med den månedlig regning.

■ **Eksempel 67** Du har lånt 2,5 mio. til dit hus og betaler 8 500 kr. i afdrag hver måned og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem den månedlige effektive/faktiske rente.

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$2\,500\,000 = 8\,500 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-360}}{r}$$

Det giver en månedlig rente på 0,00116. Denne rente kan omregnes til en årlig rente med formlen

$$r_{\text{årlig}} = (r_{\text{månedlig}} + 1)^{12} - 1$$

$$r_{\text{årlig}} = (0,00116 + 1)^{12} - 1 = 0,014$$

Den årlige rente er 1,4 %. ■

Med maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver. Den fremtidige værdi FV er 0 fordi lånet er betalt tilbage.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(NV = 2500000, N = 360, FV = 0, PMT = -8500)

$$R\% = 0.1160672092$$

Øvelse 91 Du vil købe en bil til 300 000 kr. og får et tilbud på lån, hvor du skal betale 5 000 kr. hver måned i 7 år.

- Hvad kommer bilen til at koste dig samlet over de 7 år?
- Hvad er dine månedlige omkostninger i procent?
- Din månedlige rente er 0,75 %. Hvad betaler du i gebyr pr. måned?
- Hvad er dine årlige omkostninger i procent (ÅOP)?

Fordi du er blevet fyret fra dit job kan det være, at banker bliver nødt til at lave en ny tilbagebetalingplan på lånet til dit hus.

■ **Eksempel 68** Du har en restgæld (ny hovedstol) på 0,7 mio. og betaler 8 500 kr. i afdrag hver måned til 5 % i rente. Efter at du er blevet fyret kan du nu kun betale 3 500 kr.

Bestem hvor mange måneder du skal bruge på at betale .

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0,05} - 1 = 0,004074$$

Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$700\,000 = 3\,500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,004074)^{-n}}{0,004074}$$

Det giver 415 måneder. ■

Med maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(PMT = -3500, R% = 0.4074, FV = 0, NV=700000)

$$N = 414.7647670$$

Men et lån kan også være afdragsfrit. Det betyder lidt forenklet at der kun betales renterne i en periode. Ved et lån på 700 000 kr. .

til en rente på 4 % betales der derfor

$$700\,000 \cdot 0,04 = 28\,000$$

Det giver en månedlig betaling på ca. 2 334 kr. ., men der er så heller ikke afdraget på gælden og hovedstolen er derfor 700 000 kr.

I eksemplet er restgælden kendt, og det er fordi det er muligt at udregne den løbende igennem afbetalingen af hele lånet. En sådan tabel kaldes en amortisationstabel. I tabellen er der fem kolonner. Den første kolonne viser hvilken termin der er tale om og den næste viser hvilken ydelse der er på lånet, det vil sige hvor meget låntager (dig) i alt betaler til långiver (banken). Den næste viser renterne der skal betales i denne termin. Den næste viser afdraget på hovedstolen og den sidste viser restgælden.

For at kunne udregne tallene i amortisationstabellen skal fire værdier være kendt: Hovedstolen, renten, ydelsen og antallet af terminer. Som det ses af formlen

$$H = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y (ydelsen) i kr. er hvor meget der skal indbetales hver termin, n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r . Det er kun nødvendigt at kende tre af disse for at kunne beregne den sidste. Ofte er det hovedstolen, renten og antallet af terminer der er kendt.

Hovedstol	1 700 000 kr.
Antal terminer	360
Årlig rente	2,5 %

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0,025} - 1 = 0,00206$$

Tallene kan nu indsættes i formlen og ydelsen beregnes.

$$1\,700\,000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0,00206)^{-360}}{0,00206} = 6692.159691$$

Ydelsen bliver så 6 693, da det er mest praktisk af runde op. Det betyder, at den sidste termin bliver lidt mindre end de andre.

Renten udregnes ved at tage den månedlige rente af restgælden

$$\text{Rente} = 1\,700\,000 \cdot 0,00206 = 3\,502$$

Afdraget er ydelsen minus renten

$$\text{Afdrag} = \text{Ydelse} - \text{Rente}$$

$$\text{Afdrag} = 6\,693 - 3\,502 = 3\,191$$

Den nye restgæld er den gamle restgæld minus afdraget.

$$1\,700\,000 - 3\,191 = 1\,696\,809$$

Termin	Ydelse	Rente	Afdrag	Restgæld
0	-	-	-	1 700 000,00
1	6 693	3 502,00	3 191,00	1 696 809,00
2	6 693	3 495,43	3 197,57	1 693 611,42
3	6 693	3 488,84	3 204,16	1 690 407,27
4	6 693	3 482,24	3 210,76	1 687 196,51
5	6 693	3 475,62	3 217,38	1 683 979,13
⋮				
356	6 693	67,79	6 625,21	26 282,33
357	6 693	54,14	6 638,86	19 643,47
358	6 693	40,47	6 652,53	12 990,94
359	6 693	26,76	6 666,24	6 324,70
360	6 337,73	13,03	6 324,70	0

I Maple kan amortisationstabellen skrives med brug af kommandoerne `renteAmort`, `afdragAmort` og `balanceAmort`. I alle kommandoerne skal hovedstolen, ydelsen, renten i % og terminnummeret bruges. For at vise alle terminer laves en sekvens, hvor alle terminer udregnes ved at lade n gå fra 1 til 360. Grunden til at latex er med, er for at få Maple til at lave en linje pr. linje i tabellen og n og 6693 er kun med for at de skal passe med tabellen ovenfor.

Maple : Amortisationstabel.

```
with(Gym):
seq(latex([n, 6693,
renteAmort(1700000, 6693, .206, n),
afdragAmort(1700000, 6693, .206, n),
balanceAmort(1700000, 6693, .206, n)
]), n = 1 .. 360)
```

Som du sikkert kan fornemme, er der ikke tale om en simpel situation, fordi der ofte i en 30-årig periode kan ske større ting i ens liv, der gør at sådanne lån ikke bliver afviklet efter bogen. Det kan være flytning, arbejdsløshed, skilsmisse, børn og lignende. Derfor er det vigtigt hele tiden at kende den aktuelle restgæld, eller i det mindste at kunne beregne den.

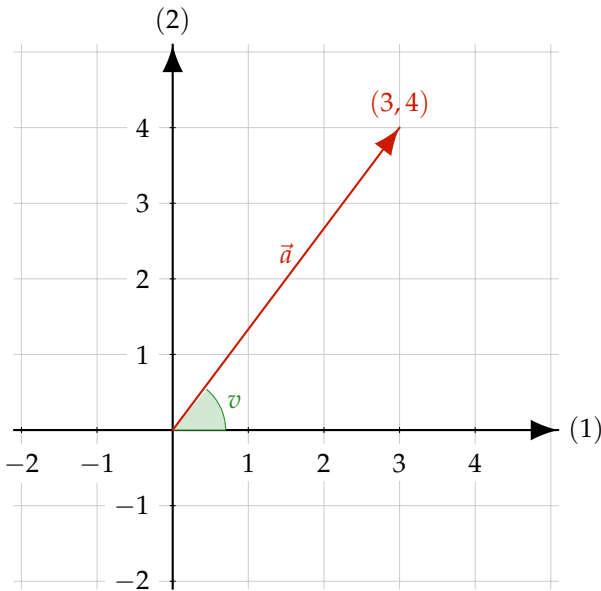
Øvelse 92 Med baggrund i statistikbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en gennemsnitsperson vil kunne låne med udgangspunkt i en rente på 5 %.

- a) Antag af personen kan bruge 30% af den del af indkomsten der er over 150 000 kr. . til afbetaling på et lån. Bestem hvor stor et lån der kan optages i de forskellige aldersgrupper.
- b) Hvordan vil afbetalingen af et lån på 3,5 mio. forløbe for en gennemsnitsperson?

6

Vektorer

En vektor er en størrelse med retning. Geometrisk angives vektorer som pile, hvor længden af pilen er størrelsen på vektoren og retningen er vektorens retning i et koordinatsystem i forhold til vinklen mellem vektoren og 1. aksen.



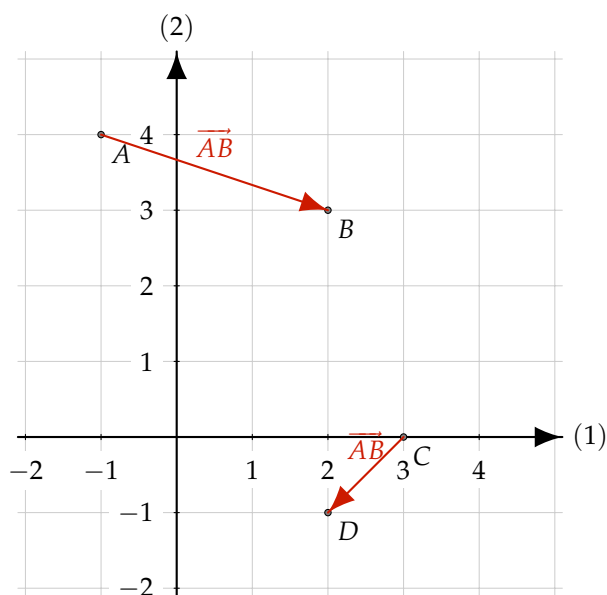
Aritmetisk angives de med koordinatsæt. En vektor består af lige så mange komponenter som der er dimensioner i det rum vektoren er i. Det betyder at der er to komponenter a_x og a_y for en vektor i to dimensioner. Vektoren og komponenterne i vektoren skrives ofte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ eller } \vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$ for, at det er muligt at se forskel på en vektor og et punkt, der angives som $(3, 4)$.

Vektorer bruges især til to ting. For det første bruges vektorer til at repræsentere forskellige fysiske størrelser, fx trækraft eller tyngdekraft eller vind. Det væsentlige er, at det vektorer kan beskrive skal ikke 'bare' være en størrelse, som fx at det blæser med 2 m/sek. at der er 40 kr på min konto eller at der er en elektrisk strøm på 25 volt eller tyngdekraften er på 9,43 N osv. Udover at der skal være tale om en størrelse, skal der også være tale om en retning, så vinden blæser med 2 sek/m fra NNV (Nord-nord-vest) eller tyngdekraften trækker i retning mod Jorden også kaldet ned. De 40 kr. på min konto har ikke nogen retning, saldoen kan godt ændre sig, men i sig selv har saldoen ingen retning.

En vektor kan defineres ud fra to punkter. Punkterne A, B, C og D , kan bruges til at definere



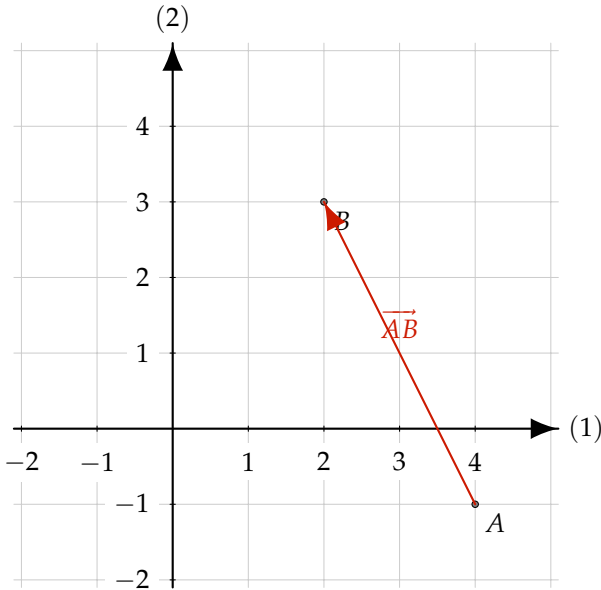
En vektor navngives med deres endepunkter fx $\vec{AB}, \vec{CD}$. En vektor er den korteste afstand mellem de to punkter.

En vektor kan defineres ud fra to punkter.

Definition 18 — Vektor mellem to punkter. En vektor fra $A(A_x, A_y)$ til $B(B_x, B_y)$ har følgende komponenter

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix}$$

■ **Eksempel 69** En vektor $\overrightarrow{AB}$ fra $A(4, -1)$ til $B(2, 3)$.



Vektor $\overrightarrow{AB}$ er

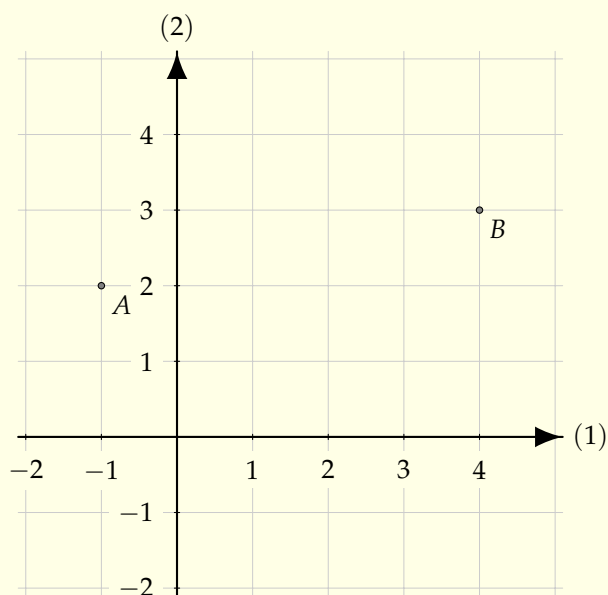
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

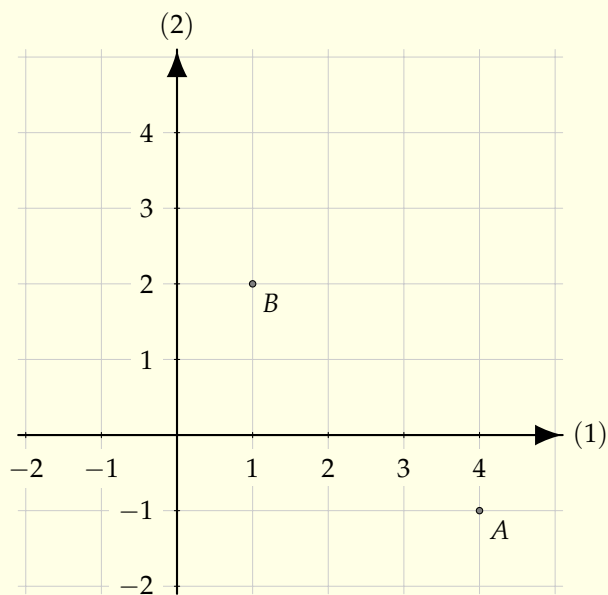
Øvelse 93 Bestem en vektor fra punktet A til B .

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $A(2, 4)$ til $B(-3, 2)$ | b) $A(-2, 2)$ til $B(3, -3)$ |
| c) $A(0, 1)$ til $B(1, -5)$ | d) $A(-3, 10)$ til $B(-4, 8)$ |

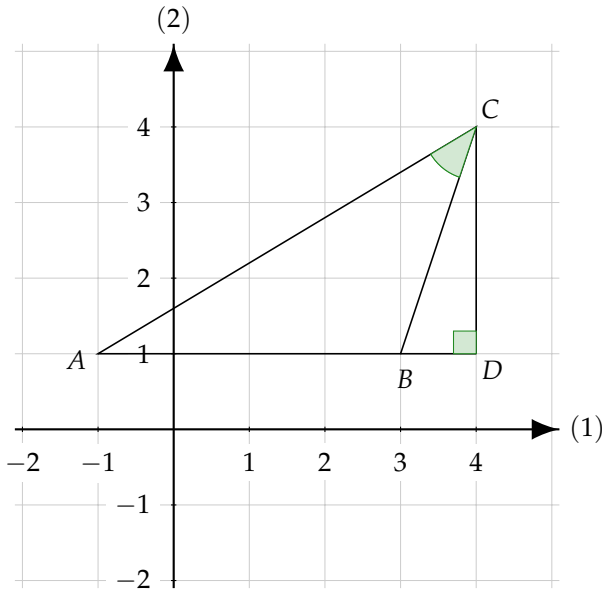
Øvelse 94 Bestem en vektor fra A til B .



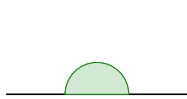
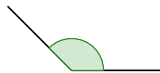
Øvelse 95 Bestem en vektor fra A til B .



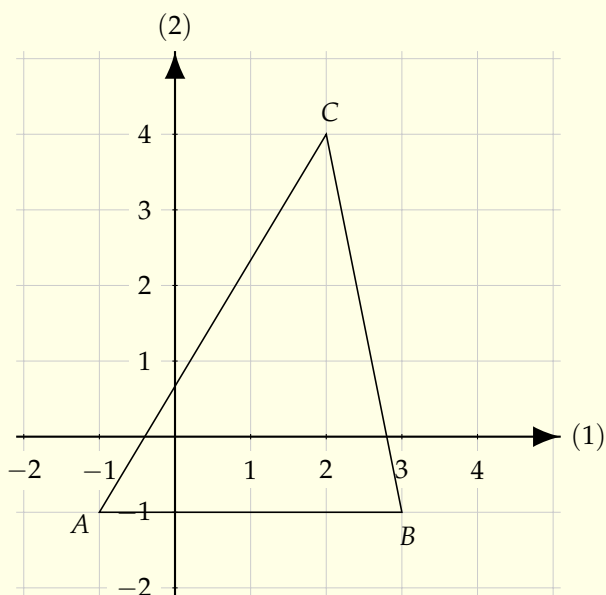
Vinklerne i en polygon navngives efter de punkter vinkelspidsen ligger i, her C. Hvis der er tvivl om hvilken der er tale om, navngives vinklen med de tre punkter der skaber vinklen med den aktuelle vinkel i midten, her vinkel ACB .



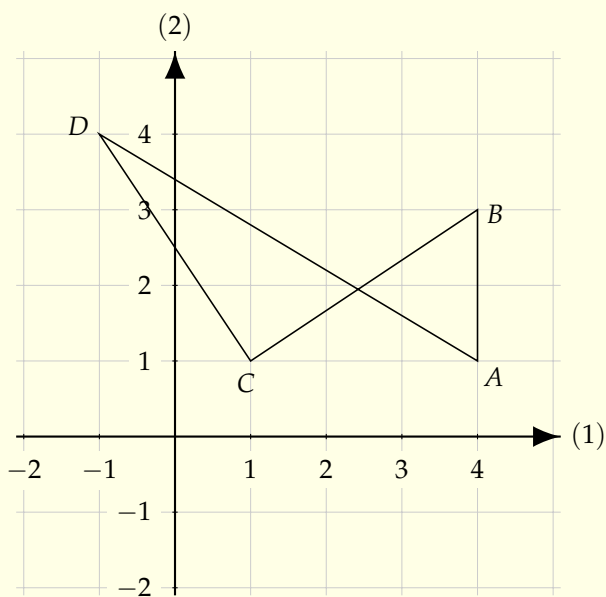
En vinkel er en brøkdelen af en cirkel, en vinkel måles i grader, en hel cirkel har 360° . Vinkler inddeles i fire typer.

Lige vinkel 180° Ret vinkel 90° Spids vinkel $< 90^\circ$ Stump vinkel $> 90^\circ$

Øvelse 96 Bestem de tre vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.



Øvelse 97 Bestem vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.

