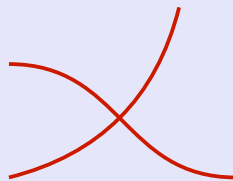


Dennis Pipenbring

Mathematik B-niveau

- stx 2017



matX
2020

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispipenbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

Matematik B-niveau - stx 2017

Bogen er skrevet i tekstbehandlingsprogrammet $\text{\LaTeX}$ og figurerne er lavet i TikZ. Der er billeder som er genereret i GeoGebra og i Maple.

© Dennis Pipenbring, matX ApS 2020

1. udgave

Udgivet af matX ApS

ISBN 978-87-93632-03-5

Forord

Denne bog er skrevet til stx B niveau efter 2017 bekendtgørelsen.

Jeg har lavet en række vejledninger i hvordan IT-værktøjerne Maple og GeoGebra kan anvendes til at løse en række problemstillinger. Disse vejledninger findes i boksene

Maple

Tekst i kursiv er forklaringer til udregninger.

Tekst i courier er kommandoer.

Maple output er centeret

GeoGebra

Tekst i kursiv er forklaringer til udregninger.

Tekst i courier er kommandoer.

→ GeoGebra output

Der er tilknyttet en række videoer og opgaver til materialet, disse kan tilgås ved at klikke på QR-koden i margen. QR-koden scannes hvis man ønsker at tilgå videoerne via en ekstern enhed med kamera.

For at opnå en ensartet notation og konsistens i forhold til IT-værktøjerne, er punktum anvendt som decimalseparator. Mellemrum er brugt til at gruppere cifre, når der er 5 eller flere cifre sammen.

Opgaverne er opdelt i to grupper

Øvelse 1

Disse opgaver skal løses uden IT-værktøj.



Link til min YouTube-kanal.
Husk af abonnere.

Øvelse 2

Disse opgaver skal løses med IT-værktøj.

I appendikset finde problemstillinger til gruppedelen af den mundtlige eksamen og spørgsmål til den individuelle del af den mundtlige eksamen.

Kommentarer, rettelser og forslag til forbedringer eller nye videoer og/eller opgaver sendes til dp@matx.dk.

Indhold

Forord	3
1 Deskriptiv statistik	7
1.1 Observation og hyppighed	8
1.2 Frekvens	9
1.3 Kumulerede frekvenser	11
1.4 Gennemsnit	11
1.5 Diagrammer	12
1.6 Diskrete observationer	17
1.7 Indekstal	22
2 Sandsynlighedsregning	31
2.1 Sandsynlighed	31
2.2 Kombinatorik	37
3 Statistik	41
3.1 Binomialfordelingen	43
3.2 Binomialtest	51
3.3 Lineær regression	60
3.4 Modelkontrol	63
4 Funktioner	73
4.1 Lineære funktioner	75
4.2 Eksponentielle funktioner	91
4.3 Logaritmefunktioner	101
4.4 Mere om eksponentialfunktionen	106
4.5 Andengradspolynomium	109
4.6 Den inverse funktion til andengradspolynomiet . .	118
4.7 Polynomier generelt	120
4.8 Potensfunktion	123
4.9 De trigonometriske funktioner	129

4.10	Funktionskompositioner	134
5	Differentialregning	139
5.1	Grænseværdi	148
5.2	Kontinuitet	151
5.3	Differentialkvotienten	153
5.4	Væksthastighed	167
5.5	Tangentbestemmelse	169
5.6	Monotoniforhold	174
5.7	Ekstremum	178
5.8	Optimering	180
6	Opsparing og lån	187
7	Vektorer	205
7.1	Længden af en vektor	211
7.2	Vektor aritmetik	217
8	Analytisk geometri	253
8.1	Punkter og rette linjer	253
8.2	Cirkler	280
A	Mundtlig eksamen	289
A.1	Problemstillinger til gruppedel	290
A.2	Spørgsmål til individuel del	291

Deskriptiv statistik

I en verden med en endeløs strøm af data, skal data systematiseres og ordnes for at få overblik. Overblikket giver mulighed for at træffe de gode beslutninger. Beslutninger der fører til det gode liv.

Deskriptiv statistik er et redskab til at beskrive et datamateriale. Ofte vil et datamateriale være for omfattende til, at det er muligt at overskue og konkludere noget om, det blot ved at se på selve datamaterialet. Derfor er der udviklet forskellige metoder, modeller og tabeller, som gør det muligt at overskue store mængder af data, og på baggrund af disse modeller og tabeller er det muligt at drage konklusioner på baggrund af datamaterialet. Hvis man ikke forstår at læse tabeller og hvis man ikke ved, hvordan man skal forstå de statistiske begreber, kan man *ikke* selv drage konklusioner eller forstå andres konklusioner. I det følgende vil data ofte være simpelt for, at give plads til forståelsen, inden de store datasæt præsenteres. Det er først i de store datasæt, at tabeller, figurer og modeller har deres berettigelse.

Som eksempel på anvendelse af deskriptiv statistik ses på ulighed. Ulighed mellem mennesker er en rejse i tid og rum. Når man er ung og studerende har man en lille indkomst og en lille eller ingen formue, måske endda en lille gæld. Når man lige har etableret sig med hus, bil og børn og lige er begyndt at arbejde, har man en større indkomst og en stor gæld. Når man er blevet ældre og har haft en del år med egen virksomhed eller på arbejdsmarkedet som lønmodtager, har man en stor indkomst og en lille gæld og måske også en formue. Når man er gået på pension har man en lille indkomst og en stor formue. Hvordan skal man så måle den økonomiske ulighed?

1.1 Observation og hyppighed

Den mindste enhed i et datasæt er en observation. Her ses på disponibel personlig indkomst fra <https://statistikbanken.dk/INDKP106> fra år 2017. For at gøre data mere overskuelige har jeg lagt nogle intervaller sammen. For en nemheds skyld omskriver jeg intervallerne 150 000 - 199 999, som de står i Statistikbanken, til 150 000 - 200 000. Grunden til dette er, at næste interval starter ved 200 000 og derfor vil et IT-værktøj ikke vide hvad der sker i intervallet fra 199 999 til 200 000.

<i>Indkomst</i>	<i>Hyppighed</i>
Under 150 000 kr.	1 483 334
150 000 - 200 000 kr.	861 705
200 000 - 250 000 kr.	734 849
250 000 - 300 000 kr.	598 537
300 000 - 400 000 kr.	641 239
400 000 - 500 000 kr.	229 766
500 000 kr. og derover	195 171
I alt	4 744 601

Tabel 1.1: Personlig disponibel indkomst med hyppighed.

■ **Eksempel 1** Antallet af personer med en indkomst under 250 000 kr beregnes ved at lægge de første tre indkomstintervaller sammen.

$$1\,483\,334 + 861\,705 + 734\,849 = 3\,079\,888$$

■

Øvelse 1 Beregn antallet af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 500 000 kr

Øvelse 2 Opstil fire tilsvarende hyppighedstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Gem data i en fil i jeres IT-værktøj fx Maple. Brug ikke Excel selvom det virker som den mest enkle løsning i begyndelsen. Brug tabellen <https://statistikbanken.dk/INDKP106>.

1.2 Frekvens

Definition 1 Frekvensen er hyppigheden divideret med det totale antal observationer.

$$\text{Frekvens i procent} = \frac{\text{Hyppigheden}}{\text{Det totale antal observationer}} \cdot 100\%$$



Video der forklarer beregning af frekvens.

■ **Eksempel 2** Frekvensen af personer med en indkomst under 100 000 kr.

$$\frac{861\,705}{4\,744\,601} \cdot 100\% \approx 18\%$$

■

Øvelse 3 Beregn frekvensen af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 400 000 kr.

Det er en fordel at bruge et IT-værktøj, hvis der skal laves flere beregninger og særligt hvis der skal tegnes diagrammer. Her introduceres Maple som IT-værktøj. Det er særligt vigtigt at bemærke at i Maple bruges decimal punktum. Statistikbanken bruger punktum som tusindtalsseparator, og det betyder, at tal der i statistikbanken står som 50.000, i Maple skal skrives 50000 uden punktum. Statistikbanken bruger decimal komma, og det betyder at der i statistikbanken står 54.623,75, i Maple skal det skrives 54623.75 uden tusindtalsseparator og med decimal punktum.

En anden vigtigt notation i Maple er notationen for et interval. I statistikbanken står der 25.000 - 50.000, i Maple skal de skrives 25000..50000. Der bruges altså to punktummer i stedet for en streg.

Bemærk at der ikke er en øvre og nedre grænse i statistikbanken. Disse grænser skal senere bruges i beregninger og derfor vælges 0 kr som den nedre grænse og 1 000 000 kr. som den øvre grænse. I virkeligheden er den nedre grænse negativ, fordi personer med en personlig virksomhed godt kan have en negativ indkomst i enkelte år, fordi virksomheden har givet underskud. Den øvre grænse er også langt over 1 000 000 kr., men der er så få der tjener så høj en løn over lang tid.

Maple

with(Gym):

```
data:= [ [ 0 .. 150000, 1483334 ],  
         [ 150000 .. 200000, 861705 ],  
         [ 200000 .. 250000, 734849 ],  
         [ 250000 .. 300000, 598537 ],  
         [ 300000 .. 400000, 641239 ],  
         [ 400000 .. 500000, 229766 ],  
         [ 500000 .. 1000000, 195171 ] ] :
```

frekvensTabel(data, output = tabel)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 150000	1483334	31.3	31.3
150000 .. 200000	861705	18.2	49.4
200000 .. 250000	734849	15.5	64.9
250000 .. 300000	598537	12.6	77.5
300000 .. 400000	641239	13.5	91.0
400000 .. 500000	229766	4.8	95.9
500000 .. 1000000	195171	4.1	100.0



Video der viser hvordan der kan arbejdes med grupperede observationer i Maple.

Det er værd at bemærke at summen af frekvenserne altid skal være 100 %. Hvis det ikke er tilfældet, er der lavet en regnefejl.

Øvelse 4 Opstil frekvenstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug hyppighedstabellerne fra tidligere.

Øvelse 5 Benyt frekvenstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige til at bestemme hvor mange procent der tjener mellem 200 000 kr. og 400 000 kr.

Øvelse 6 Kommentér forskellen mellem indkomsten for de fire aldersgrupper. Hvilken ekstra information fås ved at beregne frekvensen?

1.3 Kumulerede frekvenser

Den kumulerede frekvens af en observation er frekvensen af alle observationer mindre end observationen.

■ **Eksempel 3** Den kumulerede frekvens for en disponibel personlig indkomst på 400 000 kr. er

$$31.3 + 18.2 + 15.5 + 12.6 + 13.5 = 91.0$$

Det betyder at 91% af personerne har en disponibel personlig indkomst under 400 000 kr. Der er derfor 9 % der har en disponibel personlig indkomst over 400 000 kr. ■

Øvelse 7 Bestem de kumulerede frekvenser for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

Øvelse 8 Benyt de kumulerede frekvenser for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige til at bestemme hvor mange procent der tjener over 400 000 kr.



Video der viser hvordan kumulerede frekvenser bestemmes.

1.4 Gennemsnit

Det samlede gennemsnit udregnes ved at gange intervalmidtpunkterne med frekvensen for hvert interval og lægge resultaterne sammen.

■ **Eksempel 4** Gennemsnittet af den personlige disponible indkomst

$$31.3 \cdot \frac{0 + 150\,000}{2} + 18.2 \cdot \frac{150\,000 + 200\,000}{2} + \dots \approx 224\,717$$

Den gennemsnitlige personlige indkomst er 224 717 kr. ■

Bemærk at middeltallet skal være et tal der ligger mellem det højeste og det laveste tal i datasættet, ellers er der lavet en regnefejl. Denne måde at beregne gennemsnittet kan godt give et andet resultat end, hvis alle observationsværdier er kendt.



Video der forklarer hvordan gennemsnit kan beregnes.

Øvelse 9 Bestem de gennemsnitlige indkomster for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen gennemsnit bruges.

Maple

```
with(Gym):  
gennemsnit(data)  
  
224717.257573398
```

1.5 Diagrammer

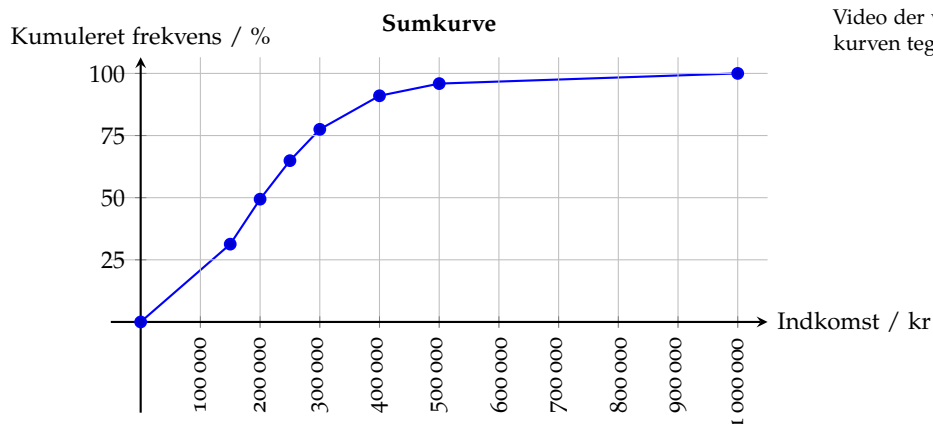
Et diagram er en grafisk måde at illustrere data på. Her ses på tre diagrammer.

1.5.1 Sumkurve

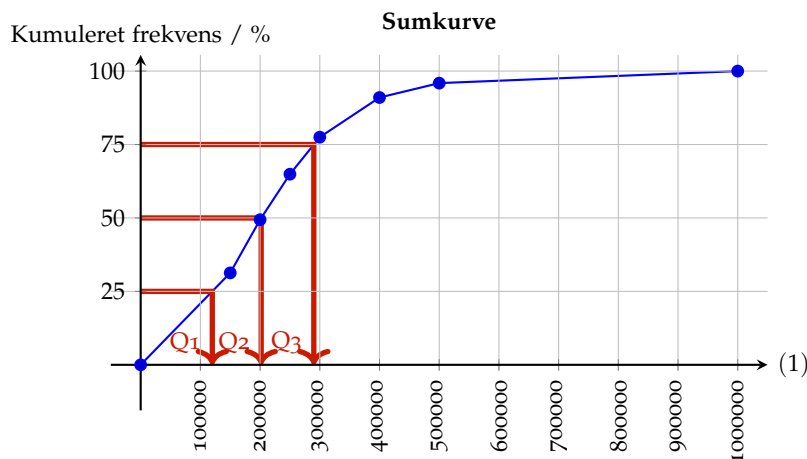
Sumkurven tegnes ved at afmærke den summerede frekvens som y -værdien og endepunkterne af de tilhørende intervaller som x -værdien i et koordinatsystem. Der ud over afmærkes startpunktet af det første interval på x -aksen, som i dette tilfælde er 0. På grafen er disse punkter markeret med •. Herefter sættes streger mellem punkterne.



Video der viser hvordan sumkurven tegnes.



Kvartilerne aflæses ved at gå fra hhv. 25 %, 50 % og 75 % på y -aksen til kurven og derefter ned på x -aksen og aflæse kvartilerne.



<i>Symbol</i>	<i>Kvartil</i>	<i>Indkomst</i>
Q₁	Nedre kvartil	119 950 kr.
Q₂	Median	201 850 kr.
Q₃	Øvre kvartil	289 980 kr.



Video der viser hvordan kvartilerne aflæses.

Tallene 119 950 kr., 201 850 kr. og 289 980 kr. er kvartilsatset. Det udvidede kvartilsæt indeholder også den største og mindste værdi.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen `plotSumkurve` bruges.

Maple

```
plotSumkurve(data)
```

En sumkurve kan også anvendes til at aflæse hvor mange procent der er indenfor et givet interval. På sumkurven ses at 83% har en indkomst under 340 000. På sumkurven ses at 35% har en indkomst der er 160 000 kr. eller under, og der er 66% der har en indkomst der er 255 000 kr. eller under. Ved at trække de to procenttal fra hinanden, fås det at 31% har en indkomst mellem 160 000 kr. og 255 000 kr.

For at aflæse på sumkurven kan kommandoen `sumkurve` anvendes.