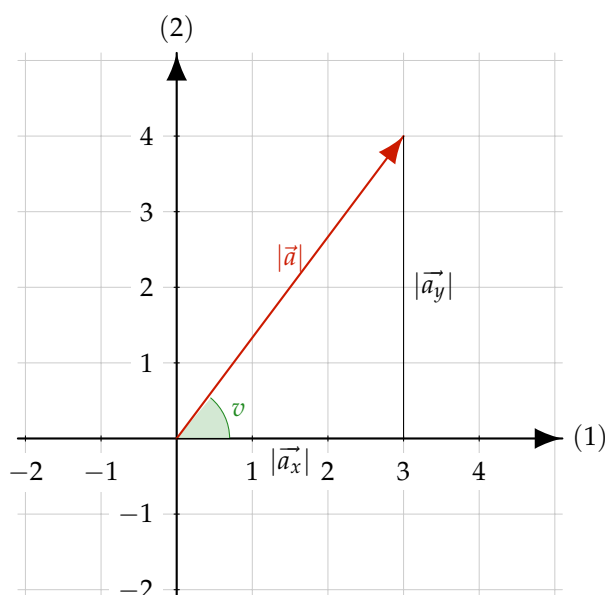


6.1 Længden af en vektor

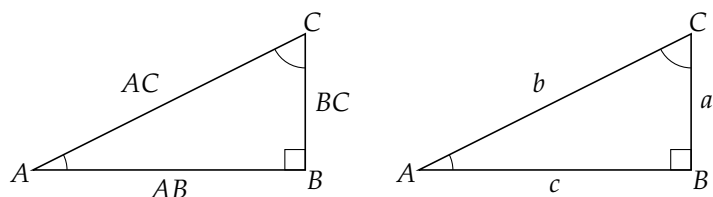
Længden af en vektor $\vec{AB}$ skrives $|\vec{AB}|$. Længden af en vektor kan bestemmes ved at se på den retvinklede trekant, hvor længden af vektoren er længden af hypotenusen. Længden af kateterne i den retvinklede trekant, er længden af vektorens x og y komponent $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$.



Video der gennemgår definition og længde af en vektor.



Den retvinklede trekant er en trekant med én ret vinkel. Den rette vinkel markeres med en $\square$ som markeringen af vinklen. Vinkler der ikke er rette, markeres med en cirkelbue. Trekanten navngives efter de tre punkter, fx trekant ABC eller $\triangle ABC$. Siderne i trekanten navngives efter endepunkterne på siderne eller efter det modstående punkt, men med lille bogstav så der ikke opstår forvirring om punkter og sider. Det lille bogstav kan betyde længden af siden eller være navnet på siden.



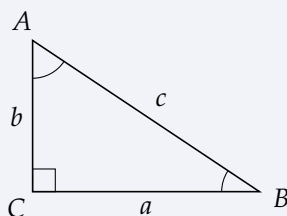
Nu ses der på nogle af reglerne for en retvinklet trekant. Vi skal se på Pythagoras' sætning, beregning af areal og forholds-
beregning. Til sidst defineres sinus og cosinus, som bruges til at
beregne vinkler og længden af sider i den retvinklede trekant. Den
retvinklede trekant er udgangspunktet for udregninger i vilkårlige
trekanter.



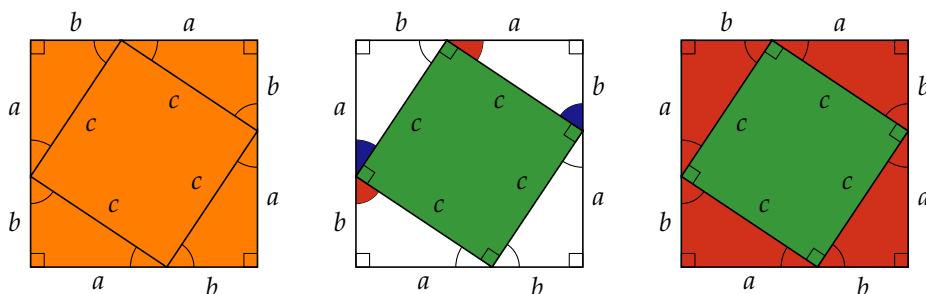
Bevis for Pythagoras' sætning

Sætning 21 — Pythagoras sætning. For en retvinklet trekant ABC
hvor vinkel C er ret vil

$$c^2 = a^2 + b^2$$



■ **Bevis** I beviset bruges følgende figurer.



Firkanten markeret med orange er et kvadrat, fordi det har fire

rette vinkler og de fire sider er lige lange $(a + b)$. Derfor vil arealet af dette kvadrat være

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

Fordi vinkelsummen i en trekant er 180° , og den rette vinkel er 90° , er summen af de to resterende vinkler i hver trekant 90° . Det betyder, at summen af to vinkler der ligger overfor hinanden også er 90° . Det betyder, at vinklen i den lille firkant er 90° . Den lille firkant markeret med grønt, er altså et kvadrat. Da sidelængden i det lille kvadrat c , er arealet

$$c^2$$

Summen af arealet af de **fire trekanter** og **det lille kvadrat** er

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2 = 2ab + c^2$$

Dette areal er det samme som arealet af det store kvadrat, derfor er

$$2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

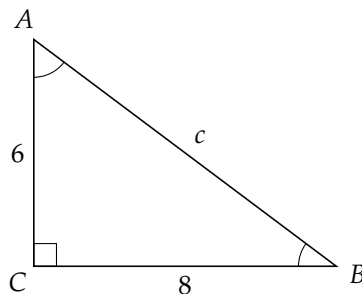
Det kan reduceres til

$$c^2 = a^2 + b^2$$

■

■ **Eksempel 70** I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af b er 6 og længden af a er 8.

Bestem længden af c .



$$c^2 = 6^2 + 8^2$$

$$c^2 = 36 + 64$$

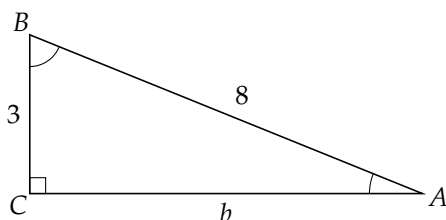
$$c^2 = 100$$

$$c = \pm 10$$

Den negative løsning er ikke mulig, da længder er positive. Længden af c er derfor 10. ■

■ **Eksempel 71** I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af c er 8 og længden af a er 3.

Bestem længden af b .



Oplysninger fra opgaven indsættes i Pythagoras' sætning

$$8^2 = 3^2 + b^2$$

$$64 = 9 + b^2$$

$$64 - 9 = b^2$$

$$55 = b^2$$

$$b = \pm\sqrt{55}$$

Da den negative løsning ikke er mulig, da længder er positive, er $b = \sqrt{55}$. ■

Nu kan størrelsen af en vektor bestemmes, ved Pythagoras' sætning.

Sætning 22 Størrelsen eller længden af en vektor kan beregnes med formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne i $\vec{a}$.



Video med eksempler på anvendelse af Pythagoras sætning.

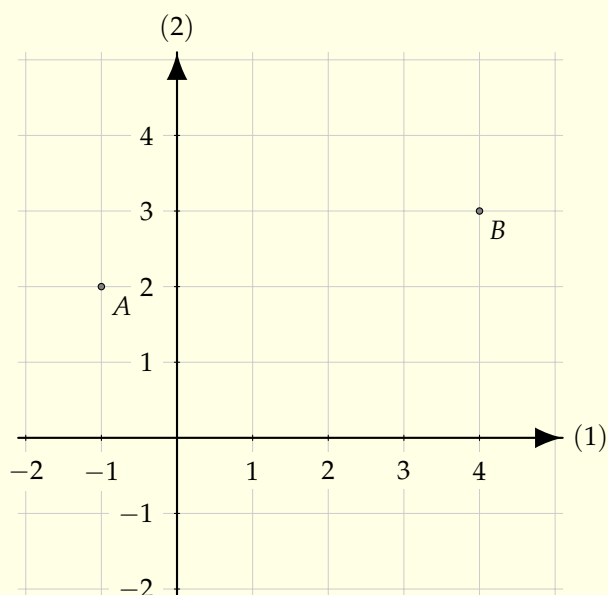


Opgaver hvor Pythagoras sætning skal anvendes.

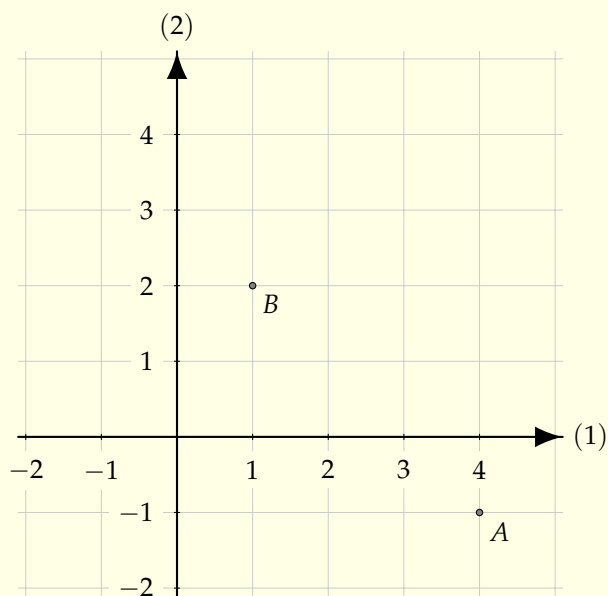


Video med eksempel på beregning af længden af en vektor og bestemmelse af en parameter i en vektor så længden af vektoren har en given længde.

Øvelse 98 Bestem længden af en vektor fra A til B .



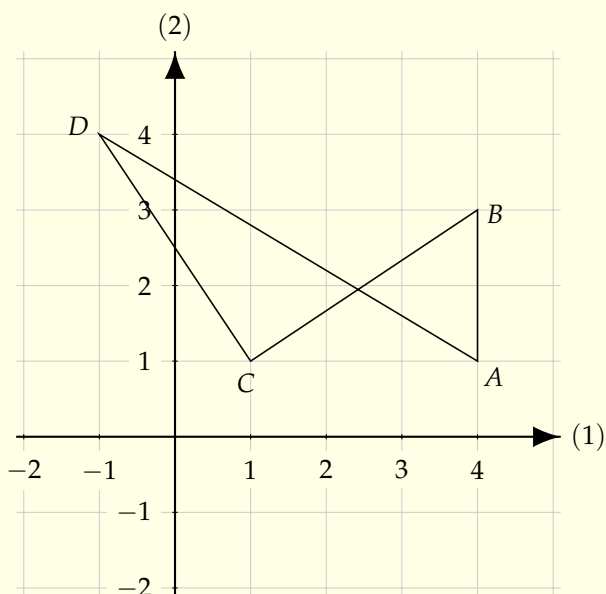
Øvelse 99 Bestem længden af en vektor fra A til B .



Øvelse 100 Bestem længden af en vektor fra punktet A til B .

- a) $A(2, 4)$ til $B(-3, 2)$ b) $A(-2, 2)$ til $B(3, -3)$
c) $A(0, 1)$ til $B(1, -5)$ d) $A(-3, 10)$ til $B(-4, 8)$

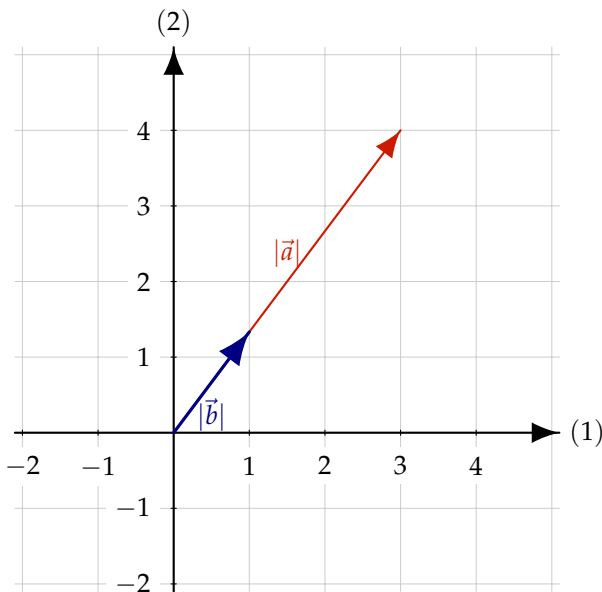
Øvelse 101 Bestem længden af vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.



6.2 Vektor aritmetik

En størrelse som ikke har en retning og derved er repræsenteret ved et enkelt tal kaldes en skalar. To vektorer der har samme retning¹ men ikke samme længde, er proportionale og proportionalitetsfaktoren er en skalar.

¹ parallelle vektorer

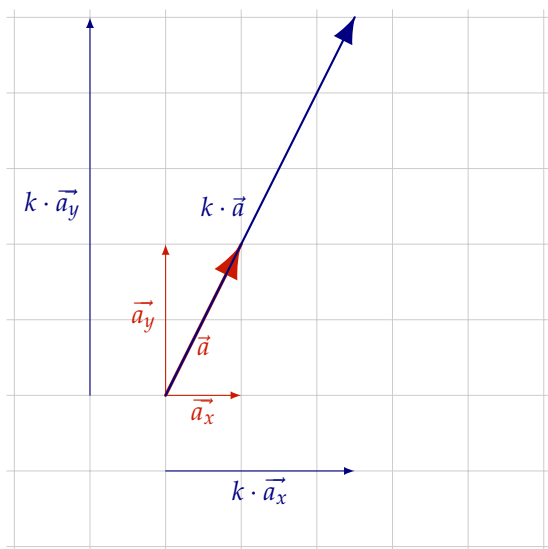


Definition 19 — Skalar multiplikation. En skalar multipliceres på en vektor på følgende måde.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$



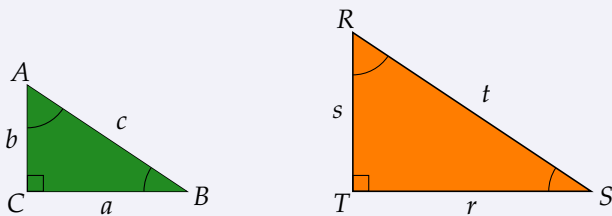
Video hvor skalarmultiplikation, vektor addition, subtraktion og determinant gennemgås.



Det er derfor muligt at beregne en vektors x og y komponenter, hvis en vektor med samme retning er kendt. For at undersøge dette ses igen på retvinklede trekanter.

Definition 20 To trekanter kaldes ensvinklede, hvis alle deres vinkler er parvis ens.

Sætning 23 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede retvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F .



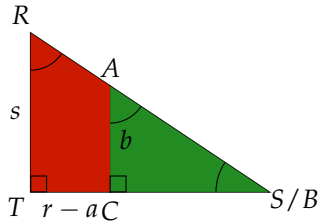
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

■ **Bevis** Arealet af trekant ABC er

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

og arealet af trekant RST er

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r$$



Arealet af trapezen $ACTR$ er

$$\frac{s+b}{2} \cdot (r-a)$$

Arealet af trekant RST er også summen af den lille trekant (grøn) og trapezen (rød) $ACTR$.

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r = \frac{s+b}{2} \cdot (r-a) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Ved at gange med 2, kan det reduceres til

$$s \cdot r = (s+b) \cdot (r-a) + a \cdot b$$

Ved at gange de to parenteser ud, kan det omskrives til

$$s \cdot r = s \cdot r - s \cdot a + b \cdot r - a \cdot b + a \cdot b$$

Her går $a \cdot b$ og $s \cdot r$ ud

$$0 = -s \cdot a + b \cdot r$$

$s \cdot a$ lægges til

$$s \cdot a = b \cdot r$$

Der divideres med $s \cdot r$

$$\frac{s \cdot a}{s \cdot r} = \frac{b \cdot r}{s \cdot r}$$

Brøkerne forkortes

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$$

Dette beviser den første del af sætningen. For at vise den anden del anvendes Pythagoras' sætning. For trekant ABC gælder at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ved at gange med s^2 , bliver det til

$$a^2 \cdot s^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

Vi har lige vist at $s \cdot a = b \cdot r$ og så vil $a^2 \cdot s^2 = b^2 \cdot r^2$.

$$b^2 \cdot r^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

b^2 kan sættes udenfor parentes på venstre side.

$$b^2 \cdot (r^2 + s^2) = c^2 \cdot s^2$$

Det følger af Pythagoras' sætning, at $r^2 + s^2 = t^2$.

$$b^2 \cdot t^2 = c^2 \cdot s^2$$

Da alle størrelser er positive, kan dette omskrives til

$$b \cdot t = c \cdot s$$

Der divideres med $t \cdot s$

$$\frac{b \cdot t}{t \cdot s} = \frac{c \cdot s}{t \cdot s}$$

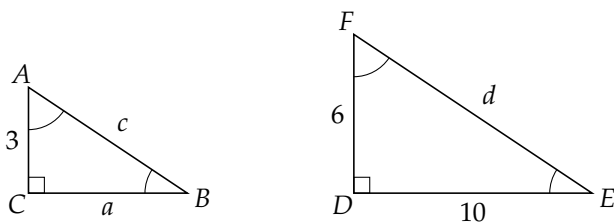
Brøkerne forkortes

$$\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$$

Dette beviser den anden del af sætningen. ■

■ **Eksempel 72** De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem længden af a .



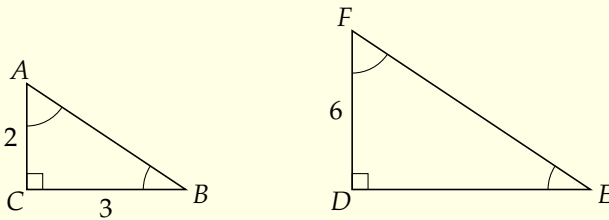
Forholdet mellem de to trekanter er $\frac{3}{6}$, det betyder at

$$a = \frac{3}{6} \cdot 10 = 5$$

■

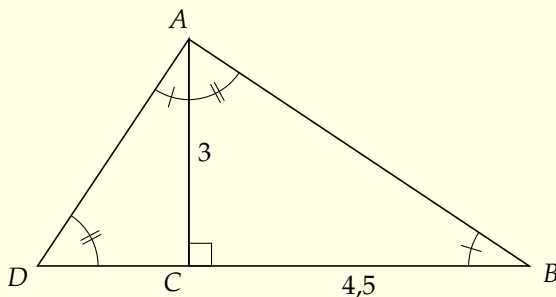
Øvelse 102 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|DE|$.



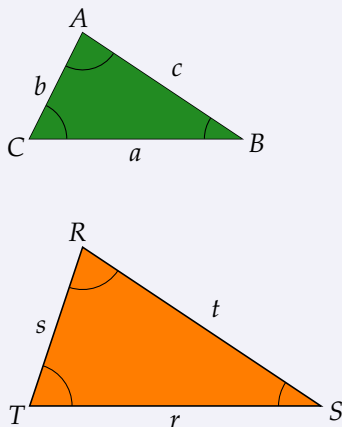
Øvelse 103 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|CD|$.



Størrelsesforhold er ikke kun konstant for retvinklede trekanter, det gælder også for trekanter der ikke er retvinklede.

Sætning 24 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F .