Maple

```
f(x):=sumkurve(data, x)
```

$$f := x \mapsto \text{sumkurve}(\text{data}, x)$$

```
f(340000)
```

0.829346998830882

```
solve(f(x)=0.35)
```

160286.3712

```
solve(f(x)=0.66)
```

254306.2217

Øvelse 10 Tegn sumkurven og aflæs kvartilerne for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

Øvelse 11 Udregn hvor mange procent af de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige der har en indkomst mellem 150 000 kr. og 250 000 kr.

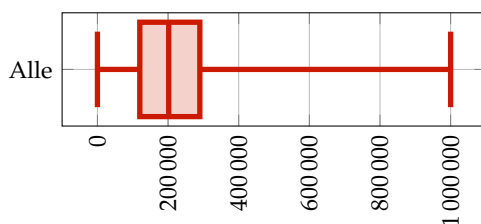
Øvelse 12 Fattigdomsgrænsen kan fx sættes ved 50% af medianindkomsten.

1. Hvad er så fattigdomsgrænsen for den personlige disponible indkomst i kr.?
2. Hvor mange procent af personerne er så fattige?
3. Bestem fattigdomsgrænsen for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.
4. Hvor mange procent i hver af de fire aldersgrupper, som er fattige relativt til deres egen gruppe og relativt til alle.

1.5.2 Boksplot

Boksplot kan tegnes ud fra det udvidede kvartilsæt.

Deskriptor	Indkomst (kr.)
Mindste værdi	0
Første kvartil	119 950
Anden kvartil / median	201 850
Tredje kvartil	289 980
Største værdi	1 000 000



Formålet med boksplottet er at se fordelingen af indkomsterne. I boksplottet inddeles data i fire lige store dele. 25 % af personerne ligger mellem mindste værdi og første kvartil og 25 % af personerne ligger mellem første og anden kvartil osv.

Hvis data er indlæst kan en boksplot i Maple tegnes med kommandoen boksplot.

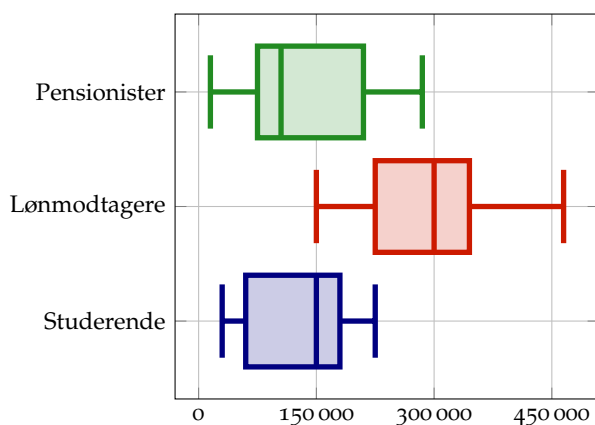
Maple

```
with(Gym):  
boksplot(data)
```

Boksplottet til at sammenligne to eller flere datasæt. Ét udvidet kvartilsæt bestemmes for hver af datasættene, og boksplottene tegnes i samme koordinatsystem.



Video der forklarer hvordan et boksplot tegnes.



Skal to boksplot sammenlignes og er data indlæst som dataA og dataB kan boksplot også benyttes.

Maple

```
with(Gym):
boksplot(dataA,dataB)
```

Skal tre eller flere boksplot tegnes, kan Statistics-pakken bruges med kommandoen BoxPlot. Her skal mindste observationsværdi, første kvartil, anden kvartil, tredje kvartil og største observationsværdi indtastes.

```
BoxPlot([min, Q1, Q2, Q3, max])
```

Med denne kommando er det også muligt at sætte labels på data. Det er også muligt at sætte egne farver på boksene, se Maples hjælpefunktion.

Maple

```
Statistics[BoxPlot]([
  [1, 2, 3, 4, 6],
  [1.4, 3, 5, 6.5, 9],
  [3.4, 4.5, 5, 6, 7]],
datasetlabels = [Studerende, Lønmodtagere,
Pensionist])
```


Øvelse 13 Tegn boksplottet for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige i samme koordinatsystem.

Øvelse 14 Kommentér forskellen i indkomsten for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige med udgangspunkt i boksplottet.

1.6 Diskrete observationer

I det tidligere afsnit sås på indkomst, der af praktiske hensyn var inddelt i intervaller. Men den enkelte person har ikke et indkomstinterval, men en faktisk indkomst i kroner og øre. Nogle gange inddeles data ikke i intervaller, et eksempel kunne være folketingsvalg. Her ses på folketingsvalget 2011, data er fra tabellen <http://www.statistikbanken.dk/FV11TOT>.



Video der viser hvordan deskriptiv statistik laves på ugrupperede observationer.

Parti	Nordsjælland	Vestjylland
A. Socialdemokratiet	54 182	76 208
B. Radikale Venstre	33 537	24 090
C. Det Konservative Folkeparti	19 765	12 677
F. Socialistisk Folkeparti	21 012	26 819
I. Liberal Alliance	20 613	16 061
K. Kristendemokraterne	1171	9664
O. Dansk Folkeparti	30 279	40 378
V. Venstre	91 870	113 443
Ø. Enhedslisten	15 062	11 505
I alt	287 491	330 005

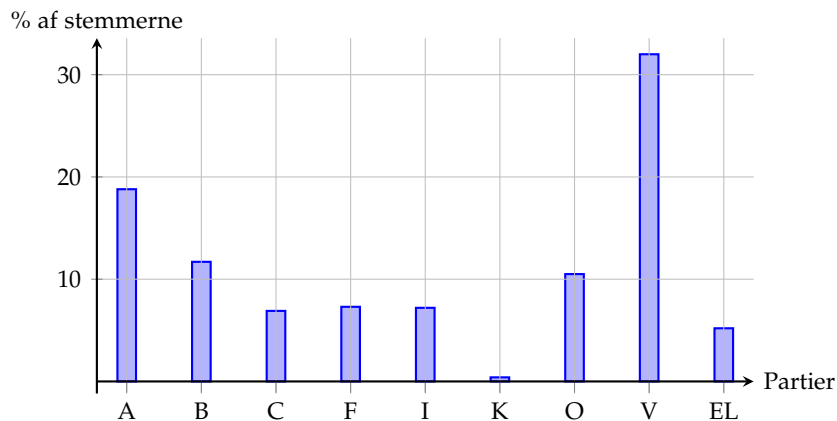
Antallet af stemmer for Vestjylland omregnes til procent af det samlede antal stemmer i Vestjylland. Omregningen af stemmerne til procent giver en idé om hvordan antallet af mandater vil blive fordelt. Men fordelingen af mandater er ikke helt så enkel. Danmarks Statistik har lavet en god vejledning til, hvordan mandaterne fordeles.

Beregningsmodel til mandatfordeling ved folketingsvalg:
<https://www.dst.dk/valg/beregninger>

<i>Parti</i>	<i>Hyppighed</i>	<i>Frekvens (%)</i>
A. Socialdemokratiet	76 208	23.0
B. Radikale Venstre	24 090	7.3
C. Det Konservative Folkeparti	12 677	3.8
F. Socialistisk Folkeparti	26 819	8.1
I. Liberal Alliance	16 061	4.9
K. Kristendemokraterne	9664	2.9
O. Dansk Folkeparti	40 378	12.2
V. Venstre	113 443	34.3
EL. Enhedslisten	11 505	3.5
I alt	330 845	100.0

Øvelse 15 Beregn frekvensfordelingen på partier ved folketingsvalget 2011 for Nordsjælland.

Pindediagrammet tegnes ved at angive observationsværdierne på x -aksen. På y -aksen angives frekvensen.



Øvelse 16 Tegn et pindediagram der viser frekvensfordelingen af stemmer ved folketingsvalget 2011 for Nordsjælland.

Data som fx partier er ikke ordinale, hvilket betyder at de ikke kan ordnes. Sagt på en anden måde så kan det ikke siges at socialdemokratiet er før eller efter radikale venstre. Derfor giver

det ingen mening af beregne kumuleret frekvens. For at kumuleret frekvens skal give mening, skal data være ordinale. Her ses på karakter-data. Karakterer kan ordnes, fx er 02 mindre end 4. Med den kumulerede frekvens følger også trappediagram, kvartiler og boksplot. For ordinale data kan gennemsnit også beregnes.