$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

Definition 21 — Determinant. Determinanten $\det(\vec{a}, \vec{b})$ mellem to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ er

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Sætning 25 To vektorer er parallelle hvis og kun hvis deres determinant er 0.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

■ **Bevis** To vektorer, der er forskellige fra nul-vektoren $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$, er parallelle hvis og kun hvis $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}) &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \\ &= a_x \cdot k \cdot a_y - a_y \cdot k \cdot a_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definition 21

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$



Video med eksempel på afgørelse af om to vektorer er parallelle og bestemmelse af en parameter så to vektorer bliver parallelle.

■ **Eksempel 73** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle -3, 5 \rangle$$

Bestem determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22$$

■

■ **Eksempel 74** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, t \rangle \quad \vec{b} = \langle 1, 5 \rangle$$

Bestem værdien af t der gør $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

Først bestemmes determinanten

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - t \cdot 1 = 10 - t$$

Hvis de to vektorer skal være parallelle skal determinanten være 0.

$$0 = 10 - t$$

$$t = 10$$

Når $t = 10$ er de to vektorer parallelle.

■

Øvelse 104 Bestem determinanten for de to vektorer.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 0, 5 \rangle$.



Øvelse 105 Bestem værdien af t så de to vektorer er parallelle.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, t \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle t, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 5 \rangle$.

For at undersøge vinklen mellem 1. aksen og en vektor bruges sinus og cosinus

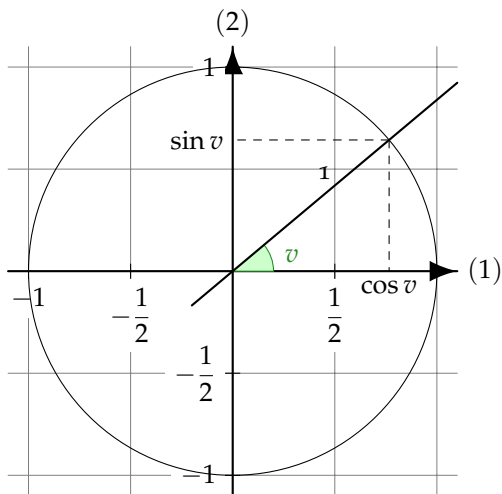
Sinus og cosinus er defineret ud fra enhedscirklen. Enhedscirklen er en cirkel med radius 1 og med centrum i $(0,0)$.

Opgaver hvor værdien af t skal bestemmes så de to vektorer er parallelle.



Definition af sinus og cosinus

Definition 22 Sinus til en vinkel, v , er defineret som y -koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linje som skærer x -aksen i $(0,0)$ og danner vinklen v med x -aksen.



Definition 23 Cosinus til en vinkel, v , er defineret som x -koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linje som skærer x -aksen i $(0,0)$ og danner vinklen v med x -aksen.

Sætning 26 For alle vinkler v gælder at

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

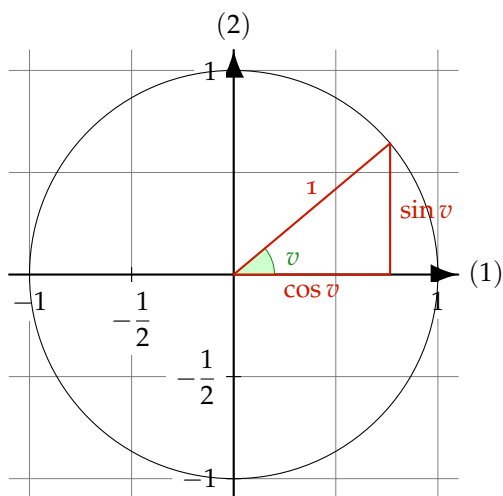
■ **Bevis** Ved at bruge Pythagoras sætning på trekanten markeret med rødt fås

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1^2$$

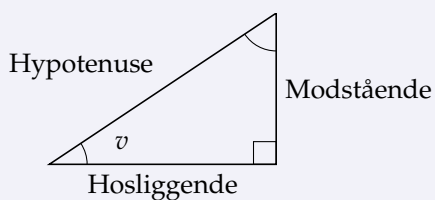
Da $1^2 = 1$

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

■



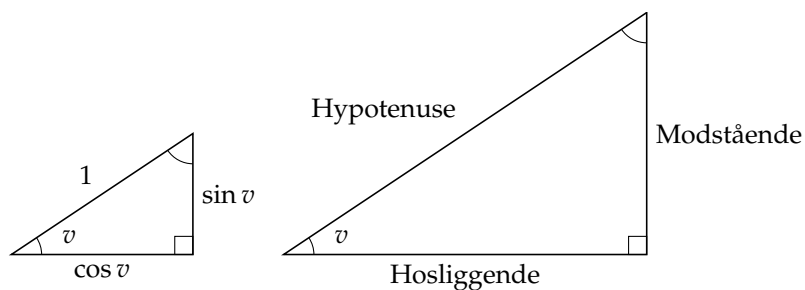
Definitionen af sinus og cosinus kan udvides til alle retvinklede trekanter ved at bruge forholdsregning.



Sætning 27

For den retvinklede trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



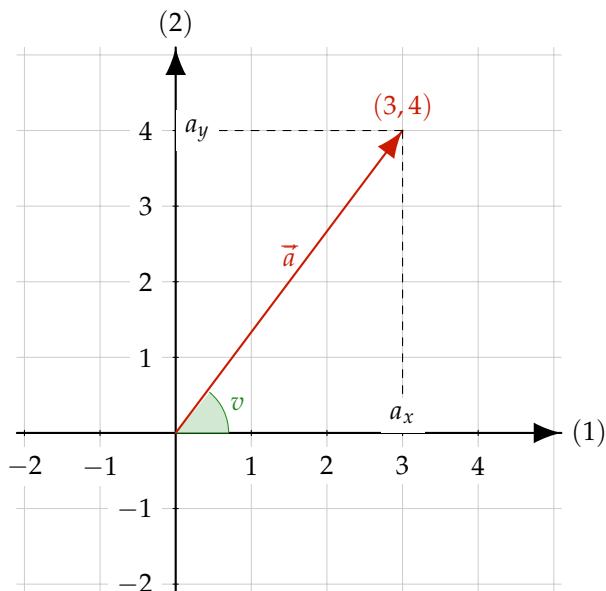
Forholdet mellem siderne i de to trekanter er

$$\frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

Ved at se på forholdene to og to kommer følgende ligninger hvor $\sin$ og $\cos$ kan isoleres.

$$\text{Hypotenuse} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} \text{ og } \text{Hypotenuse} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

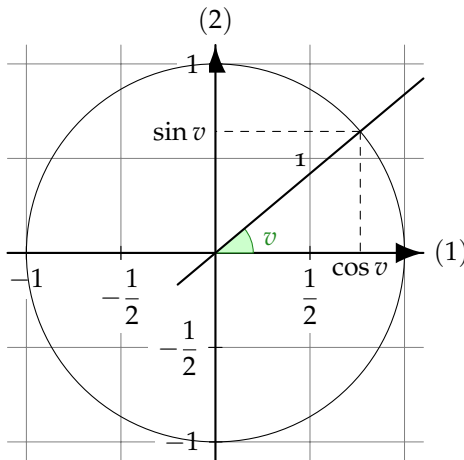
$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



Forholdet mellem vinklen v , og størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$, ses på enhedscirklen

$$\vec{a}_x = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$$

$$\vec{a}_y = |\vec{a}| \cdot \sin(v)$$



- **Eksempel 75** Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle$ og 1. akse.
Først bestemmes længden af vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Nu kan vinklen bestemmes med ligningen $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$, hvor v isoleres.

$$v = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = 53,13^\circ$$

■

- **Eksempel 76** Vinklen mellem en vektor $\vec{a} = \langle t, 4 \rangle$ og 1. akse er 30° .

Bestem værdien af t .

Først anvendes ligningen $a_y = |\vec{a}| \cdot \sin(v)$. Ved at indsætte de værdier der er kendt fremkommer følgende ligning.

$$4 = \sqrt{4^2 + t^2} \cdot \sin(30^\circ)$$

Denne ligning løses i et værktøjsprogram og løsningerne til ligningen er $t = 6.928$ og $t = -6.928$.

■

Øvelse 106 Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1. akse.

a) $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, 4 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 0, 1 \rangle$.

d) $\vec{a} = \langle 3, 0 \rangle$.

Øvelse 107 Bestem t så vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1.aksen er 40° .

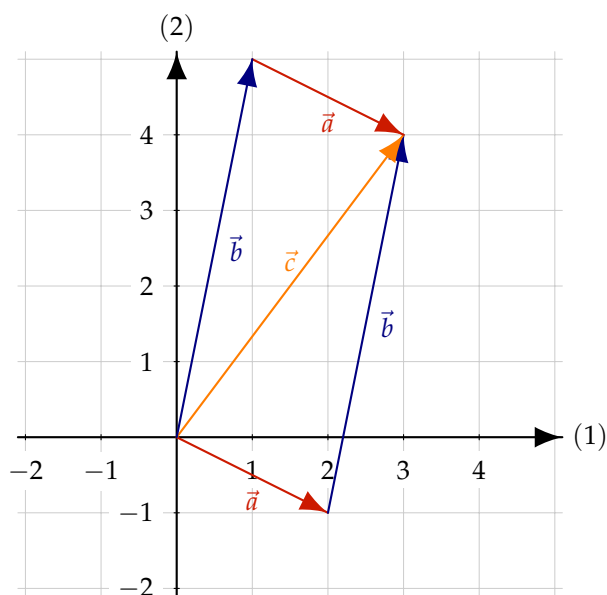
a) $\vec{a} = \langle t, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, t \rangle$.

To vektorer kan lægges sammen og resultatet, kaldes den resulterende vektor.

De to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ lægges sammen og den resulterende vektor bliver $\vec{c}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

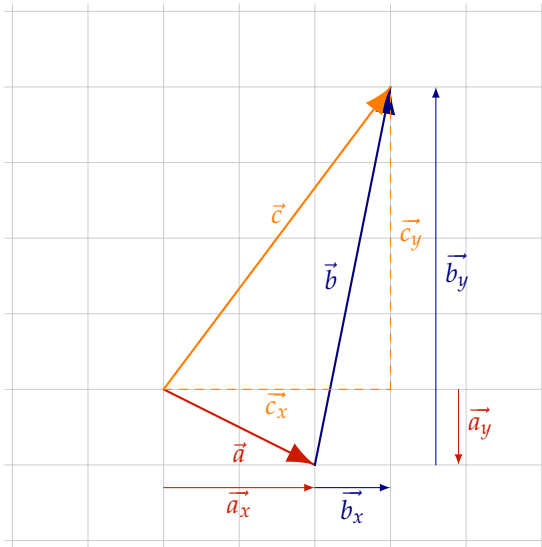


Bemærk at det giver samme resultat, om det er $\vec{a} + \vec{b}$ eller $\vec{b} + \vec{a}$.

Definition 24 — Vektor addition. Summen af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ er summen af størrelsen af hhv. x - og y -komponenterne.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$



Bemærk at $\vec{a}_y$ og $\vec{b}_y$ har modsat fortegn i eksemplet, og derfor peger pilene i hver sin retning.

■ **Eksempel 77** Bestem summen af $\vec{a} = \langle 1, -3 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -5, 7 \rangle$.

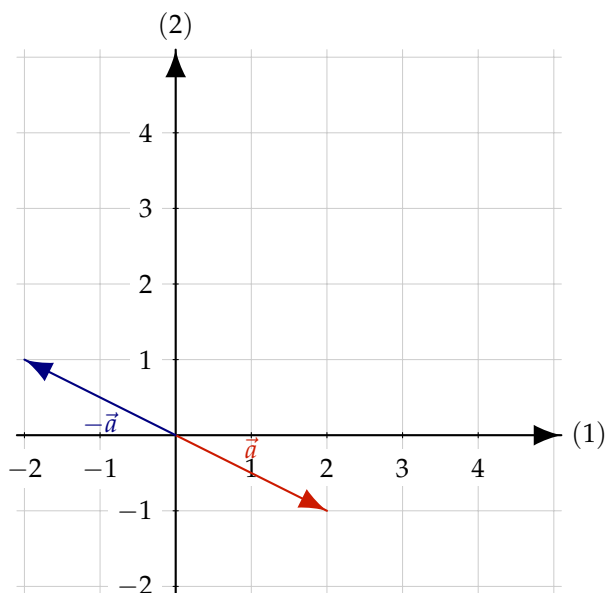
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -3 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

Øvelse 108 Bestem summen af de to vektorer.

- $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$.
- $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.
- $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$.

En vektor som har samme størrelse som $\vec{a}$, men modsat retning betegnes $-\vec{a}$.



Definition 25 — Vektor subtraktion. Ved beregning af $\vec{a} - \vec{b}$ forstås

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$

■ **Eksempel 78** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestem $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 \\ -2 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Øvelse 109 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

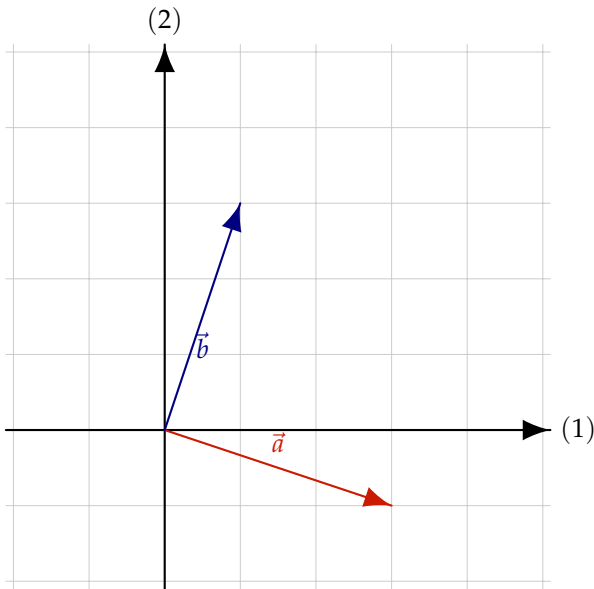
Bestem $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Øvelse 110 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestem $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} - \vec{b}$.

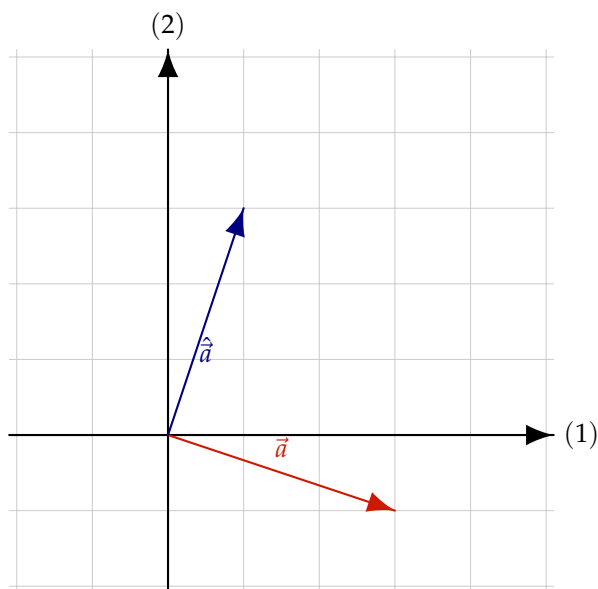
Definition 26 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis vinklen mellem dem er 90° .



En vektor har flere vektorer der er ortogonale til dem, men fælles for dem er, at de alle er proportionale. Det vil sige, at hvis $\vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$, så vil alle ortogonale vektorer til $\vec{a}$ kunne skrives som $k \cdot \vec{b}$ hvor k er en skalar.

Definition 27 En **tværvektor** til en vektor $\vec{a}$ er en vektor som står vinkelret på $\vec{a}$ drejet i mod uret retning. En tværvektor kaldes $\hat{a}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$



Definition 28 — Skalarprodukt. Skalarproduktet mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Sætning 28 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis og kun hvis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

■ **Bevis** To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale hvis og kun hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Deres skalarprodukt er derfor

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot k \cdot (-a_y) + a_y \cdot k \cdot a_x$$



Video med bevis for formler til beregning af vinklen mellem to vektorer.

Ved reduktion fås at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -k \cdot a_x \cdot a_y + k \cdot a_x \cdot a_y$$

Det ses nu tydeligt at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

■ **Eksempel 79** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -t \\ 12 \end{pmatrix}$$

Bestem t så de to vektorer er ortogonale.

Først beregnes deres skalarprodukt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t \cdot (-t) + 3 \cdot 12$$

Skalarproduktet skal være 0 for at vektorerne er ortogonale og derfor er det følgende ligning der skal løses.

$$0 = -2t^2 + 36$$

$t = \sqrt{18}$ og $t = -\sqrt{18}$ er begge løsninger til ligningen. ■

Sætning 29 Vinklen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som ikke er 0, opfylder at

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

■ **Bevis** I følge definitionen af skalarproduktet er

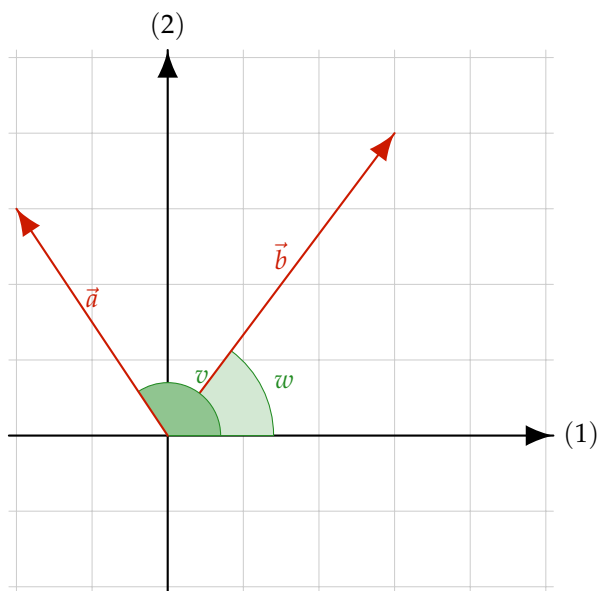
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v \rangle$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

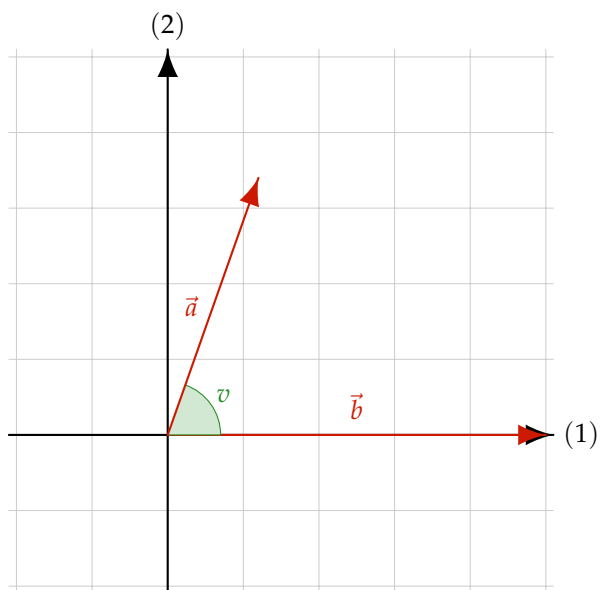
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w$$



Opgaver hvor t skal bestemmes så to vektorer er ortogonale.