I tabellen ses karakterfordelingen hos en årgang elever til skriftlig eksamen i matematik B-niveau.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Elever	902	3932	2314	4242	7293	2341	1731

For at beregne frekvensen af karaktereren 4, divideres hyppigheden 4242 med det total antal 22 755.

$$\frac{4242}{22755} \cdot 100 = 18.64$$

Karakter	Hyppighed	Frekvens (%)	Kumuleret (%)
-3	902	4.0	4.0
0	3932	17.3	21.2
2	2314	10.2	31.4
4	4242	18.6	50.1
7	7293	32.0	82.1
10	2341	10.3	92.4
12	1731	7.6	100.0
Total	22 755	100	

Den kumulerede frekvens kan bruges til fx at se hvor mange procent af eleverne der ikke består. Her ses at det er 21.2 %.

Øvelse 17 Bestem frekvensfordelingen for de elever som bestod. Hvordan passer denne fordeling med ministeriets målsætning? Det er ministeriets målsætning at fordelingen er

Karakter	02	4	7	10	12
Elever	10 %	25 %	30 %	25 %	10 %



Video der forklarer beregningen af frekvensen.



Video der forklarer beregningen af den kumulerede frekvens.

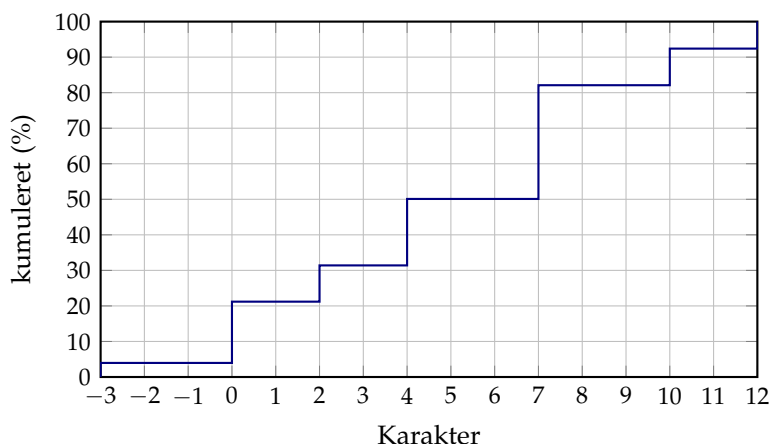
Maple

```
with(Gym):  
  
data:=  
[  
  -3  902  
   0 3932  
   2 2314  
   4 4242  
   7 7293  
  10 2341  
  12 1731  
]  
  
frekvensTabel(data)
```

Den kumulerede frekvens for karakteren 4, er den procentuelle andel af elever der har fået karakteren 4 eller mindre. Den beregnes ved at lægge frekvensen sammen for karaktererne -3, 00, 02 og 4.

$$3.96 + 17.28 + 10.17 + 18.64 = 50.05$$

På trappediagrammet angives observationsværdierne på x -aksen og den kumulerede frekvens på y -aksen. Trappediagrammet kan bruges til at få en idé om fordelingen af karaktererne, men det vigtigste er at se hvor mange procent der ligger under (og over) en given observationsværdi. Det er også trappediagrammet der viser hvor kvartilerne er.



I Maple kan trappediagrammet tegnes med kommandoen plot-Trappekurve, hvis data og Gym-pakken er indlæst.



Video der forklarer hvordan trappediagrammet tegnes.

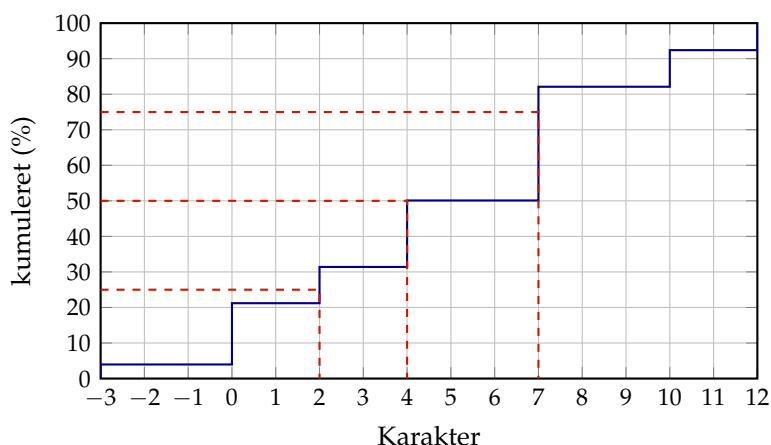


Video der forklarer hvordan kvartilerne aflæses på trappediagrammet.

Maple

```
plotTrappekurve(data)
```

Kvartilsættes aflæses på trappediagrammet til 2, 7 og 10, ved hhv. 25 %, 50 % og 75 %.



Kvartilsættet er 2, 4 og 7.

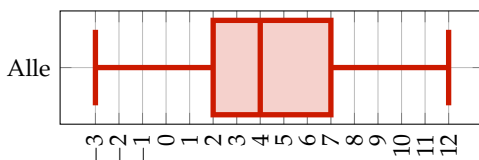
I Maple kan kvartilerne bestemmes med kommandoen kvartiler, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

Maple

```
kvartiler(data)
```

```
[2., 4., 7.]
```

Boksplottet kan tegnes med det udvidede kvartilsæt.



Video der forklarer hvordan boksplottet tegnes.

Boksplottet består af fem lodrette streger. Den første lodrette streg er ved den mindste observationsværdi, der i dette tilfælde er -3. Den anden lodrette streg er ved den første kvartil, der i dette tilfælde er 2. Den tredje lodrette streg er ved den anden kvartil -

der også kaldes medianen - som i dette tilfælde er 4. Den fjerde lodrette streg er tredje kvartil, der i dette tilfælde er 7. Den femte lodrette streg er den største observationsværdi, der i dette tilfælde er 12.

I Maple kan boksplottet tegnes med bokspot.

Maple

`bokspot(data)`

Øvelse 18 Nedenstående tabel viser fordelingen af tænder der har eller har haft caries hos 15-årige.

Tænder	0	1	2	3	4	5	6
15-årige	7926	1929	1309	758	482	344	206

- Bestem den kumulerede frekvens af caries hos 15 årige og tegn trappediagrammet.
- Bestem kvartilsættet og gennemsnittet.
- Tegn boksplottet for caries hos 15 årige.

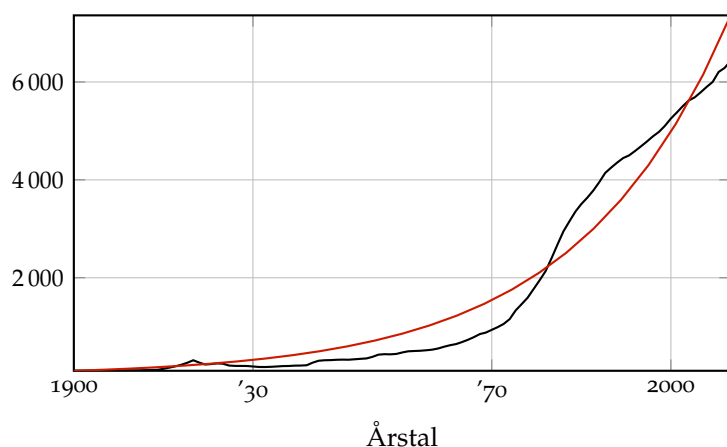
1.7 Indekstal

Indekstal anvendes for at sammenligne størrelser i forhold til én given værdi. Dette kan bruges til at undersøge hvordan en værdi ændrer sig over tid i relation til andre værdier. Her ses på forbrugerprisindekset i Danmark i perioden 1900-2010 data kommer fra tabellen <http://statistikbanken.dk/PRIS8>.

Årstal	2012	2013	2014	2015	2016
Forbrugerprisindeks	6 768	6 821	6 860	6 891	6 909

Forbrugerprisindekset er et indeks der viser udviklingen i prisen for de vare som typisk købes af forbrugere. Dette indeks er udregnet af Danmarks Statistik siden 1900. Den gennemsnitlige vækst i forbrugerprisindekset har i perioden 1900-2010 været 3.987% (den røde linie). Dette er bestemt ved at lave eksponentiel regression på

forbrugerprisindekset med år 1900 som år 0.



Her ses nogle eksempler på hvad indekstal i øvrigt kan bruges til.