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. akse.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0$$

Ved at se på enhedscirklen indses, at $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 1$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

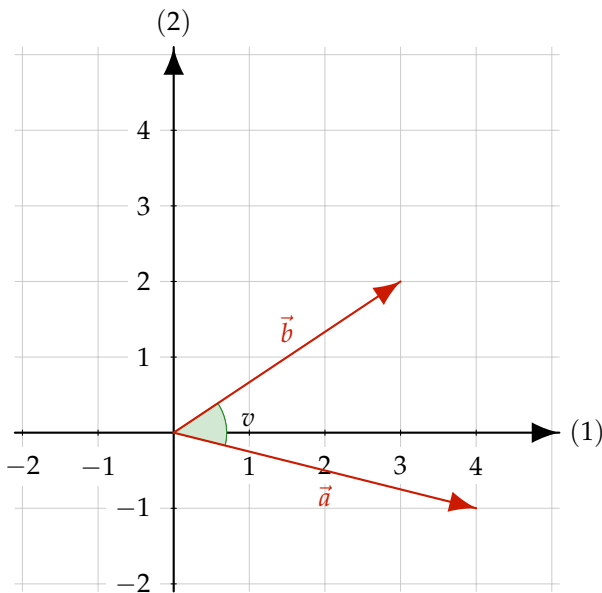
Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

■

■ **Eksempel 80** Bestem vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



For at udregne vinklen bruges formelen

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

Tallene fra de to vektorer indsættes.

$$\frac{4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot |\sqrt{3^2 + 2^2}|} = \cos v$$

Efter udregning giver det

$$\frac{10}{\sqrt{17} \cdot |\sqrt{13}|} = \cos v$$

Ved omregning til decimaltal

$$0,6726727940 = \cos v$$

Det giver en vinkel på $47,7^\circ$. ■

I Maple vil udregningen af vinklen kunne gøres med kommandoen vinkel.

Maple

```
with(Gym):  
vinkel(<4, -1>, <3, 2>)
```

47.72631098

Øvelse 111 Bestem vinklen mellem af de to vektorer.

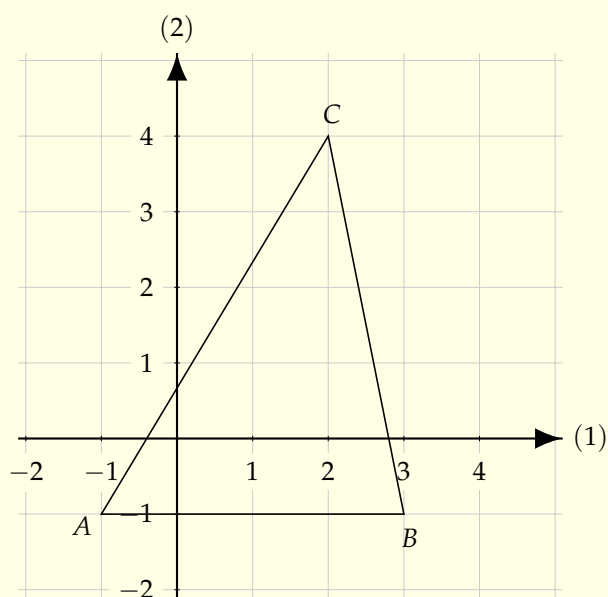
a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

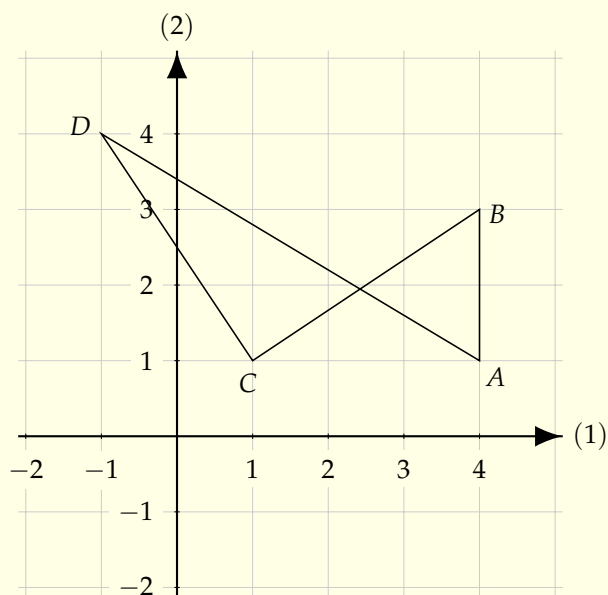
c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$.

d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 0, 5 \rangle$.

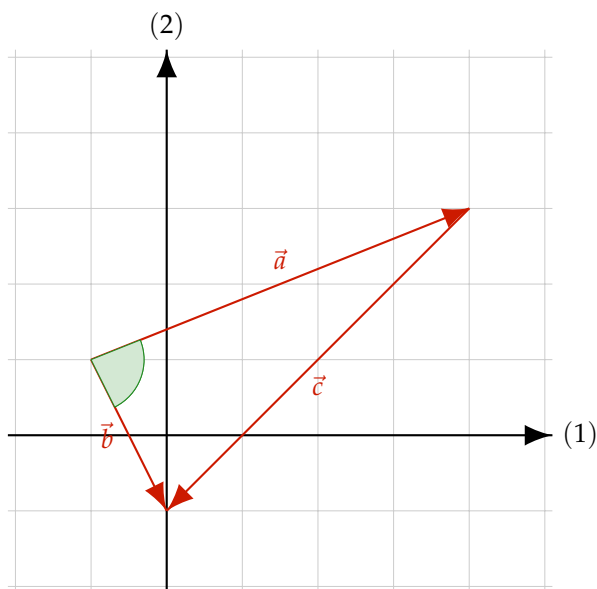
Øvelse 112 Bestem de tre vinkler i figuren.



Øvelse 113 Bestem de seks indre vinkler i figuren.



I nogle tilfælde kendes kun længden af vektorerne. Når sådanne problemstillinger kommer, kan ovenstående formel ikke bruges. Det er nødvendigt med en formel der kun gør brug af længderne af vektorerne. Se på følgende problemstilling. Tre vektorer udgør siderne i en trekant ABC .



Bemærk at

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Ved at kvadrere begge sider fås at

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{c}^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}^2$$

Fra den tidligere sætning haves at $|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{a} \cdot \vec{b}$, dette indsættes i ligningen.

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{c}^2$$

Bemærk at $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Dette kan formuleres i følgende sætning.

Sætning 30 — Cosinusrelationerne. I trekanten ABC hvor a , b og c er længden af de tre sider og A , B og C er de tre vinkler i trekanten, gælder følgende

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

■ **Eksempel 81** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 5$, $|BC| = 7$ og $|AC| = 9$, bestem vinklen mellem siderne AB og BC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos v = 9^2$$

Ved at løse denne ligning fås vinklen til $95,7^\circ$. ■

■ **Eksempel 82** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ og vinklen mellem dem er 40° .

Bestem længden af siden AC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 40^\circ = |AC|^2$$

Ved at udregne dette fås $|AC|$ til 3,9. ■

I Maple kan denne type problemstillinger løses med kommandoen `trekantsolve`

Maple

```
with(Gym):
trekantsolve(c = 6, a = 4, B = 40, "ABC")

{A = 41.21140419, C = 98.78859577, b = 3.902546187}
```

For at løse problemstillinger hvor to vinkler og én side er kendt som dette



Opgaver hvor vinkler i en trekant, hvor tre sider er kendt, skal bestemmes.



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant, hvor to sider og en mellemliggende vinkel er kendt.

Maple

```
with(Gym):
trekantsolve(c = 7, A = 25, B = 40, "ABC");

{C = 115.0000000, a = 3.264153603, b = 4.964663589}
```

bruger Maple følgende sætning.

Sætning 31 For to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ gælder at

$$\frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

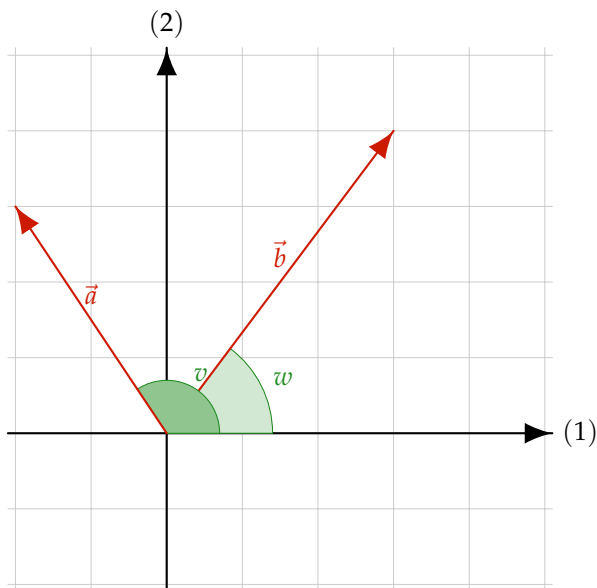
hvor v er vinklen mellem de to vektorer.

■ **Bevis** Ifølge definitionen af determinanten er

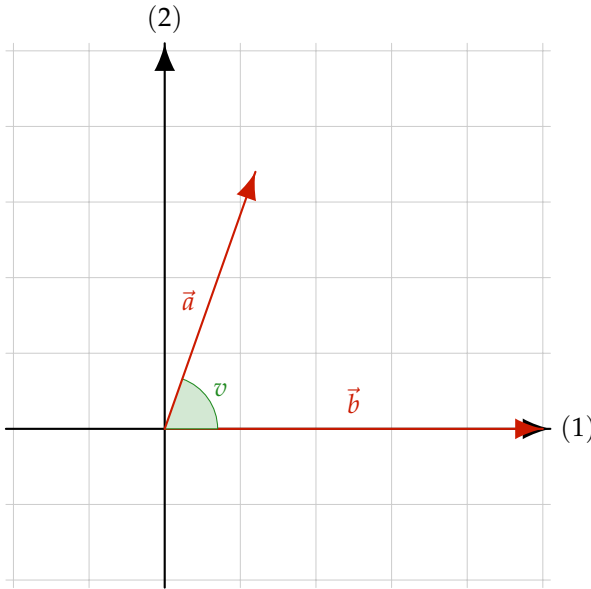
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v \rangle$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w$$



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. akse.



$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0$$

Ved at se på enhedscirklen ses, at $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

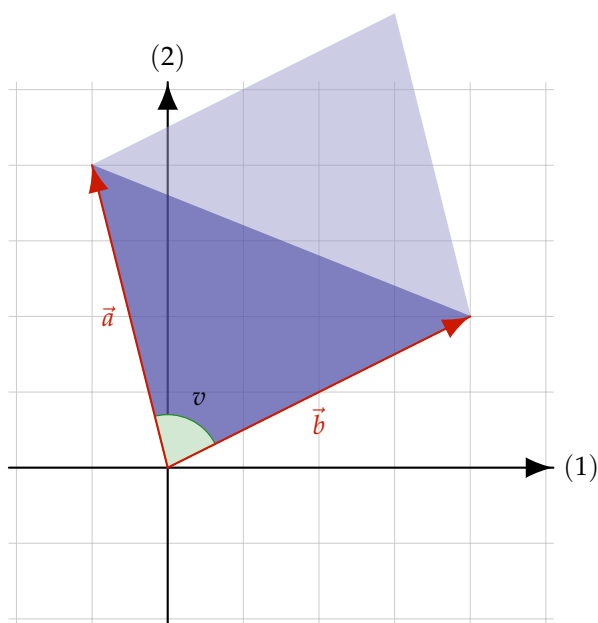
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$$

Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

■

To vektorer vil 'udspænde' et areal, som enten kan være en trekant eller et parallelogram. Arealet af parallelogrammet er dobbelt så stort som arealet af trekanten.

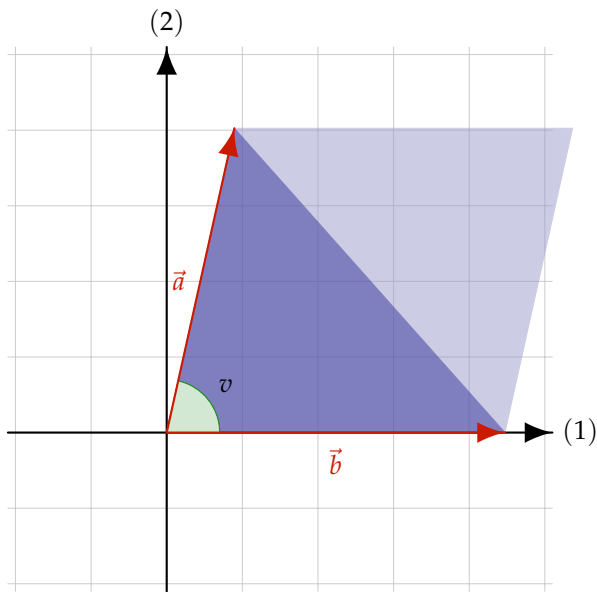


Sætning 32 For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder at

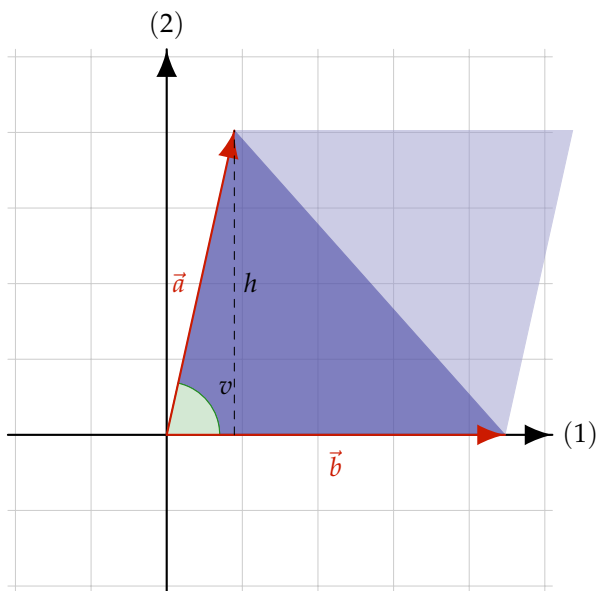
$$P_{\text{Areal}} = |\det(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Hvor P_{Areal} er arealet af det parallelogram de to vektorer udspænder.

■ **Bevis** Som det tidligere er set drejes koordinatsystemet således, at en af vektorerne er parallel med 1.aksen.



Derefter bestemmes højden i parallelogrammet.



Arealet af parallelogrammet er højden gange længden af grundlinjen. Højden er y -komponenten af $\vec{a}$ der er $|\vec{a}| \cdot \sin v$ og længden

grundlinjen er $|\vec{b}|$. Derfor bliver arealet af parallelogrammet

$$P_{\text{Areal}} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$$

Denne sætning kan blandt andet bruges til at regne følgende problemstilling.

■ **Eksempel 83 — To sider og et areal.** En stumpvinklet trekant har to sider med længderne 4 og 9, og arealet af trekanten er 15.

Bestem vinklen mellem de to sider?

Tallene fra opgaven sætte ind i formlen $P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$.

$$15 = 1/2 \cdot 4 \cdot 9 \sin v$$

Dette giver en vinkel på $56,44^\circ$, men da trekanten er stumpvinklet er vinklen $180 - v$. Så vinklen er $123,56^\circ$.

I Maple vil ligninger kunne løses med følgende kommandoer

Maple

```
with(Gym):
```

```
solve(15 = 9*(1/2*4)*Sin(v))
```

56.44269024

180-56.44269024

123.5573098

Denne sætning 32 kan bruges til at vise følgende

Sætning 33 — Sinusrelationerne. For en trekant ABC gælder der, at

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

■ **Bevis** Fra ovenstående sætning haves, at arealet af en trekant kan udregnes som produktet af to sidelængder og sinus til deres mellemliggende vinkel delt med 2. Dette er fordi der er tre hjørner, der beregnes på tre måder, der alle er lig hinanden - fordi det er



Opgaver hvor areal af parallelogram skal bestemmes



Opgaver hvor arealet udspændt af to vektorer er kendt og en parameter t skal bestemmes.



Video hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.



Opgaver hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.

arealet af den samme trekant, der beregnes.

$$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A$$

Ligningerne kan reduceres ved at dele med en halv gange produktet af alle tre sidelængder.

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}$$

Efter redueringen fås udtrykket

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{\sin C}{|\vec{c}|} = \frac{\sin B}{|\vec{b}|} = \frac{\sin A}{|\vec{a}|}$$

Denne sætning giver mulighed for at beregne problemstillinger hvor to eller tre vinkler er kendt.

■ **Eksempel 84 — To vinkler og en side.** En trekant har en side AB med længden 28 og to tilstødende vinkler på $A = 50^\circ$ og $B = 60^\circ$.

Bestem længden af siden BC .

Først bestemmes den modstående vinkel til siden AB , det er vinkel C .

$$\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$

Nu kan længden af $BC = a$ bestemmes med formlen $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$.

$$\frac{\sin 70^\circ}{28} = \frac{\sin 50^\circ}{a}$$

Det giver en sidelængde af BC på 22,8.

■ **Eksempel 85 — Tre vinkler og arealet.** I en trekant er de tre vinkler $A = 50^\circ$, $B = 100^\circ$ og $C = 30^\circ$. Arealet af trekanten er 25.

Bestem længden af de tre sider.

Tallene sættes ind i de tre ligninger

$$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A$$

Det giver

$$25 = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 30^\circ = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 100^\circ = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin 50^\circ$$



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant hvor to sider og en ikke mellemliggende vinkel er kendt.



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant, hvor én side og to vinkler er kendt.

Løsningen til dette ligningssystem er $a = 8,8$, $b = 11,3$ og $c = 5,8$.

■

I Maple kan dette ligningssystem løses med kommandoen solve. Bemærk at der også er en løsning hvor a , b og c er negative, men dette giver ikke mening geometrisk og derfor ses bort fra denne løsning.

Maple

```
with(Gym):
solve([25 = (1/2)*a*b*Sin(30), 25 = (1/2)*a*c*Sin(100),
25 = (1/2)*b*c*Sin(50)])
```

$$\{a = 8.819648028, b = 11.33832095, c = 5.756616412\},$$

$$\{a = -8.819648028, b = -11.33832095, c = -5.756616412\}$$

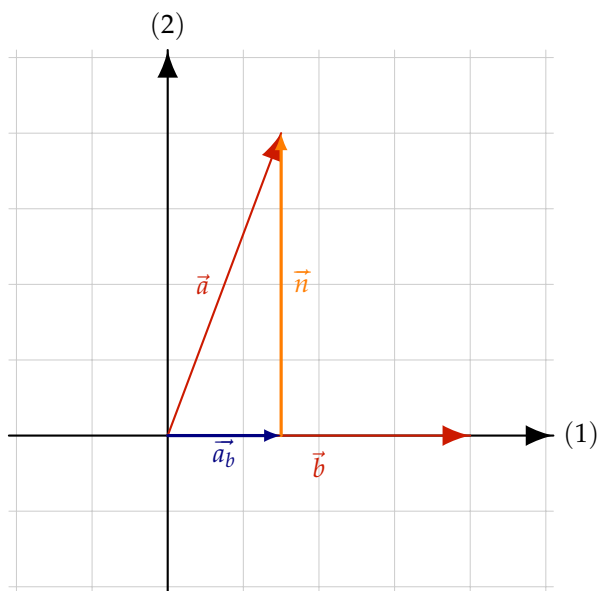
Sætning 34 Vektor $\vec{a}$ projekteret på vektor $\vec{b}$ giver projektionsvektoren $\vec{a}_b$, som er givet ved formlen

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

■ **Bevis** Først bemærkes at $\vec{a}_b = k \cdot \vec{b}$. Som tidligere anbringes den ene vektor for syns skyld parallelt med 1. akse.