■ **Eksempel 5** Indekset anvendes til at omregne priser. En vare der I 1985 (indeks: 3507) kostede 75 kr. kan omregnes til en 2010 (indeks: 6432) pris.

$$\frac{75 \text{ kr.}}{3507} \cdot 6432 = 173.55 \text{ kr.}$$

■

■ **Eksempel 6** En vare der I 2000 (indeks: 5253) kostede 200 kr. kan omregnes til en 1970 (indeks: 937) pris.

$$\frac{200 \text{ kr.}}{5253} \cdot 937 = 35.67 \text{ kr.}$$

■

En anden anvendelse af indekstal er for at lave en relativ sammenligning af prisudviklingen for to vare. Her ses et eksempel på sammenligningen af aktiekursen for to forskellige aktier.

■ **Eksempel 7** Tabellen herunder viser kurserne for Carlsberg B A/S og Novo Nordisk B A/S fra 1/11-2017 til 10/11-2017.



Video der viser hvordan indekstal kan beregnes i et regneark.

Dato	1/11	2/11	3/11	9/11	10/11
Carlsberg B A/S	731	730	743	749.5	748
Novo Nordisk B A/S	317.5	321.5	317.5	321.0	312.3

Kilde: euroinvestor.dk - Historiske data

- a) Indeksere kurserne for Carlsberg B A/S og Novo Nordisk B A/S med 1/11 som basis dag.

For Carlsberg B A/S er 731 lig indeks 100. Indekset for 730 kan beregnes på følgende måde

$$\frac{730}{731} \cdot 100 = 99.86$$

På tilsvarende vis udregnes indekssende for de øvrige kurser. I tabel-form ser det således ud.

Dato	1/11	2/11	3/11	9/11	10/11
Carlsberg B A/S	100	99.86	101.64	102.53	102.33
Novo Nordisk B A/S	100	101.26	100	101.10	98.36

Fordelen ved at indeksere kurserne, er det de bliver lettere at sammenligne. Det er nu muligt at sige at kursen på Carlsberg B A/S er vokset med 2.33 % i perioden og Novo Nordisk B A/S er aftaget med 1.64 % i perioden. ■

Øvelse 19 Tabellen viser antallet af personbiler pr. 1000 indbyggere i Danmark (pr. 1. januar). (Kilde: Vejdirektoratet)

År	1950	2000	2010
Antal af personbiler pr. 1000 indb.	26.2	345.8	
Indekstal (basisår: 1950)	100		1462

- a) Bestem indekstallet for 2000.
- b) Bestem antallet af personbiler pr. 1000 indbyggere i Danmark 1. januar 2010.

Øvelse 20 Tabellen viser den gennemsnitlig pris på en 1-værelses lejlighed i København.

År	2014	2016
1-værelses lejlighed	5467	6487

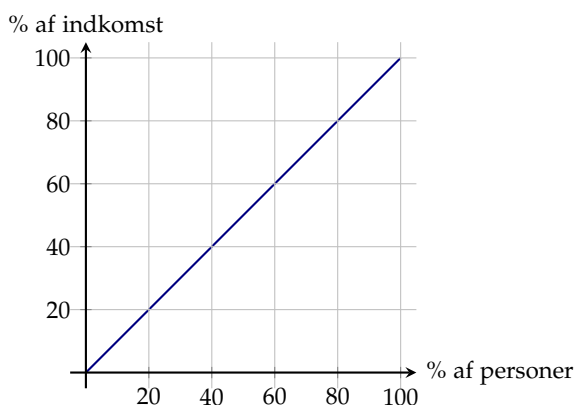
Indekset for den månedlige SU har udviklet sig som nedenstående tabel (basisår 2014).

År	2014	2016
SU indeks	100	101.75

- Omregn den gennemsnitlig pris på en 1-værelses lejlighed i København til indekstal med basisår 2014.
- Undersøg, om den månedlige SU eller prisen på en 1-værelses lejlighed i København er procentvis vokset mest fra 2014 til 2016.

1.7.1 Lorenzdiagram og Gini koefficient

Lorenzdiagrammet viser hvor stor uligheden er fx i forhold til indkomsten. I figuren herunder er der fuldstændig lighed idet de 10 % af personerne, som har den laveste indkomst, også har 10 % af den samlede disponible indkomst. Og 20 % af personerne, der har den laveste indkomst, også har 20 % af den samlede disponible indkomst osv. Sagt på en anden måde: Alle tjener det samme.



For at tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koefficienten, anvendes tabellen <https://statistikbanken.dk/IFOR21>. I denne tabel findes decilgrænserne for 1. til 9. decil. I decilfordelingen er befolkningen inddelt efter indkomst i ti lige store grupper, sådan at de 10 % med den laveste indkomst er i den 1. decil og de næste 10 % ligger i 2. decil. En decilgrænse er den indkomst, der ligger mellem to deciler. For eksempel er 157 851 kr de beløb der ligger mellem 2. og 3. decil. Det betyder at 20 % af befolkningen tjener mindre end dette beløb og 80 % tjener mere end dette beløb. Se også Danmarks Statistiks publikation »Decilgrupper og decilgrænser« fra September 2017 (3 sider).

For at kunne tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koefficienten skal der være en øvre grænse for den 10. decil. I tabel <http://statistikbanken.dk/IFOR31> kan gennemsnittet findes for alle 10 deciler og det giver en idé om hvad en fornuftig øvre grænse for 10. decil kan være. Prøv at ændre den øverste grænse fx til 800 000 og se hvad det gør ved Lorenzkurven.

Fordi grupperne indeholder det samme antal personer, kan tallene bruges direkte til at tegne Lorenzdiagrammet. Det er altså ikke nødvendigt at beregne den samlede indkomst for den enkelte gruppe, ved at gange gennemsnittet med antallet af personer i gruppen. Derefter beregnes den samlede indkomst for hele befolkningen, ved at lægge den samlede indkomst for hver af grupperne sammen, for så derefter at beregne den enkeltes gruppes andel af den samlede indkomst. Havde grupperne indeholdt forskellige antal personer, skulle der have været korrigeret for dette.

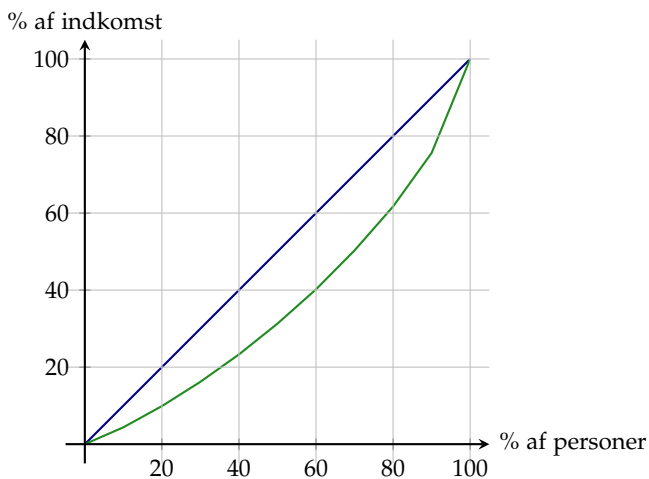
I Maple kan kommandoen `plotLorenzdiagram` bruges på data fra statistikbanken. Bemærk, at det er de kumulerede frekvenser, der skal bruges i kommandoen `plotLorenzdiagram`. Derfor bruges kommandoen `kumuleretFrekvens` også på data.

Tabel 1.2: Decilgrænser for den disponible indkomst i hele befolkningen i 2015.

Decil	Decilgrænse 2015
1. decil	125 997
2. decil	157 851
3. decil	180 497
4. decil	205 139
5. decil	230 140
6. decil	256 941
7. decil	288 152
8. decil	329 248
9. decil	399 606

Maple

```
with(Gym):  
  
data:=  
[  
  [0..0.1, 125997],  
  [0.1..0.2, 157851],  
  [0.2..0.3, 180497],  
  [0.3..0.4, 205139],  
  [0.4..0.5, 230140],  
  [0.5..0.6, 256941],  
  [0.6..0.7, 288152],  
  [0.7..0.8, 329248],  
  [0.8..0.9, 399606],  
  [0.9..1, 700000]  
]  
  
plotLorenzdiagram(kumuleretFrekvens(data))
```



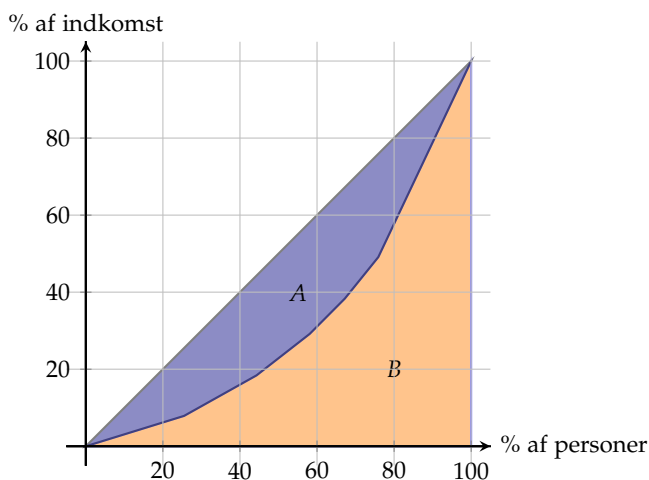
Øvelse 21 Tegn Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister.