Video med bevis for formlen for projektion af en vektor på en anden vektor.



Af tegningen ses det, at

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{n}$$

Ved at gange med $\vec{b}$ fås, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b} + \vec{n} \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{b}$ og $\vec{n}$ er ortogonale, er deres skalarprodukt 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{a}_b = k \cdot \vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot |\vec{b}|^2$$

Herefter divideres med $|\vec{b}|^2$.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = k$$

Deraf følger at

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

■

■ **Eksempel 86** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Tallene indsættes i formelen $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a}_b = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot (-3)}{4^2 + (-3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{20 - 3}{16 + 9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{17}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det giver en projektionsvektor $\vec{a}_b = \langle 2.72, -2.04 \rangle$. ■

I Maple kan problemstillingen løses med kommandoen proj.

Maple : Projektionsvektor.

with(Gym):

proj(<5,1>,<4, -3.>)

$$\begin{pmatrix} 2.72 \\ -2.04 \end{pmatrix}$$

Øvelse 114 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Beregn længden af $\vec{a}$.
- Beregn længden af $\vec{b}$.
- Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$.
- Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$.
- Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Øvelse 115 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Beregn længden af $\vec{b}$ når $t = 4$.
- b) Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når $t = 3$.
- c) Beregn værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.
- d) Beregn arealet af det parallelogram som $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder når $t = 2$.
- e) Beregn værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lige lange.
- f) Beregn værdierne af t , så $\vec{a}$ er tre gang så lang som $\vec{b}$.
- g) Bestem værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.
- h) Beregn værdien af t , så arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 42.

7

Plangeometri

8

Differentialregning

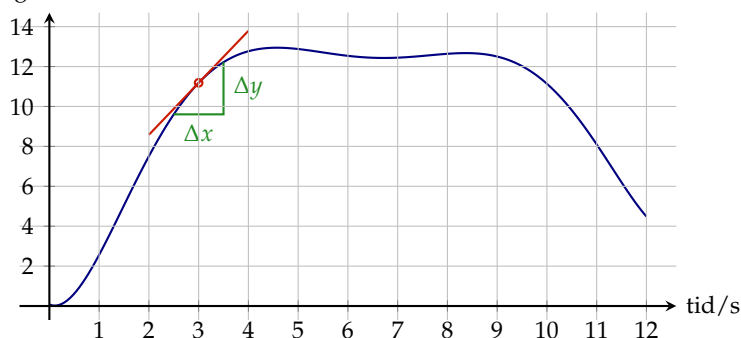
Ideen med differentialregning er at se på *uendeligt* små forskelle¹ i x -værdien. I det følgende ses på et eksempel hvor hastigheden og tiden er målt for 12 sekunders kørsel i en bil. Bilen kører mellem to lyssignaler. Hastigheden er omregnet fra km/t til m/s. 40 km/t er cirka 11 m/s. Differentialregning kan bruges til at besvare en række spørgsmål om kørslen.

¹ differenser

- Hvad er bilens acceleration på et bestemt tidspunkt?
- Hvad ville hastigheden være hvis accelerationen, på et bestemt tidspunkt, fortsatte?
- Hvornår har bilen lokal maksimal og minimal hastighed?
- Hvad er den maksimale og minimale hastighed?
- I hvilket tidsrum er bilens acceleration positiv og i hvilket tidsrum er bilens acceleration negativ?
- Hvor langt er bilen kørt?

Bilens acceleration der i differentialregning generaliseres til væksthastigheden, der kan beregnes for et interval med formlen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bliver i differentialregning beregnet i et enkelt punkt og her anvendes formelen $\frac{dy}{dx}$.

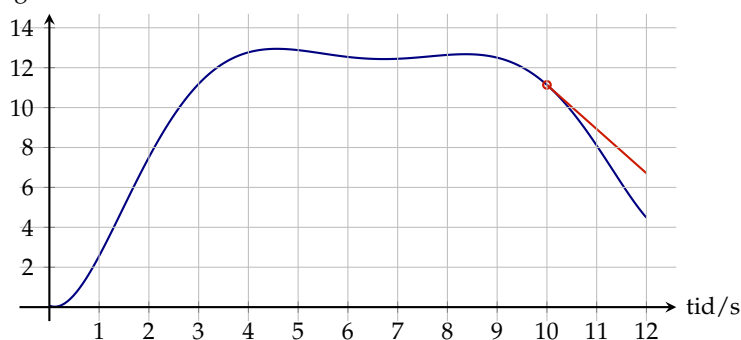
hastighed/ m/s



Væksthastigheden, der i dette tilfælde er accelerationen, ved 3 s er $2,6 \text{ m/s}^2$. Dette beregnes ved at bestemme hældningen af den røde rette linje, der kaldes tangenten, og tangenten er tegnet i punktet hvor $x = 3$. Hældningen af tangenten kan bestemmes ved at aflæse to punkter på tangenten og ikke på grafen for hastigheden.

For at bestemme bilens hastighed, hvis accelerationen er konstant, skal ligningen for tangenten bestemmes. Ligningen for tangenten er ligningen for en ret linje $y = ax + b$, hvor a er hældningen af tangenten og b kan beregnes ved at bruge punktet på grafen, som tangenten er tangent i. I dette tilfælde er punktet ved 10 s og her er hastigheden 11 m/s, dette kan også skrives (10, 11).

hastighed/ m/s



Ligningen for tangenten ved 10 s er $y = -2,21x + 33,2$. Havde bi-

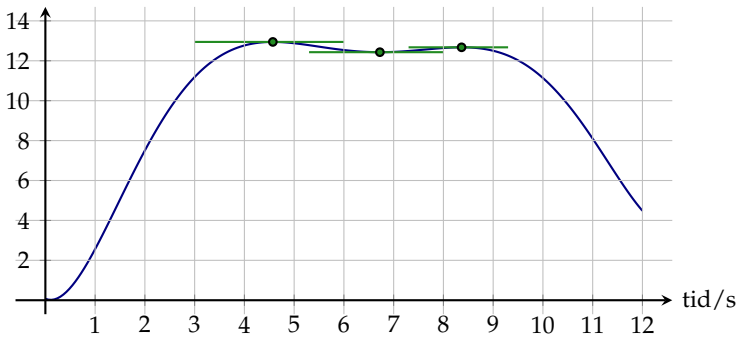
len fortsat med konstant acceleration ved 10 s, ville bilens hastighed ved 12 s have været

$$-2,21 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ s} + 33,2 \text{ m/s} = 6,68 \text{ m/s}$$

og ikke lidt under 5 m/s, som den faktisk var.

Bilens lokale maksimale og minimale hastighed, der i differentialregning generaliseres til lokale ekstrema, kan bestemmes som de tidspunkter hvor accelerationen er 0. Det er de tidspunkter, hvor hældningen af tangenten er 0, hvilket betyder at tangenten er parallel med 1. akse.

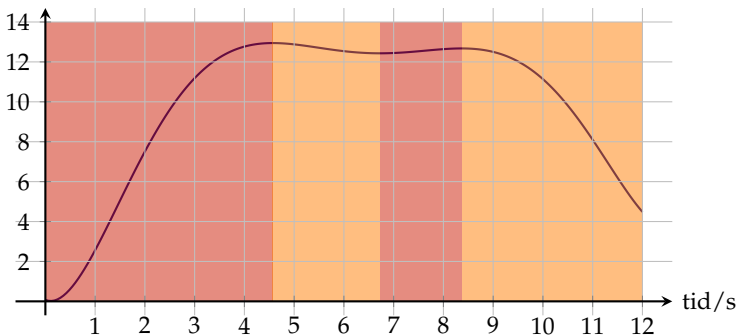
hastighed/ m/s



De lokale ekstrema er ved 4,57, 6,72 og 8,37 sekunder.

I nogle tidsintervaller har bilen en positiv acceleration og i nogle tidsintervaller har bilen en negativ acceleration, i differentialregning generaliseres dette til funktionens monotoniforhold. Det betyder en bestemmelse af, for hvilke x -værdier funktionen er voksende, og for hvilke x -værdier funktionen er aftagende.

hastighed/ m/s



Funktionen er voksende når x er i intervallerne $[0; 4,56]$ og

$[6,72;8,37]$ og aftagende når x er i intervallerne $[4,56;6,72]$ og $[8,37;12]$.

Det hele handler om at bestemme hældningen af tangenten til grafen i et punkt.

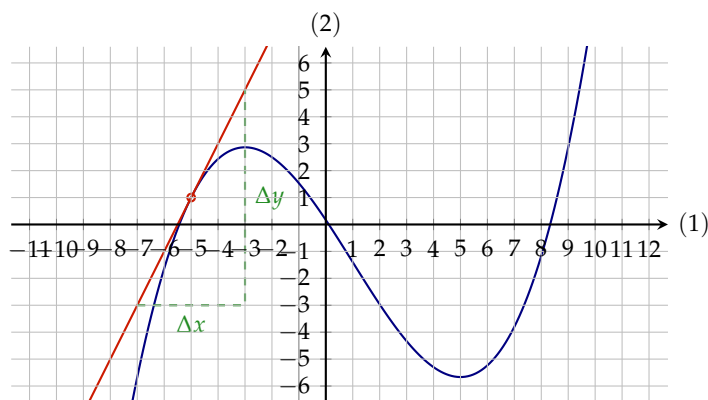
- Hældningen af tangenten er væksthastigheden i punktet,
- hældningen af tangenten kan sammen med punktet bruges til at bestemme ligningen for tangenten,
- hvis hældningen af tangenten er 0, har funktionen et lokalt ekstrema,
- hvis hældningen af tangenten er positiv er funktionen voksende, og hvis den er negativ er funktionen aftagende.

Det centrale er at bestemme hældningen af tangenten.

■ **Eksempel 87** Bestem hældningen af tangenten i punktet $(-5,1)$ grafisk.



Video med eksempel på grafisk bestemmelse af hældning af tangent.

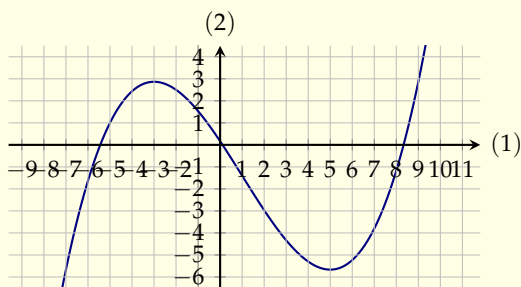


Ved først at tegne tangenten i punktet $(-5,1)$ og derefter at aflæse de to punkter $(-7, -3)$ og $(-3, 5)$ er det muligt at bestemme hældningen af tangenten.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-3)}{-3 - (-7)} = \frac{8}{4} = 2$$

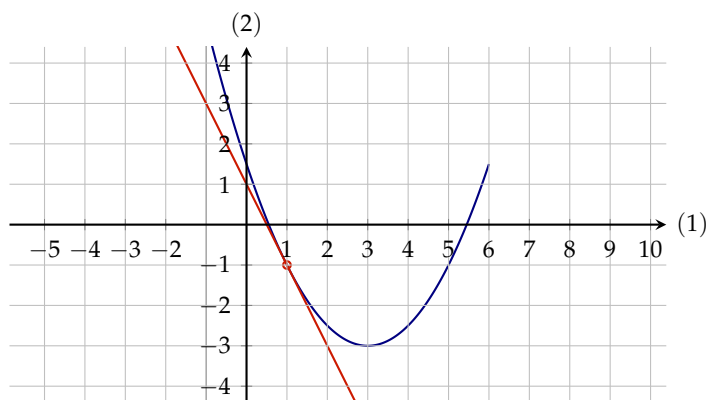
■

Øvelse 116 Bestem hældningen af tangenten i punktet $(7, -4)$.



Opgaver med grafisk bestemmelse af tangentens hældning.

■ **Eksempel 88** Bestem ligningen af tangenten i punktet $(1, -1)$.



Først tegnes tangenten i punktet $(1, -1)$. Herefter aflæses et punkt $(-1, 3)$. Hældningen a på tangenten bliver så

$$a = \frac{-1 - 3}{1 - (-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ved at indsætte punktet $(1, -1)$ i tangentens ligning $y = ax + b$ sammen med hældningen fås, at

$$-1 = -2 \cdot 1 + b$$

$$-1 = -2 + b$$

$$-1 + 2 = b$$

$$1 = b$$

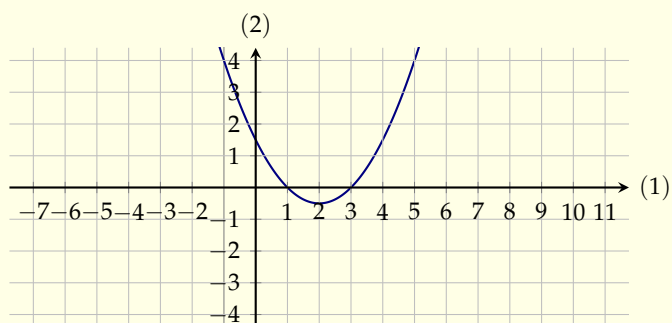
$$a = -2, y = -1, x = 1$$

reducering

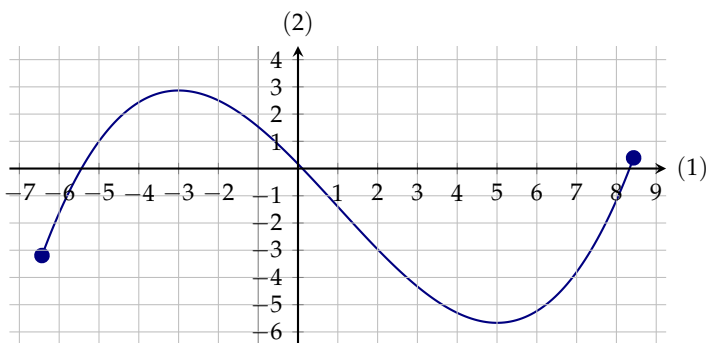
2 lægges til ligningen

Tangentens ligningen er $y = -2x + 1$. ■

Øvelse 117 Bestem ligningen for tangenten i punktet $(3, 0)$.

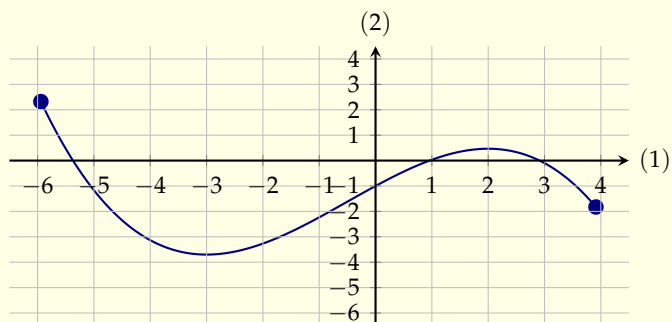


■ **Eksempel 89** Bestem lokale ekstrema for funktionen

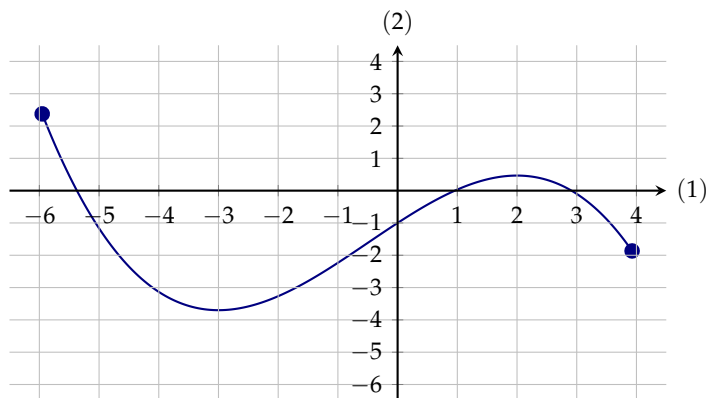


På grafen ses at ved $x = -3$ har funktionen et lokalt maksimum og ved $x = 5$ har funktionen et lokalt minimum. ■

Øvelse 118 Bestem lokale ekstrema for funktionen hvis graf ses på figuren.



■ **Eksempel 90** Bestem monotoniforhold for funktionen.



Fra -6 til -3 er funktionen aftagende og fra -3 til 2 er funktionen voksende og fra 2 til 4 er funktionen aftagende. ■

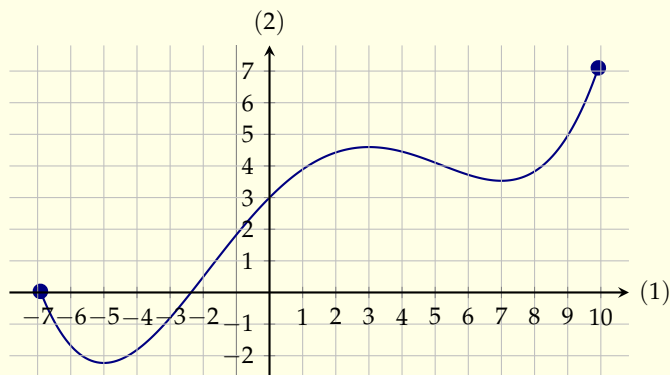


Video med eksempel på grafisk bestemmelse af monotoniforhold.



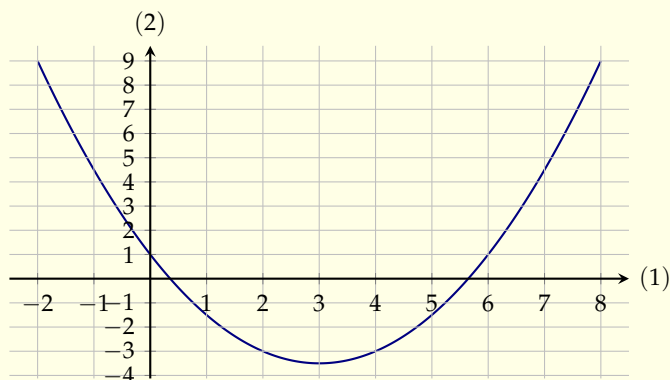
Opgaver hvor monotoniforhold skal bestemmes grafisk.

Øvelse 119 Bestem monotoniforhold for funktionen.



Øvelse 120 Grafen for funktionen f ses på figuren.

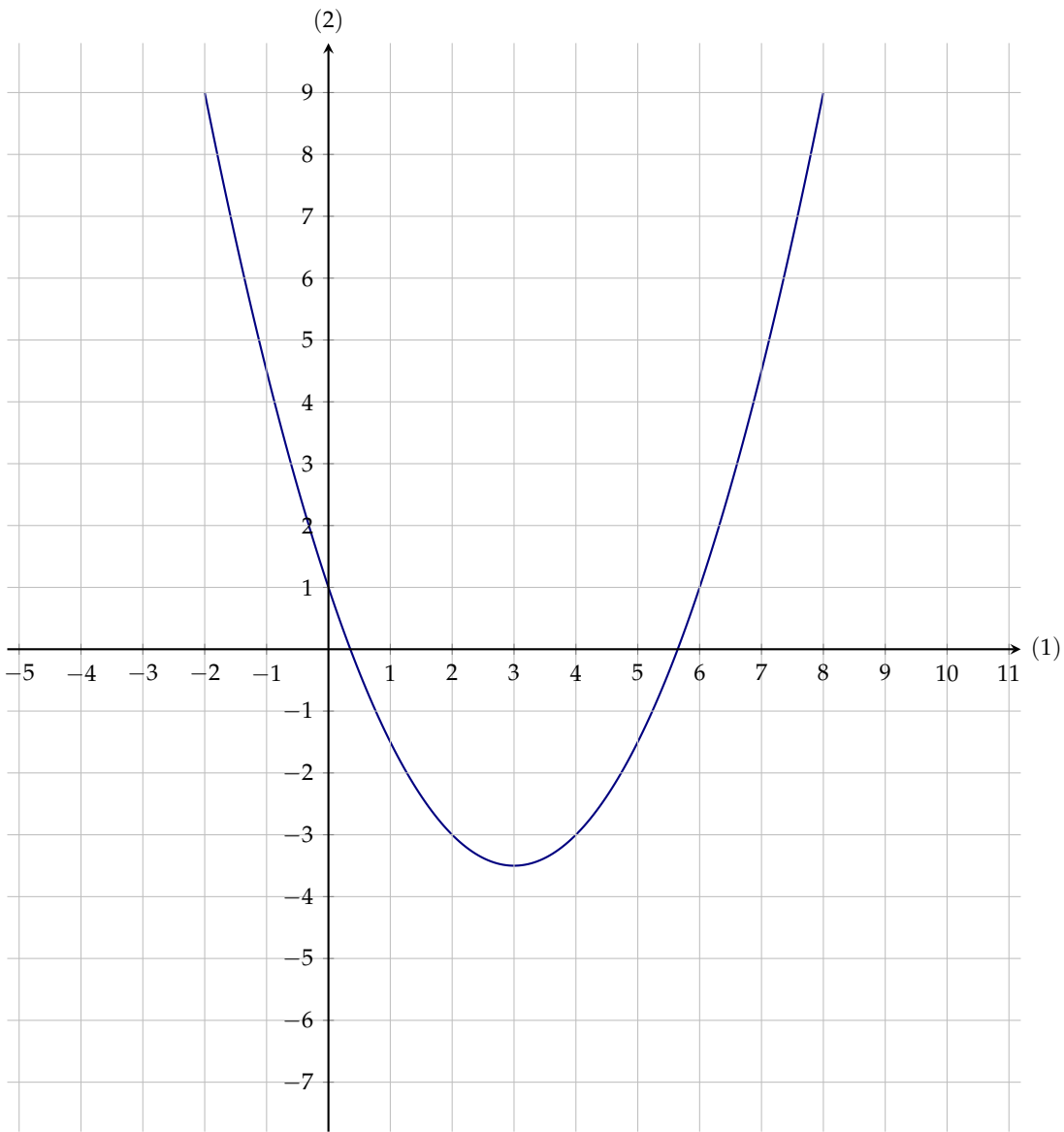
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$



- a) Bestem hældningen for tangenten i punkterne $-1, 0, 1, 2, 4, 6$ og 8 . Brug evt. bilaget.

x	-1	0	1	2	4	6	8
tangent hældning							

- b) Indsæt hældningen for tangenten som y -værdien sammen med den tilsvarende x -værdi som punkter i sammen koordinatsystem som grafen for f .
- c) Bestem en forskrift for den rette linje der går gennem punkterne.
- d) Brug forskriften for den rette linje til at bestemme hældningen af tangenten i punkterne $3, 5$ og 7 .



x	-1	0	1	2	4	6	8
tangent hældning							

8.1 Grænseværdi

En grænseværdi er en værdi, som en funktion nærmer sig når funktionsværdien nærmer sig en given værdi.

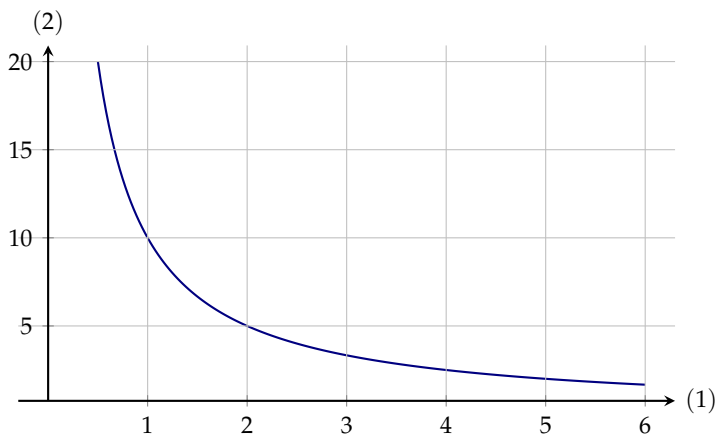
En funktion f har grænseværdien a i punktet x_0 , hvis man kan opnå funktionsværdier vilkårligt tæt ved a ved at vælge x -værdier tilstrækkeligt tæt ved x_0 . Hvis denne grænseværdi eksisterer, skriver vi, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

■ **Eksempel 91** Se på funktionen $f(x) = 10/x$.

Se på grænseværdien for denne funktion for x gående mod 2. Først den simple afprøvning.

x	1,8	1,9	2	2,1	2,2
$f(x)$	$\approx 5,56$	$\approx 5,26$	?	$\approx 4,76$	$\approx 4,55$

Ved at se på grafen giver det en god idé om at grænseværdien er 5.



$$f(x) = \frac{10}{x}$$

Med denne funktion er et også muligt at udregne funktionsværdien $f(2)$, og denne værdi er 5.

Konklusionen er derfor at funktionsværdien nærmer sig værdien 5 når x nærmer sig 2. Dette kan skrives

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

Nogle gange skrives det også $f(x) \rightarrow 5$ for $x \rightarrow 2$

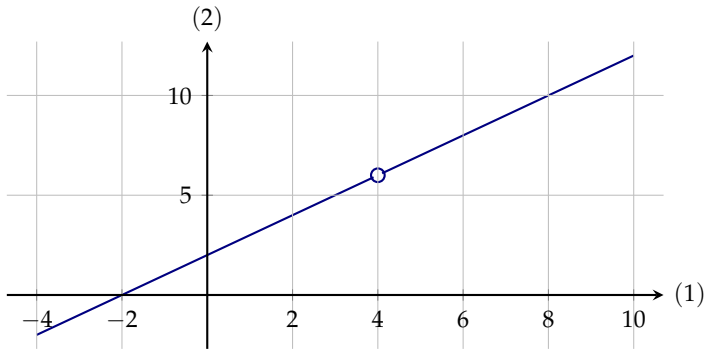
■

■ **Eksempel 92** Se på funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$. Grænseværdien i $x = 4$ kan ikke udregnes fordi nævnerne her har værdien 0.

Først den simple afprøvning.

x	3,90	3,99	4	4,01	4,10
$f(x)$	$\approx 5,9$	$\approx 5,99$	?	$\approx 6,01$	$\approx 6,10$

Derefter ses på grafen.



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$

Selvom det ikke er muligt at udregne funktionsværdien $f(4)$, er konklusionen at grænseværdien er 6.

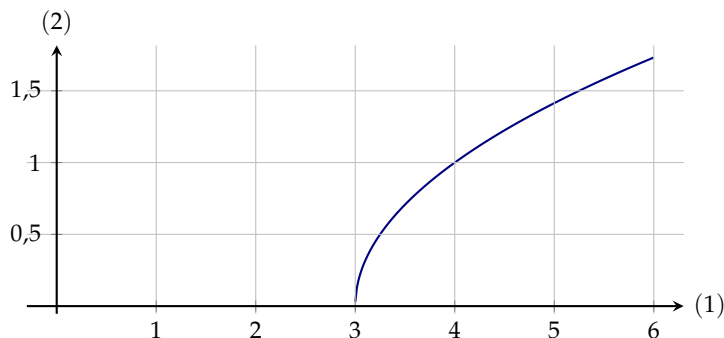
$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 6$$

Funktionens definitionsområde er alle reelle tal undtagen 4, dette skrives $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ■

■ **Eksempel 93** Se på funktionen $f(x) = \sqrt{x - 3}$. Da kvadratroden af et negativt tal ikke er defineret, er denne funktion kun defineret for reelle tal som gør at uligheden $x - 3 \geq 0$ er opfyldt, dvs. x skal være lig med eller større end 3, dette skrives $x \in [3, \infty[$. For at bestemme grænseværdien for x gående mod 3, laves først en simple afprøvning.

x	2,9	2,99	3	3,01	3,10
$f(x)$	—	—	?	$\approx 0,1$	$\approx 0,32$

Derefter ses på grafen.



Fordi det ikke er muligt at beregne hvad funktionsværdien er når x er mindre end 3 betyder det, at funktionen ikke har en grænseværdi for x gående mod 3, så $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3}$ eksistere ikke. ■

Øvelse 121 Udregn grænseværdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer i følgende tilfælde.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x + 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^4-16}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

Man kan »regne« med grænseværdier, det betyder at hvis funktionerne f og g har grænseværdierne a og b i punktet x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

så er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a + b$$

Det samme gælder for subtraktion, multiplikation og division sålænge at der ikke divideres med 0. Det gælder også at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot a$$

hvor k er en konstant.

8.2 Kontinuitet

Definition 29 — Kontinuitet. En funktion f kaldes kontinuert i punktet x_0 , hvis dens grænseværdi i punktet x_0 er lig med dens funktionsværdi i x_0 , dvs.

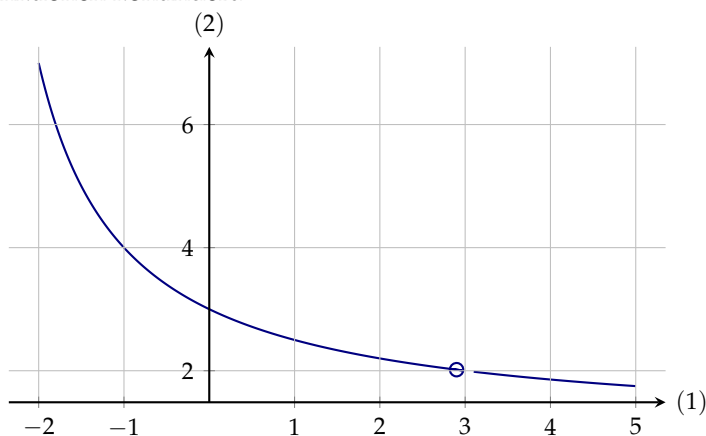
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

En funktion, der er kontinuert i alle punkter af sin *definitions-mængde* kaldes kontinuert. Hvis grænseværdien ikke eksisterer eller hvis grænseværdien er forskellig fra $f(x_0)$, så siger man at $f(x)$ er diskontinuert i x_0 .

Bemærk at det kun er hvis punkterne, som giver anledning til at grafen ikke er sammenhængende, ligger i definitionsmængden, at funktionen ikke er kontinuert.

Som eksempel på en kontinuert funktion, som har 'hul' i grafen kan man se på funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9}$

Som man kan se på grafen, er der et 'hul' i grafen, men da 'hullet' er i 3 som *ikke* ligger i funktionens definitionsmængde er funktionen kontinuert.



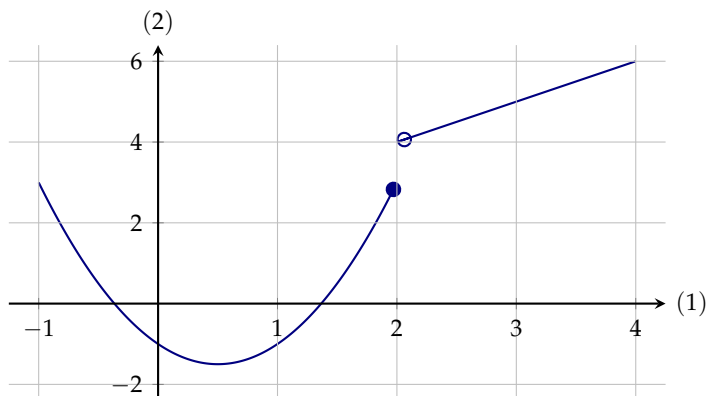
$$\bigcirc f(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9}$$

Nu kommer et eksempel på en ikke kontinuert funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$

Grafen for funktionen er ikke sammenhængende, men funktio-

nen er defineret for alle x .



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$

Funktionen er defineret for alle værdier af x , men funktionen er diskontinuert i punktet $x = 2$. I tabellen herunder ses at funktionsværdien i $x = 2$ er 3. Grænseværdien fra venstre er ganske vist også 3, men grænseværdien fra højre er 4. Derfor er grænseværdien ikke defineret og funktionsværdien er derfor ikke lig med grænseværdien og funktioner er derfor ikke kontinuert.

x	1,99	1,999	2	2,001	2,01
$f(x)$	2,9402	2,994002	3	4,001	4,01

Hvis to funktioner er kontinuerte vil deres sum, differens, produkt, kvotient eller sammensætning også være kontinuert, med passende indskrænkning i deres definitionsmængder.

Øvelse 122 Afgør om funktionerne er kontinuerte i $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 9x - 11 & 2 < x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 10x - 11 & 2 < x \end{cases}$

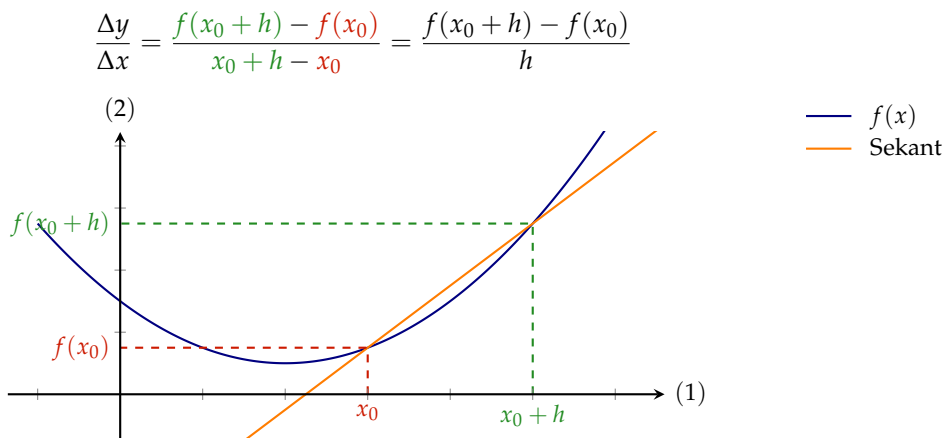
8.3 Differentialkvotienten

Definition 30 — Differentiabel. Funktionen f siges at være differentiabel i punktet x_0 , hvis differenskvotienten

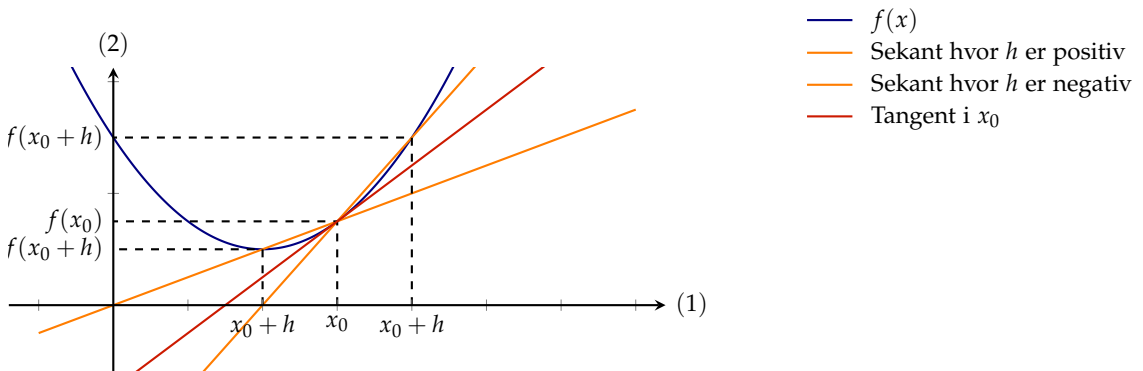
$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

har en grænseværdi for $h \rightarrow 0$.

På grafen for f aflæses to punter - et ved x_0 og et ved $x_0 + h$, disse to punkter bruges til at bestemme hældningen af den rette linje der går gennem disse to punkter. Den rette linje kaldes sekanten.

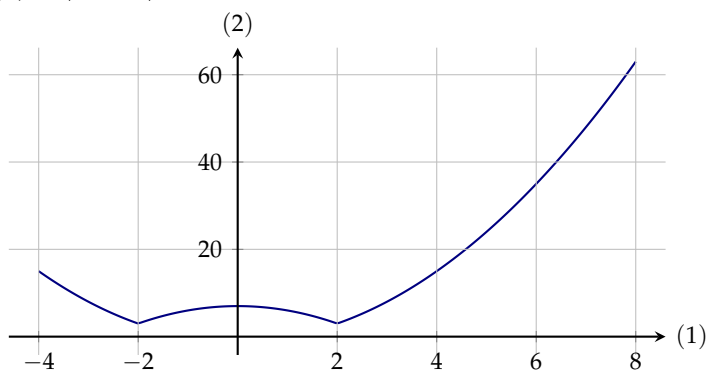


Og når h går imod 0 vil sekanten gå imod tangenten til $f(x)$ i punktet $(x_0, f(x_0))$, uanset om h går imod 0 fra den positive side eller negative side.



Video med introduktion til differentialregning.

På denne måde kan man finde tangenter til alle punkter på alle funktioner, hvor det kan lade sig gøre. For nogle funktioner er der punkter, hvor der ikke findes en tangent, fx findes der ikke tangenter til punkterne $(2,3)$ og $(-2,3)$ på grafen for funktionen $f(x) = |x^2 - 4| + 3$.



$$f(x) = |x^2 - 4| + 3$$

Der findes ingen tangent i et punkt på grafen, hvor funktionen ikke er kontinuert eller ikke er defineret.

Definition 31 Grænseværdien kaldes differentialkvotienten i x_0 og skrives $f'(x_0)$, dvs.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ angiver tangentens hældningskoefficient i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Hvis f er differentiabel i ethvert punkt af sin definitions-mængde, kaldes f differentiabel. Hvis funktionen f er differentiabel kaldes $f'(x)$ for den afledte funktion.

Når en funktion skal differentieres anvendes en metode med tre trin (tre-trins-metoden).

■ **Eksempel 94** Funktionen $f(x) = 6x^3$ skal differentieres. Først udregnes $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

$$\begin{aligned} 6(x_0 + h)^3 - 6x_0^3 &= 6(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - 6x_0^3 \\ &= 6x_0^3 + 18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3 - 6x_0^3 \\ &= 18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3 \end{aligned}$$



Video der forklarer tre-trins-metoden.

Derefter divideres med h .

$$\frac{18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3}{h} = 18x_0^2 + 18x_0h + 6h^2$$

Til sidst udregnes grænseværdien for h gående mod 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} 18x_0^2 + 18x_0h + 6h^2 = 18x_0^2$$

Konklusionen er at $f'(x) = 18x^2$. ■

■ **Eksempel 95** Funktionen $f(x) = 2x^2 + 3$ skal differentieres. Først udregnes $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

$$\begin{aligned} 2(x_0 + h)^2 + 3 - (2x_0^2 + 3) &= 2(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 3 - 2x_0^2 - 3 \\ &= 2x_0^2 + 4x_0h + 2h^2 + 3 - 2x_0^2 - 3 \\ &= 4x_0h + 2h^2 \end{aligned}$$

Derefter divideres med h .

$$\frac{4x_0h + 2h^2}{h} = 4x_0 + 2h$$

Til sidst udregnes grænseværdien for h gående mod 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4x_0 + 2h = 4x_0$$

Konklusionen er at $f'(x) = 4x$. ■

Øvelse 123 Differentier funktionerne med tre-trins-metoden.