Øvelse 22 Sammenlign Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister og diskuter årsager til forskellene.

Øvelse 23 I stedet for at bruge decilgrænserne til at tegne Lorenzdiagrammet kan gennemsnittet også bruges, men hvad er mest rigtigt? Diskuter hvilke forudsætninger der implicit antages ved hver af de to metoder.

Gini-koefficienten er et tal mellem 0 og 1 der viser uligheden i indkomstfordelingen i en bestemte gruppe, fx studerende. Hvis alle har samme indkomst, er Gini-koefficienten 0 og hvis én har hele indkomsten er Gini-koefficienten 1.

Gini-koefficienten G er defineret som forholdet mellem arealet mellem linien der beskriver lighed og Lorenzkurven (A) og arealet mellem linien der beskriver lighed og x -aksen. Arealet mellem Lorenzkurven og x -aksen kaldes B .

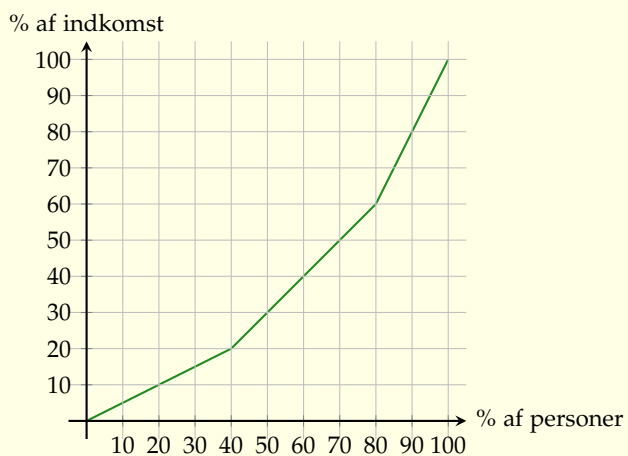


Formlen for Gini-koefficienten er $G = \frac{A}{A + B}$

Da $A + B = \frac{1}{2}$ er $G = \frac{A}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot A$

Da det er nemmest at udregne arealet B omskrives formelen idet $A = \frac{1}{2} - B$. $G = 2 \cdot (\frac{1}{2} - B) = 1 - 2B$

Øvelse 24 Hvordan kan Gini-koefficienten beregnes ud fra følgende Lorenzdiagram.



2

Sandsynlighedsregning

Ikke alt kan forudsiges. For at undersøge det tilfældige, laves sandsynlighedsregning. Det tilfældige kan være et eksperiment eller en computersimulering. Start med en simpel simulering af 50/50.

2.1 Sandsynlighed

Øvelse 25 — Kast med mønt. Du skal bruge en mønt til dette eksperiment. I stedet for en mønt, kan der også bruges en terning fx hvor 1-3 er plat og 4-6 er krone.

- Kast med en mønt og prøv at forudsige resultatet.
- Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.
- Kast med én mønt 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige det samlede resultat.

Hvad sker der hvis der bliver flere mulig udfald? Prøv nu med en terning. Først kan 1 og 2 slås sammen til ét udfald. Det samme med 3 og 4. Og med 5 og 6.

Øvelse 26 — Kast med terning. Du skal bruge en terninger til dette eksperiment.

- Kast med én terning 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.
- Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.

Eksperimenter som ovenstående kaldes stokastiske eksperimen-

ter. Det er muligt at opskrive sandsynligheden for et udfald af kast med en mønt eller en terning, hvis det antages at alle udfald har samme sandsynlighed for kast med en ærlig¹ mønt er:

Udfald	Plat	Krone
Sandsynlighed	0.5	0.5

¹ En ærlig mønt eller terning, har samme sandsynlighed for alle udfald.

For at kunne regne for eksempel gennemsnit gives alle udfald en numerisk værdi, dette kaldes for den stokastiske variabel, der ofte har symbolerne X , Y og Z . I dette tilfælde har plat værdien 0 og krone værdien 1.

X	0	1
$P(X=u)$	0.5	0.5

Værdierne som den stokastiske variabel kan antage, kaldes for udfaldsrummet. Udfaldsrummet siges at være symmetrisk, hvis alle udfald har samme sandsynlighed. Dette kaldes også for den uniforme fordeling. Hvis den stokstiske variabel kun kan antage heltallige værdier kaldes fordelingen for diskret. Som eksempel på en diskret uniform fordeling ses på fordelingen der opstår når et tal mellem 1 og 20 udvælges tilfældigt. 7 tal mellem 1 og 20 udvalgt tilfældigt.

20, 3, 3, 19, 19, 14, 12

Her er det svært, næsten umuligt at vide hvilke tal der kommer frem, men udvælges 10 000 til ses et system hvor hvert udfald fremkommer ca. 5 % af gangene.

Definition 2 — Sandsynlighed.

$$P(H) = \frac{G}{M}$$

Hvor H er en hændelse, det kan være et enkelt udfald eller en gruppe af udfald. G er antallet af udfald hvor hændelsen indtræffer (gunstige udfald) og M er antallet af mulige udfald.

■ **Eksempel 8 — Simulering af tilfældige tal.** Maple kan lave en simulering der genererer tilfældige tal med kommandoerne `DiscreteUniformRandomVariable` (definition af den stokastiske variabel) og `Sample` (simulering der genererer datasæt). Husk på at det kræver

en del regnekraft, så hvis der udvælges en stor sample, vil det taget computeren meget lang tid og måske vil den ikke have nok hukommelse til at færdigøre beregningen.

Maple

```
with(Gym):
with(Student[Statistics]):
X := DiscreteUniformRandomVariable(1, 6):
data := Sample(X, 10000):
frekvensTabel(data)
```

Et eksempel på en frekvenstabel for simuleringen ser således ud.

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
1	1691	16.9	16.9
2	1685	16.9	33.8
3	1659	16.6	50.3
4	1689	16.9	67.2
5	1658	16.6	83.8
6	1618	16.2	100.0

Øvelse 27 Opskriv sandsynlighedsfeltet for kast med én ærlig 6-sidet terning.

Øvelse 28 Opskriv sandsynlighedsfeltet for træk af kort i et spil kort fordelt på kulør.

■ **Eksempel 9 — Simulering af kast med to tresidede terninger.** Ved kombination af forskellige udfald sker der noget, som er vigtigt at tage hensyn til. Her ses en simulering af kast med to tresidede terninger. Når datasættet genereres (*), bliver data sorteret, så 1, 3 og 3, 1 bliver samme kast. Ellers ville der komme flere udfald, og der ville være tale om en simulering af kast med to *forskellige* tresidede terninger.

Maple

```
with(Gym):  
with(Student[Statistics]):  
Den ene terning  
H := DiscreteUniformRandomVariable(1, 3):  
Den anden terning  
S := DiscreteUniformRandomVariable(1, 3):  
Antallet af kast med de to terninger.  
N := 10000:  
Øjene på den ene terning.  
HD := Sample(H, N):  
Øjene på den anden terning.  
SD := Sample(S, N):  
Datasættet med begge terninger sammen.  
data := [seq(sort([HD[n], SD[n]]), n = 1 .. N)]:(*)  
En frekvenstabel der viser datasættet.  
frekvensTabel(data)
```

Et eksempel på en frekvenstabel som kunne komme ud af simuleringen er

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
[1, 1]	1101	11.0	11.0
[1, 2]	2310	23.1	34.1
[1, 3]	2159	21.6	55.7
[2, 2]	1045	10.5	66.1
[2, 3]	2204	22.0	88.2
[3, 3]	1181	11.8	100.0

Øvelse 29 Ved kast med to tresidede terninger.

- Opskriv sandsynlighedsfeltet.
- Bestem sandsynligheden for at få to ens.
- Bestem sandsynligheden for at slå én to'er og én tre'er.

Øvelse 30 I et kortspil er der 52 kort. Der er 13 hjerter, 13 klør, 13 spar og 13 ruder.

- Bestem sandsynligheden for at trække fire klør.
- Bestem sandsynligheden for at trække to hjerter.
- Bestem sandsynligheden for at trække en hjerter og en spar.

2.1.1 Chancespil

I et chancespil kan der til hvert udfald knyttes en gevinst.

■ **Eksempel 10** I en e-tombola skal man trække to lodder. Der er tre forskellige typer af lod. En med et billede af en ♠, en med et billede af en ♥ og en med et billede af en ♦.

Udfaldsrummet for spillet er, idet rækkefølgen ikke har betydning.

u	♠♠	♥♥	♦♦	♠♥	♠♦	♥♦
---	----	----	----	----	----	----

Sandsynligheden for at trække en ♠ er 45 %. Sandsynligheden for at trække en ♥ er 35 %. Sandsynligheden for at trække en ♦ er 20 %. Sandsynligheden ændres ikke undervejs i spillet. Overvej hvordan dette spil kunne spilles med almindelige spillekort. Sandsynligheden for hvert udfald, kan så beregnes fx er

$$P(X = \diamond\diamond) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

Bemærk at

$$P(X = \spadesuit\heartsuit) = 2 \cdot 0.45 \cdot 0.35 = 0.315$$

fordi der er to mulige kombinationer ♠♥ og ♥♠.

Sandsynlighedstabellen for spillet.

u	♠♠	♥♥	♦♦	♠♥	♠♦	♥♦
$P(X = u)$	0.2025	0.1225	0.04	0.315	0.18	0.14

For at undersøge sandsynlighedstabellen beregnes den samlede sandsynlighed, som skal give 1.

$$0.2025 + 0.1225 + 0.04 + 0.315 + 0.18 + 0.14 = 1$$

Til hvert udfald tilføjes nu en gevinst i point. Dette kan gøres helt uafhængigt af sandsynlighederne. Gevinsterne er den del af spillet som er med til at gøre det motiverende at blive ved med at spille.

u	♠♠	♥♥	♦♦	♠♥	♠♦	♥♦
$P(X = u)$	0.2025	0.1225	0.04	0.315	0.18	0.14
Gevinst	4	10	30	2	5	6

Hvert udfald giver et bidrag til den gennemsnitlige udbetaling. Dette bidrag er sandsynligheden gange gevinsten. Bidraget fra ♥♠ er således

$$2 \cdot 0.315 = 0.63$$

Alle bidragene ses i tabellen. Overvej om det vil gøre spillet mere retfærdigt, hvis alle udfald har samme bidrag til den gennemsnitlige gevinst.

u	♠♠	♥♥	♦♦	♠♥	♠♦	♥♦
$P(X = u)$	0.2025	0.1225	0.04	0.315	0.18	0.14
Gevinst	4	10	30	2	5	6
Bidrag	0.81	1.225	1.2	0.63	0.9	0.84

Den gennemsnitlige udbetaling ved ét spil er summen af bidragene. I dette tilfælde er det 5.605. Det betyder, at for en indsats på 6 vil e-tombolaen vinde 0.395 i gennemsnit pr. spil. Set fra spillerenes synspunkt vil det kun være ♥♥ og ♦♦ som giver gevinst. Bliver spillet spillet 1 000 gange vil omsætningen være 6 000 og e-tombolaen vil have vundet 395 og det vil være udbetalt 5 605. Det giver en udbetalingsprocent omkring 93 %. I hvor mange af spillene vil spillerne have vundet? Hvordan vil det påvirke spillernes lyst til at spille igen? ■

Øvelse 31

Design dit eget spil.

2.2 Kombinatorik

Kombinatorik bruges til at udregne antallet af udfald i en situation eller eksperiment. Det bruges til at udregne både antallet af gunstige udfald og antallet af mulige udfald.

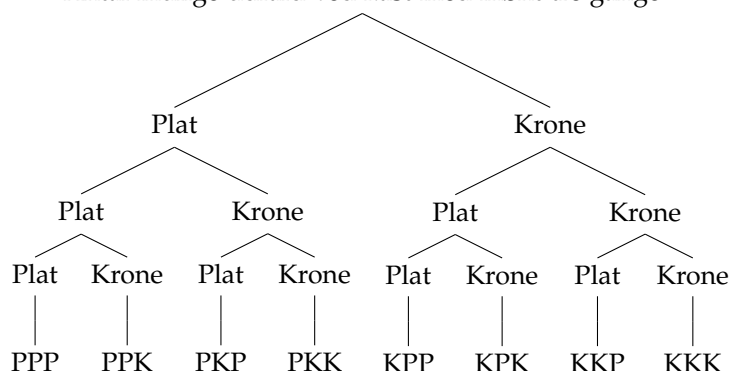
2.2.1 Multiplikationsprincippet

En computer er bygget op omkring 2-talssystemet. Det er fordi den enkleste måde at se et elektrisk signal på, er om den er tændt eller slukket. Tændt gives værdien 1 og slukket gives værdien 0.

En enkel måde at se effektiviteten af sådan et system er ved at tælle på dine fingre. Du har sikkert ti fingre. Hvis en finger er bøjet har den værdien 0 og hvis den er strakt har den værdien 1. For at undersøge hvor mange mulige måder dine fingre kan være indstillet på kan man bruge multiplikationsprincippet. Finger ét kan være bøjet eller strakt, det er to muligheder. Finger to kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2$ muligheder. Finger tre kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2 \cdot 2$ muligheder. Da du har ti fingre er det $2^{10} = 1024$ muligheder eller indstillinger. Det betyder at du med denne metode kan tælle til 1024 på dine fingre og ikke kun til 10.

En anden måde at visualisere multiplikationsprincippet er ved brug af tælletræer.

Antal mulige udfald ved kast med mønt tre gange



Men tælletræet viser også et anden ikke uvæsentligt element. Der er 8 forskellige kombinationer ved tre kast med en mønt, men

der er kun 4 forskellige, hvis rækkefølgen ikke tages i betragtning. Det betyder, at når tre mønter kastes samtidig, er der kun fire forskellige udfald og sandsynligheden for de fire udfald er ikke lige stor.

Øvelse 32 Lav et tælletræ for byg-selv burger og bestem hvor mange forskellige burgere du kan bygge. Du kan vælge grov eller hvid bolle. Okse, kylling eller vegetar bøf. Hvidløg eller burger dressing. Med eller uden ost.

Øvelse 33 I et forsøg bruges tre 6-sidede terninger.

- Lav et tælletræ for kast med tre 6-sidede terninger.
- Hvor mange forskellige udfald er der når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen?
- Bestem sandsynligheden for de forskellige udfald når der ikke tages hensyn til rækkefølgen.

2.2.2 Kombinationer uden tilbagelægning

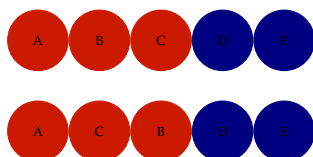
I de situationer hvor det samme udfald ikke kan ske to gange, kan ovenstående formel ikke bruges.

Jeg har boldene



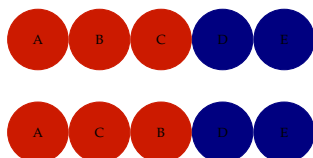
Jeg kan anbringe dem i $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ forskellige rækkefølger, fordi jeg har 5 bogstaver/bolde at vælge imellem når jeg skal vælge første bolde og 4 når jeg skal vælge den næste osv. Dette skrives $5!$ for nemheds skyld.

Men hvis jeg kun ser efter om der er tale om røde eller blå bolde, kan jeg ikke se forskel på

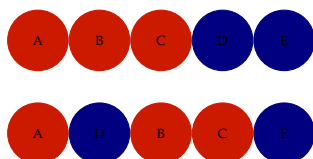


Disse to rækkefølger eller kombinationer er ens.