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = x^2$ | b) $f(x) = 5x$ |
| c) $f(x) = 3x - 2$ | d) $f(x) = -4x^2 - x$ |

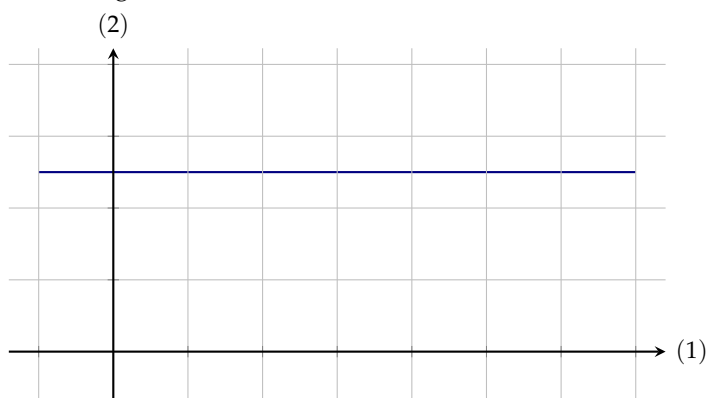
Sætning 35 Funktionen $f(x) = k$, hvor $k \in \mathbb{R}$ er differentiabel og $f'(x) = 0$

■ **Bevis** Definition 30 bruges på $f(x) = k$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

■

På grafen ses det at hældningen er 0 for alle x , hvilket stemmer med sætningen.



$$f(x) = k$$

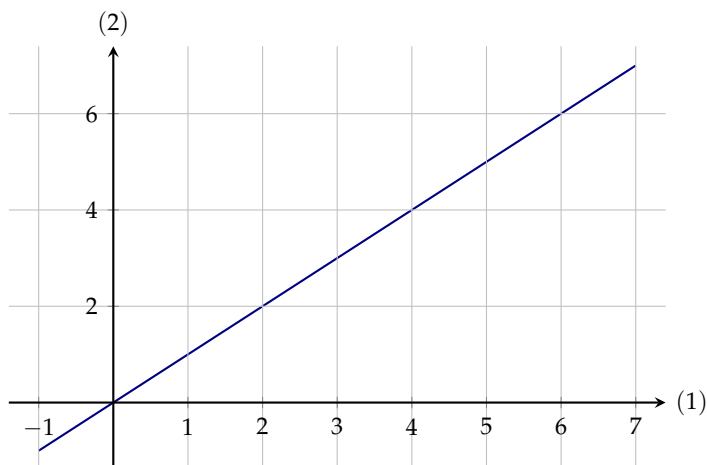
Sætning 36 Funktionen $f(x) = x$ er differentiabel og $f'(x) = 1$.

■ **Bevis** Definition 30 bruges på $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

■

På grafen ses det at hældningen er 1 for alle x , hvilket stemmer med sætningen.



$$f(x) = x$$

Sætning 37 Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $x \neq 0$ er differentiabel og $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.



Video med bevis for differentialekvotienten af $\frac{1}{x}$.

■ **Bevis** Definition 30 anvendes på $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$$

fælles nævner ved forlængelse

med x_0 og $x_0 + h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0}{x_0 \cdot (x_0+h)} - \frac{x_0+h}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

brøkerne samles

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - (x_0+h)}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

minus parentes ganges ud

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - x_0 - h}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

$$x_0 - x_0 = 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x_0^2 + x_0 \cdot h}}{h}$$

divideres med h

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot h}$$

grænseværdien udregnes

$$= -\frac{1}{x_0^2}$$

■



— $f(x) = \frac{1}{x}$
 — $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
 — Tangent i $x = 0,5$

På grafen ses, at hældningen af tangenten til f i punktet $x = 0,5$ er -4 og det svarer til værdien af f' i $x = 0,5$.

Sætning 38 Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, hvor $x \geq 0$ er differentiabel og $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

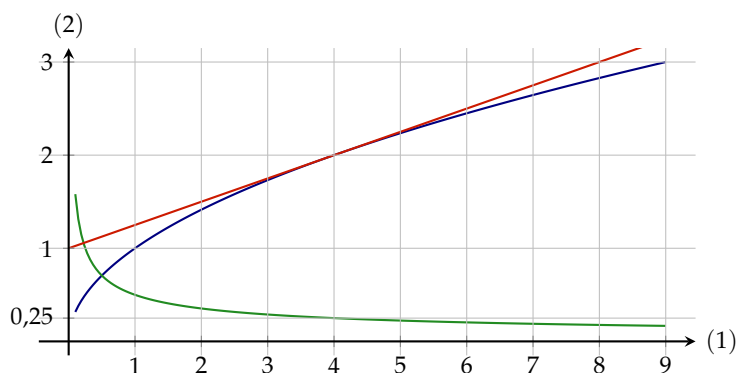


Video med bevis for differentialkvotienten af $\sqrt{x}$.

■ **Bevis** Definition 30 anvendes på $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Brøken forlænges med} \\
 & && \sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Tælleren ganges ud.} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Da } x_0 - x_0 = 0. \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} && \text{Brøken forkortes med } h. \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} && \text{Grænseværdien udregnes.}
 \end{aligned}$$

Da f er differentiabel i ethvert punkt af sin definitionsmængde er den afledede funktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ som ønsket. ■



— $f(x) = \sqrt{x}$
— $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
— Tangent i $x = 4$

På grafen ses, at hældningen af tangenten til f i punktet $x = 1$ er 0,25 og det svarer til værdien af f' i $x = 4$.

For at gøre det lettere at bestemme afledede funktioner, vises nogle regneregler for differentialkvotienter.

Sætning 39 Hvis funktionerne f og g er differentiable i x_0 , er deres sum - og differensfunktioner også differentiable i x_0 og differentialkvotienten er hhv. summen og differensen af differentialkvotienterne for f og g .

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$



Video med bevis for differentialkvotienten af $(f + g)(x)$

■ Bevis

$$(f + g)'(x_0)$$

definition 30 anvendes

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h}$$

definitionen af additionsfunktionen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h}$$

parentesen i tælleren ophæves

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

brøken opdeles i to

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right)$$

regneregler for grænseværdier

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Da f og g er differentiable funktioner, kan definition 30 anvendes

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

■

■ **Eksempel 96** Differentier funktionen $f(x) = x + \sqrt{x} + 4$. Ved at bruge det netop viste, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Sætning 39 betyder at funktionen kan differentieres ved at differentiere de tre led hver for sig. 4 er en konstant, og her giver sætning 35 at 4 differentieret giver 0. Sætning 36 giver at x diffe-

rentieret er 1 og sætning 38 giver at $\sqrt{x}$ er $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$. Samlet betyder det, at

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 0$$

Sætning 40 Hvis funktionerne f er differentiabel i x_0 og k er en konstant, er deres produkt også differentiabelt i x_0 og differentialkvotienten er produktet af konstanten og differentialkvotienten for f .

$$(k \cdot f(x_0))' = k \cdot f'(x_0)$$



Video med bevis for differentialkvotienten af $k \cdot f(x)$.

■ Bevis

$$\begin{aligned} & (k \cdot f(x_0))' \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x_0 + h) - k \cdot f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot (f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= k \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

definition 30 anvendes

k sættes udenfor parentes

brøkregnereglen $\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$

regneregler for grænseværdi

da f er differentiabel

■ **Eksempel 97** Differentier funktionen $f(x) = 3x + 2 \cdot \frac{1}{x}$. Ved at bruge det netop viste, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Sætning 39 betyder at funktionen kan differentieres ved at differentiere de to led hver for sig. Sætning 40 og sætning 36 giver at $3x$ differentieret bliver $3 \cdot 1$. Sætning 40 og sætning 37 giver at $2 \cdot \frac{1}{x}$ bliver $2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Samlet bliver det

$$f'(x) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Øvelse 124 Differentier funktionerne.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x$ b) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 3x$

c) $f(x) = \frac{2}{x} - 6\sqrt{x}$ d) $f(x) = 2 + \frac{1}{x} - 5x$

Sætning 41 Funktionen

$$f(x) = x^n$$

er differentiabel og differentialkvotienten er

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$



Video med forklaring af differentialkvotienten af et polynomium.

■ **Eksempel 98** Differentier polynomiet $f(x) = 2x^4 + 4x^3$. Ved at bruge ovenstående sætning, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Hvert led differentieres for sig, og når en konstant ganges med en funktion, skal kun funktionen differentieres. Det betyder at $2x^4$ differentieret bliver til $2 \cdot 4 \cdot x^{4-1}$, hvilket kan reduceres til $8x^3$. Tilsvarende bliver $4x^3$ til $12x^2$. Samlet bliver det

$$f'(x) = 8x^3 + 12x^2$$



Opgaver hvor differentialkvotienten for et polynomium skal beregnes.

Øvelse 125 Differentier funktionerne.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 5x^3 + 3x^{-2} - 2$ d) $f(x) = 3x^2 - 5x^0$

e) $f(x) = x^{-1} + x^1$ f) $f(x) = 2x^{0,5} + 6x^{1,5}$

Endnu et par regler skal nævnes.

Sætning 42 Funktionen $f(x) = e^x$ er differentiabel og $f'(x) = e^x$.

e^x er den eneste funktion der giver sig selv når den differentieres.

Sætning 43 Funktionen $f(x) = \ln(x)$ er differentiabel for $x > 0$ og $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Øvelse 126 Differentier funktionerne.

a) $f(x) = e^x + 3x$

b) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} + 3e^x$

c) $f(x) = 5e^x - 5x^2$

d) $f(x) = -2e^x + x^{-0,5}$

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

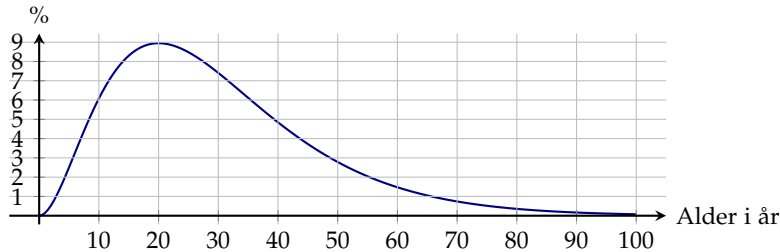
f) $f(x) = 3x^2 - 3\ln(x)$

I Maple kan en funktion differentieres ved at bruge '

Maple
 $f(x) := 3x^2$
 $f'(x)$

6x

Virkeligheden er ofte mere kompliceret end disse funktioner. Grafen her viser risikoen for at blive involveret i vold som funktion af alder.



For at undersøge sådan en sammenhæng er det nødvendigt at bruge et IT-værktøj fordi funktionen ikke er simpel, men det er den samme forståelse af væksthastighed, tangent, ekstrema og monotoniforhold.



Opgaver hvor forskellige typer funktioner skal differentieres.

Tabel 8.1: Regneregler for differentialregning

f	f'
k	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x^2}{e^{0,1x+1,8}}$



Video med introduktion til differentialregning i Maple.

8.4 Væksthastighed

Væksthastighed er et udtryk for ændringen af en variabel over tid.

■ **Eksempel 99** Bestem væksthastigheden for funktionen $f(x) = 3x^2$ i punktet $x = 3$.

Først differentieres funktionen

$$f'(x) = 6x$$

Derefter udregnes

$$f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$$

Væksthastigheden i punktet $x = 3$ er derfor 18.

Dette kunne også være udregnet i Maple.

Maple

$f(x) := 3x^2$

$f'(3)$

18



Video med bestemmelse af væksthastighed analytisk.



Video med bestemmelse af væksthastigheden i Maple.

■ **Eksempel 100 — Populationstilvækst.** I en population af dyr vokser antallet af individer med følgende sammenhæng efter år 2005.

$$f(x) = 500 \cdot e^{0,7 \cdot x}$$

Hvor $f(x)$ er antallet af individer i populationen og x er antallet af år efter 2005. Væksthastigheden i år 2010. År 2010 er 5 år efter 2005, derfor skal $f'(5)$ bestemmes for at finde væksthastigheden i 2010.

Maple

$f(x) := 500 \cdot \exp(0.7 \cdot x)$

$f'(5)$

11590

Det betyder at i år 2010 vokser antallet af dyr i populationen med en hastighed af 11 590 dyr pr. år.

Øvelse 127 Løs disse opgaver, der er formuleret forskelligt, men det er den samme metode, der skal bruge til alle opgaverne.

- a) Bestem $f'(4)$ for funktionen $f(x) = x^2 - 5x + 3$.
- b) En funktion er givet ved $f(x) = 3x^3 - 5x$. Bestem $f'(2)$.
- c) Bestem vækstraten for funktionen $f(x) = 3x^4 - 10$ i punktet $x = 2$.
- d) Sammenhængen mellem antallet af hvide næsehorn og tiden i år efter 2010.

$$f(t) = -0,5 \cdot t^2 + 30$$

hvor x er antallet af år efter 2010 og f er antallet af næsehorn. Bestem væksthastigheden af næsehorn i 2015.

- e) I en model for udviklingen i antallet af husstande med solceller, er antallet af husstande med solceller proportional med kvadratet på tiden i år efter 2005, og proportionalitetsfaktoren er 0,5. Bestem vækstraten for husstande med solceller i 2009.



Opgaver hvor væksthastigheden eller differentialkvotienten skal bestemmes analytisk.

8.5 Tangentbestemmelse

Ligningen for tangenten til funktionen $f(x)$ i et punkt x_0 , kan findes på følgende måde.

■ **Eksempel 101** Funktionen $f(x) = 2x^2 - 4$ har i punktet $x_0 = 1$ en tangent, $y = ax + b$, og denne tangent findes ved følgende metode.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} = 4x$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 = -2$$

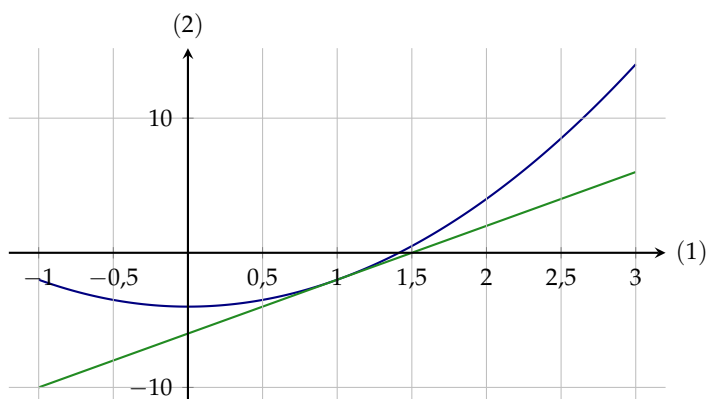
$$b = -2 - 4 \cdot 1 = -2 - 4 = -6$$

$$f'(x)$$

$$a = f'(x_0)$$

$$b = y_0 - a \cdot x_0$$

Ligningen for tangenten til $f(x) = 2x^2 - 4$ i punktet $x_0 = 1$ er så $y = 4x - 6$.



— $f(x) = 2x^2 - 4$
— Tangent i $x = 1$

Øvelse 128 Bestem tangenten til følgende funktioner i x_0 .

a) $f(x) = x^2 - 1$ i $x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^4 - 2x + 3$ i $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3$ i $x_0 = -2$

d) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ i $x_0 = -1$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion.



Opgaver med bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion i et givet punkt.

■ **Eksempel 102** I Maple kan tangenten til funktionen $f(x) = \frac{x^2}{e^{0,1x+1,8}}$ i punktet $x = 8$ bestemmes således

Maple

$$f(x) := \frac{x^2}{\exp(0.1x + 1.8)}$$

$$y = f'(8) \cdot (x - 8) + f(8)$$

$$y = 0.7130263506x - 0.950701801$$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangent til grafen for en funktion med en bestemt hældning.

■ **Eksempel 103 — Bestem en tangent med en bestemt hældning.** Bestem ligningen for den tangent til grafen for $f(x) = x^2 - 4x + 3$ der har hældningen 2.

Først bestemmes $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - 4$$

Derefter løses ligningen $f'(x) = 2$, der var den ønskede hældning.

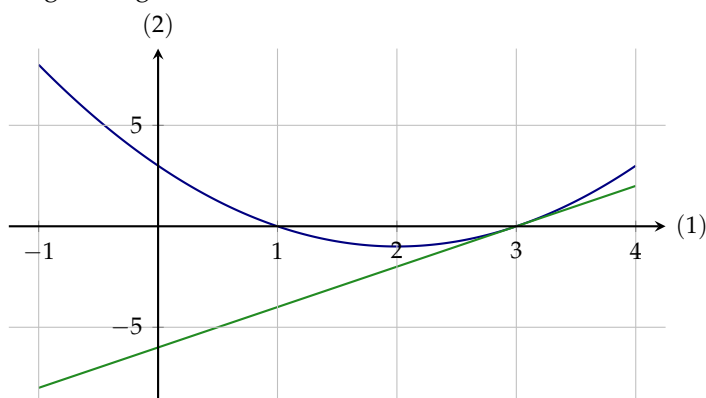
$$2 = 2x - 4$$

$$2 + 4 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$3 = x$$

Det betyder at den x -værdi som tangenten med hældningen 2 er tangent til grafen i er værdien 3.



— $f(x) = x^2 - 4x + 3$
— Tangent i $x = 3$

For at bestemme ligningen for tangenten, mangler skæringen med y -aksen - b -værdien i ligningen $y = ax + b$. For at bestemme denne værdi udregnes $f(3)$.

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

Nu vides at punktet $(3, 0)$ er et punkt på tangenten, og dette punkt indsættes i tangentens ligning, sammen med hældningen på 2.

$$0 = 2 \cdot 3 + b$$

$$0 = 6 + b$$

$$-6 = b$$

Ligningen for tangenten bliver derfor $y = 2x - 6$. ■

I Maple ville ovenstående være udregnet således.

Maple

$$f(x) := x^2 - 4x + 3$$

$$\text{solve}(f'(x)=2)$$

$$3$$

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$$

$$y = 2x - 6$$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion i Maple.



Opgaver med bestemmelse af ligningen for en tangent til grafen for en funktion, hvor tangentens hældning er givet.

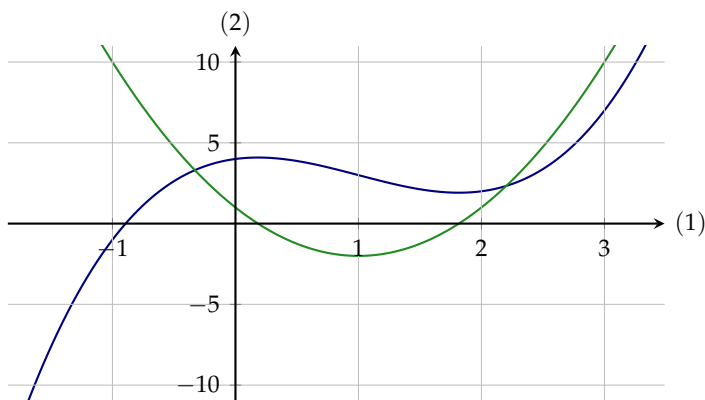
Øvelse 129 Bestem ligningen for tangenten i følgende tilfælde.

- Grafen for $f(x) = -x^2 + 5$ har netop én tangent med hældningen -2 . Bestem ligningen for tangenten.
- Grafen for $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ har netop én tangent med hældningen 3 . Bestem ligningen for tangenten.
- Grafen for $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$ har netop to tangenter med hældningen 1 . Bestem ligningen for disse tangenter.

8.6 Monotoniforhold

At bestemme en funktions monotoniforhold betyder at bestemme hvornår funktionen er voksende og aftagende. Med kendskabet til betydningen af differentialkvotienten, er dette lettere. Idet det udnyttes, at funktionen er voksende hvis differentialkvotienten er positiv, og funktionen er aftagende hvis differentialkvotienten er negativ.

På grafen ses, at $f'(x)$ er negativ når $f(x)$ er aftagende og, at $f'(x)$ er positiv når $f(x)$ er voksende.



For at bestemme monotoniforholdene skal de x -værdier, hvor $f'(x) = 0$ findes og fortegnet for $f'(x)$ på hver side af nulpunkterne skal bestemmes, og på baggrund af disse oplysninger kan monotoniforholdene for $f(x)$ bestemmes.

Det er altid en god idé også at tegne grafen og sammenligne den med resultatet. I den forbindelse er det vigtigt at tegne grafen så følgende er synligt.

- Nulpunkter - der hvor grafen skærer 1.aksen
- Der hvor grafen skærer 2.aksen
- Lokale ekstrema - der hvor f' er nul.
- Benyt altid intervallet, hvis det er indeholdt til opgaven, fx betyder $-2 < x < 4$ at grafen skal tegnes i intervallet -2 til 4 .

I maple kan grafen for de to funktioner $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$



Video med eksempel på bestemmelse af monotonifor-

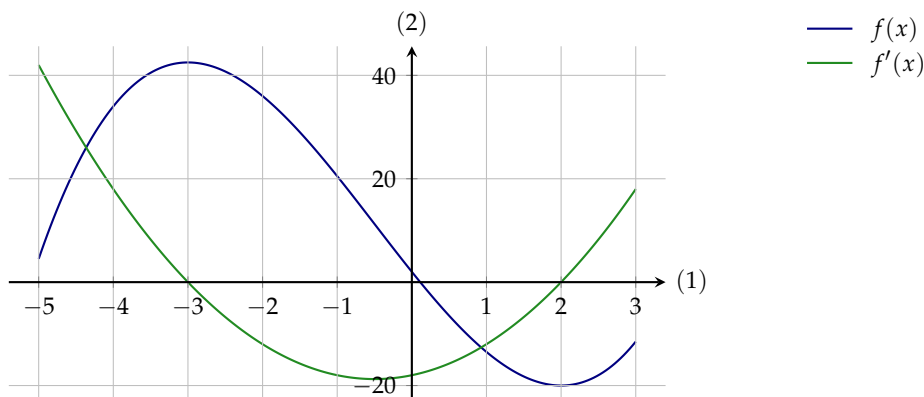
— $f(x)$:
— $f'(x)$

og $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ i intervallet -2 til 4 tegnes på følgende måde.

Maple : Tegn grafer.

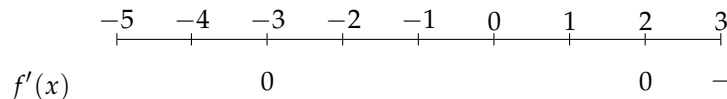
```
plot([x^3 - 3x^2 + x + 4, 3x^2 - 6x + 1], x=-2..4)
```

■ **Eksempel 104** For at bestemme monotoniforholdene for funktionen $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$ differentieres denne og $f'(x) = 3x^2 + 3x - 18$.



Nulpunkterne for $f'(x)$ kan findes ved at løse andengradsligningen. $L = \{-3, 2\}$.

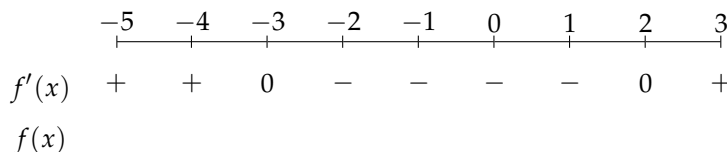
Disse nulpunkter afmærkes på en x -akse.



Så bestemmes fortegnet for $f'(x)$ inden og efter hvert af nulpunkterne.

$$f'(-4) = 18 \text{ og } f'(0) = -18 \text{ og } f'(4) = 42$$

Disse fortegn skrives ind på vores x -akse.



Nu kan det afgøres hvor $f(x)$ er voksende, og hvor den er aftagende. Idet $f(x)$ er voksende når $f'(x)$ er positiv, og $f(x)$ er

aftagende når $f'(x)$ er negativ. Dette markeres på vores x -aksen med pile.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	↗	→	↘	↘	↘	↘	→	↗

Resultatet skal skrives i følgende tekst. Bemærk at funktionen er både voksende og aftagende i -3 og 2 . Bemærk at ∞ og $-\infty$ **ikke** er indeholdt i intervallerne.

Funktionen $f(x)$ er voksende i intervallerne $] -\infty; -3]$ og $[2; \infty[$ og funktionen $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; 2]$.

Da funktionen er voksende frem til -3 og herefter aftagende er -3 et lokalt ekstremumssted - et lokalt maksimum. Den lokale maksimumsværdi er $f(-3) = 15,5$. Da funktionen er aftagende til 2 og herefter voksende, er 2 et lokalt ekstremumssted - et lokalt minimum. Den lokale minimumsværdi er $f(2) = -32$.

I Maple vil opgaven kunne løses på følgende måde. Bemærk at Maple lader uendelig være en del af intervallet, det er der ikke tradition for i gymnasiet, så derfor skal dette ændres til $] -\infty, -3]$ i konklusionen i besvarelsen.

Maple

$$f(x) := x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$$

`solve(f'(x) ≥ 0)`

$$[-\infty, -3], [2, \infty]$$

`solve(f'(x) ≤ 0)`

$$[-3, 2]$$



Video med eksempel på bestemmelse af monotoniforhold i Maple.



Opgaver hvor monotoniforholdene skal bestemmes analytisk.

Øvelse 130 Bestem monotoniforhold og ekstremumssteder og -værdier for følgende funktioner

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

c) $f(x) = -4x^3 + 7$

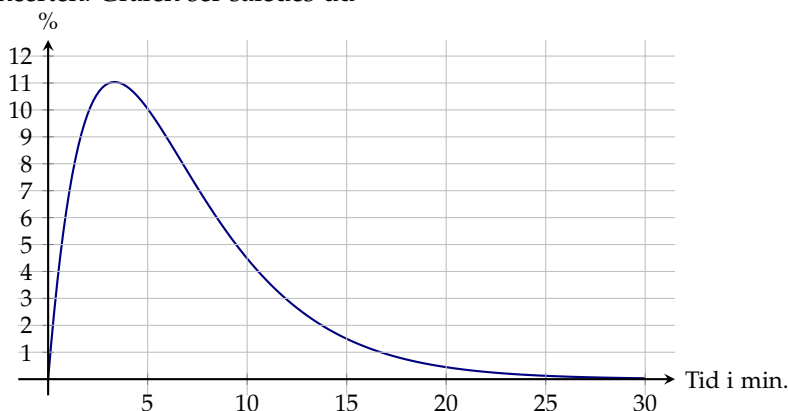
8.7 Ekstremum

Ekstremum handler om at bestemme maksimum- eller minimumssteder og værdier. Sådanne værdier kan bestemmes ved at lave en monotoniundersøgelse eller ved at løse ligningen $f'(x) = 0$ og sammenholde resultatet med en graf af funktionen i det relevante interval.

■ **Eksempel 105** Her ses på eksemplet: »Hvor hurtigt personer ønsker at forlade en koncert efter, at den er slut.«

$$f(x) = \frac{54,4 \cdot x}{e^{0,3 \cdot x + 1,8}}$$

Hvor x er tiden i minutter efter at koncerten er slut og f er hvor mange procent af koncertdeltagerne der ønsker at forlade koncerten. Grafen ser således ud



$$f(x) = \frac{54,4 \cdot x}{e^{0,3x+1,8}}$$

Til en koncert er der 250 personer. Hvor mange personer skal kunne komme ud samtidig for, at alle kan komme ud når de vil?

Først bestemmes efter hvor lang tid der er flest der vil ud, ved at løse ligningen $f'(x) = 0$.

Maple

$$f(x) := \frac{54.44682717x}{e^{0.3x+1.8}}$$

solve(f'(x)=0.)

3.33333334

Det betyder at efter 3,33 minutter er der flest der ønsker at



Video med eksempel på ekstrembestemmelse i Maple.

forlade koncerten. For at bestemme hvor mange procent det er udregnes $f(3,33)$.

Maple

$f(3.33)$

11.03638323

Det betyder, at der maksimalt er 11 % af koncertdeltagerne, der ønsker at forlade koncerten på samme tid. For at bestemme antallet af personer udregnes, 11 % af de 250 deltagere. Det er 27,5. Det betyder at der skal kunne komme 28 deltagere ud samtidig, for at alle kan komme ud når de vil. ■

Øvelse 131 Bestem ekstrema for følgende funktioner.

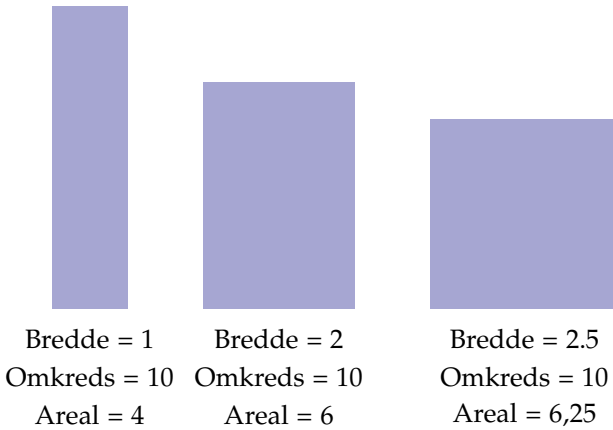
a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

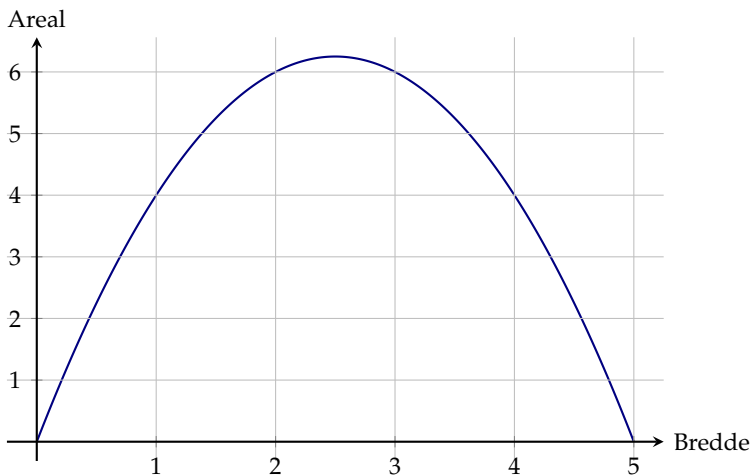
- c) En kanonkugle skydes af sted og følger parablen med forskriften $p(x) = -0,5x^2 + 20x$, hvor x er i meter. Hvor højt kommer kanonkuglen op og hvor langt kommer den?

8.8 Optimering

Optimering handler om at bestemme maksimum- eller minimumssteder og værdier. Ved optimering er der to modsatrettede forhold, fx forholdet mellem areal og omkreds. Arealet af en rektangel vil, hvis den kun må have en givet omkreds, have et maksimalt areal.



Dette kan også vises grafisk. Da omkredsen er 10, vil bredden af rektangel være mellem 0 og 5.



Her ses på tre eksempler. Optimering af profit med begrænsningen salgspris, optimering af areal med begrænsningen omkreds, optimering af volumen med begrænsningen overfladeareal.

■ **Eksempel 106 — Optimering af profit.** En virksomhed har undersøgt

sammenhængen mellem prisen og salget af en vare og er kommet frem til følgende model.

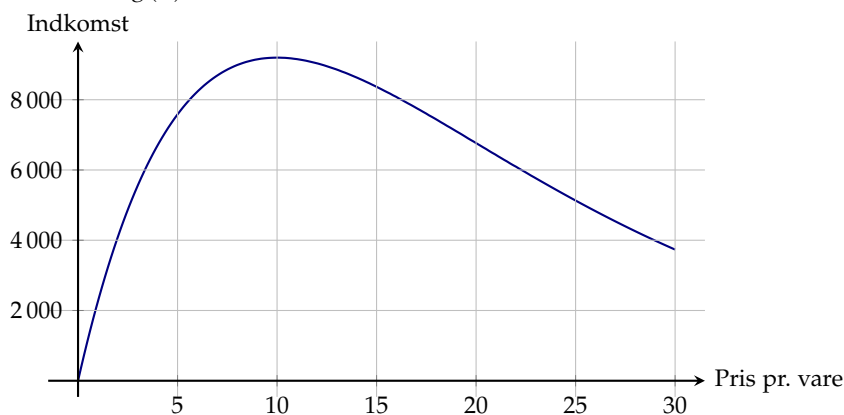
$$f(x) = 2500 \cdot e^{0,1x}$$

hvor $f(x)$ er antallet af solgte varer og x er prisen i kr. Prisen på lignende varer er maksimalt 30 kroner, og virksomheden ønsker ikke, at deres varer skal være dyrere. For at bestemme den pris, der giver den maksimale indkomst, bestemmes først en model for indkomsten.

$$g(x) = x \cdot f(x)$$

hvor $f(x)$ er antallet af solgte varer og x er prisen i kroner og $g(x)$ er den samlede indkomst.

Grafen for $g(x)$ er



Maple

```
f(x):=2500 * e-0.1*x
```

```
g(x):=x * f(x)
```

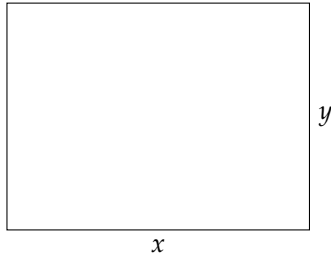
```
plot(g(x),x=0..30)
```

```
intervalsolve(g'(x) = 0, x = 5 .. 30)
```

10

Ved løsning af ligningen $g'(x) = 0$ i intervallet 0 til 30 fås, at der er et ekstremumssted ved 10. På grafen ses at der er tale om et maksimum. Det betyder at den pris, der giver den største indtjening til virksomheden, er 10 kr. ■

■ **Eksempel 107 — Optimering af areal.** I et rektangel er den samlede længde af de fire sider 24 cm



Video med eksempel på optimering i Maple.

Bestem x så arealet af rektanglet er størst muligt.
Længde af de tre sider af rektanglet er

$$24 = 2x + 2y$$

Det betyder at y som funktion af x er

$$2y = 24 - 2x$$

Der kan reduceres til

$$y = 12 - x$$

Arealet er

$$A = x \cdot y$$

Ved at indsætte at $y = 12 - x$ fås formelen

$$A(x) = x \cdot (12 - x)$$

Ved at gange x ind i parentesen fås at

$$A(x) = -x^2 + 12x$$

For at bestemme maksimum, differentieres denne funktion

$$A'(x) = -2x + 12$$

Nu løses ligningen $A'(x) = 0$

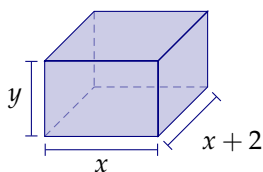
$$0 = -2x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Det størst mulige areal er når $x = 6$. ■

■ **Eksempel 108 — Optimering af volumen.** En kasse skal have overfladearealet 400 cm^2 , siderne har længderne x , $x + 2$ og y .



Bestem det størst mulige volumen.

Overfladearealet af kassen er

$$400 = 2 \cdot x \cdot (x + 2) + 2 \cdot y \cdot x + 2 \cdot y \cdot (x + 2)$$

I denne ligning isoleres y .

Maple

```
simplify(400 = 2*x*(x+2)+2*x*y+2*y*(x+2))
```

$$400 = 2x^2 + (4y + 4)x + 4y$$

```
isolate(400 = 2*x^2 + (4*y + 4)*x + 4*y, y)
```

$$y = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4}$$

Volumen er

$$V = y \cdot x \cdot (x + 2)$$

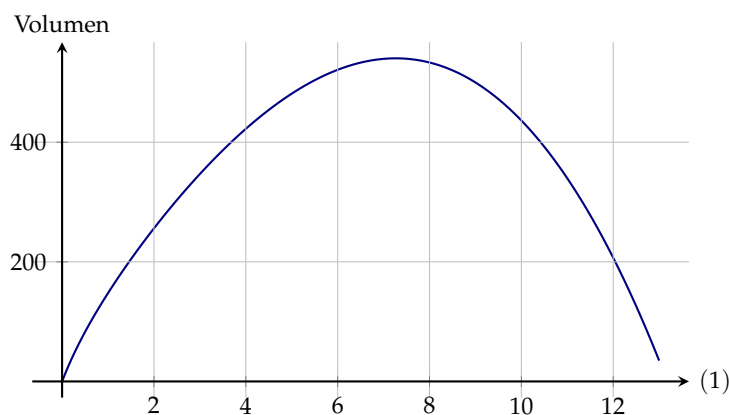
I denne ligning indsættes $y = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4}$

$$V(x) = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4} \cdot x \cdot (x + 2)$$

Ved at tegne grafen for V , ses at maksimum ligger mellem 0 og 13.

Maple

```
f(x) := (2*x^2 + 4*x - 400) / (-4*x - 4) * x * (x + 2)
plot(V(x)=0, x=0..13)
```



For at bestemme det maksimale volumen løses ligningen $V'(x) = 0$.

Maple

```
fsolve(V'(x)=0, x=0..13)
```

7.265234251

Det maksimale volumen er når x er 7,3 cm. Det størst muligt rumfang beregnes ved at bestemme værdien af $V(7,3)$.

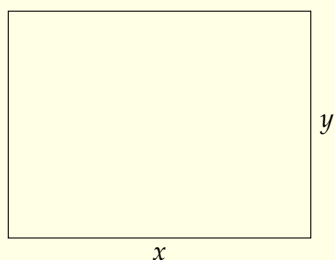
Maple

```
V(7.265234251)
```

540.3132864

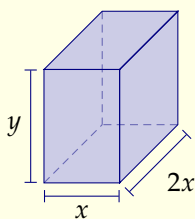
Det størst mulige volumen er 540 cm^3 . ■

Øvelse 132 I et rektangel er den samlede længde af de fire sider 16 cm



Bestem x så arealet af rektanglet er størst muligt.

Øvelse 133 En kasse skal have overfladearealet 500 cm^2 , siderne har længderne x , $2x$ og y .



Bestem det størst mulige volumen.

8.9 Eksamensspørgsmål

- Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotienten af $\sqrt{x}$
- Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotienten af $\frac{1}{x}$
- Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotienten af $(f + g)(x)$
- Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotienten af $k \cdot f(x)$

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispienbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.