Generelt er der i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Men da der ikke er forskel på de r røde bolde og $(n - r)$ blå bolde, kan der ikke ses forskel på rækkefølgen som de to fremkommer i. Fx er



ens da rækkefølgen af røde bolde ikke har betydning, mens



er forskellige da rækkefølgen af røde og blå bolde har ændret sig. Da der er $r!$ måde rækkefølgen af de røde bolde kan opstilles på og $(n - r)$ måder rækkefølgen af de blå bolde kan opstilles på, kan det totale antal måde som de n bolde kan opstilles på udregnes med multiplikationsprincippet.

$$n! = K(n, r) \cdot r! \cdot (n - r)!$$

hvor $K(n, r)$ er antallet af forskellige rækkefølger af røde og blå bolde. I denne ligning kan $K(n, r)$ isoleres og så fremkommer formelen for binomialkoefficienten.

$$K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Det betyder, at antallet af forskellige kombinationer af store eller små bogstaver, i følgende bogstaver

A, h, i, w, K, E, g, n

er $n = 8, r = 5$. Hvor r er antallet af små bogstaver.

$$M = \frac{8!}{5! \cdot (8 - 5)!} = 56$$



Video der forklarer formelen for binomialkoefficienten.

Det havde ikke gjort nogen forskel om r havde været antallet af store bogstaver.

$$M = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56$$

Øvelse 34 I en klasse er der 25 elever og 18 er piger. På hvor mange forskellige måder kan de stilles op på en række, hvis det eneste der tæller er, om de er drenge eller piger?

Øvelse 35 I en pose slik er der 4 lakridser og 7 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

Øvelse 36 I en pose slik er der 1 lakrids og 10 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

3

Statistik

Idéen med statistik er at afgøre om den forskel, der er mellem to målinger eller to grupper er signifikant. Den deskriptive statistik indeholder metoder til at overskue store datamængder, men disse metoder viser dog ikke noget om disse forskelle skyldes tilfældighed eller om der er en årsag bag forskellene. Dette leder frem til det centrale dogme i statistik.

Det at forkaste 0-hypotesen ved en statistisk signifikansprøve betyder at man mener at forskellen mellem to grupper af individer eller to målinger er så stor at den ikke kan bero på ren tilfældighed.

0-hypotesen er den hypotese, at der *ikke* er forskel på de to grupper af individer eller de to målinger.

Statistiske signifikansprøver er en beregning af sandsynligheden for at forkaste en rigtig hypotese hhv. acceptere en forkert hypotese. Her vi vi komme ind for flere signifikansprøver. Signifikansprøven er afhængig af datatypen.

Forskellen mellem to grupper eller to målinger kan være i en af de tre typer af variable. Nominale, ordinale eller skala variable.

Definition 3 — Nominal variabel. For en nominal variabel er svarende inddelt i kategorier og kategorierne kan *ikke* ordnes fra mindst til mest og afstanden mellem kategorierne er lige stor.

Som eksempler på nominale variable kan nævnes: Køn, politisk parti.

Definition 4 — Ordinal variabel. For en ordinal variabel er svarende inddelt i kategorier og kategorierne kan ordnes fra mindst til mest og afstanden mellem kategorierne er lige stor.

Som eksempler på ordinale variable kan nævnes: Vurdering af



Video der forklarer hvad statistik er og kan bruges til.

eget helbred i kategorierne: Meget godt, godt, nogenlunde, dårligt, meget dårligt. Højeste afsluttede uddannelses i kategorierne: Ingen afsluttet uddannelse, grundskole, ungdomsuddannelse, bachelor, kandidat, Ph.d eller ligende.

Definition 5 — Skalar variabel. For en skalar variabel er svarende *ikke* inddelt i kategorier og værdien af variabelen angiver afstanden til de andre værdier. Denne type af variabel har ofte en enhed.

Som eksempler på skalar variable kan nævnes: Højde, alder, vægt, indkomst, tid, afstand, volumen, rumfang. En skalar variabel kan grupperes så det bliver til en ordinal variabel. Hos Danmarks statistik er personlig indkomst grupperet.

Nogle variable som fx grundstof, kan være alle typer, alt efter hvilken alt efter om det er symbolet, atomnummer eller molarmasse, der indgår i undersøgelsen.

I en undersøgelse vil flere variable måles samtidig for at undersøge sammenhængen mellem dem. Fx. kan det være højden på mænd og kvinder. De to grupper er så mænd og kvinder og variabelen er højden. Det kan også være holdning der er variabelen og grupperne kan være de politiske partier. Grupperne kan også være radioaktive isotoper af grundstoffer og variabelen kan være henfaldstiden.

Hvornår forskellen er stor nok, afhænger af signifikansniveauet (hvor mange fejl konklusioner man vil acceptere), mængden af data (stikprøvestørrelsen) og hvor stor forskellen er.

Ren tilfældighed vil sige, at der *kun* er tale om tilfældighed og *ikke* en underliggende årsag. Indenfor statistik kaldes tilfældigt for stokastisk.

Data kan komme fra mange forskellige kilder. Det kan være alt fra dit eget forsøg i matematik, kemi, fysik, geografi eller biologi. Men de kan også være data fra Danmarks statistik eller andre offentlige kilder. Det er vigtigt i diskussionen af validiteten af data at kende både kilden fx skat og publikationen medie fx statistikbanken.dk

Statistiske tests bruges særligt i natur- og sundhedsvidenskabeligt arbejde. Men det er også begyndt at blive anvendt i forbindelse med markedsføring.

I politik anvendes meget ofte deskriptiv statistik, men statistiske test er ikke et validt argument. Hvis det var det, ville der fx ikke være nogle diskussion om global opvarmning.

3.1 Binomialfordelingen

Binomialfordelingen, som er en fordeling af sandsynlighederne for at et uafhængigt udfald med en fast sandsynlighed indtræffer et bestemt antal gange.

Sandsynligheden for at en udfaldet indtræffer r gange er antallet af mulige måder udfaldet kan indtræffe på gange sandsynligheden for at det sker en gang.

Sætning 1 — Binomialkoefficienten. Antallet af kombinationer et udfald indtræffer r ud af n gange er

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

når udfaldet indtræffer kaldes det en succes, ellers er det en fiasko.

■ **Bevis** Der er i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Men da der ikke er forskel på de r succeser og $(n - r)$ fiaskoer, kan der ikke ses forskel på rækkefølgen de to fremkommer i. Fx er

$$F_1 S_3 S_1 F_2 S_4 S_2 \text{ og } F_1 S_1 S_2 F_2 S_4 S_3$$

ens da rækkefølgen af succeser ikke har betydning, mens

$$F_1 S_3 S_1 F_2 S_4 S_2 \text{ og } S_1 F_1 S_3 F_2 S_4 S_2$$

er forskellige da rækkefølgen af succes og fiasko er forskellig. Da antallet af forskellige rækkefølger succeser kan fremkomme på er $r!$ og tilsvarende er antallet af forskellige rækkefølger fiaskoer kan fremkomme på er $(n - r)!$. Antallet af forskellige måde succeser og fiaskoer kan blandes med hinanden, er den søgte binomialkoefficient $\binom{n}{r}$. Disse tre forskellige rækkefølger er tilsammen alle



Video der forklarer formelen for binomialkoefficienten.

muligheder rækkefølger, og der var i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Det betyder at

$$n! = \binom{n}{r} \cdot r! \cdot (n-r)!$$

Derfor er antallet af måder r succeser kan fremkomme i n forsøg er

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

■

Øvelse 37 Bestem binomialkoefficienten $\binom{7}{3}$.

Øvelse 38 Bestem binomialkoefficienten $K(9, 2)$.

I Maple beregnes binomialkoefficienten med kommandoen `binomial`.

Maple : Binomialkoefficienten.

`binomial(7, 2)`

21

Sætning 2 — Binomialsandsynligheder. Den matematiske formel for sandsynligheden, P , for at udfaldet, X , med sandsynlighed, p , indtræffer r ud af n gange er

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

■ **Bevis** I et binomialforsøg kan en udfald enten indtræffe dette kaldes succes eller ikke indtræffe dette kaldes fiasko. Forsøget udføres n gange og $P(n, r, p)$ er sandsynligheden for at udfaldet med sandsynlighed p har succes r ud af n gange. Antallet af hændelser hvor der er succes r ud af n gange er binomialkoefficienten.

Da udfaldene er uafhængige kan den samlede sandsynlighed beregnes ved at multiplicere sandsynlighederne for de enkelte udfald. Sandsynligheden for succes er p og derfor er sandsynligheden

for r succeser p^r . Sandsynligheden for fiasko er $1 - p$ og derfor er sandsynligheden for $n - r$ fiaskoer $(1 - p)^{n-r}$. Sandsynligheden for at udfaldet med sandsynligheden p indtræffer r ud af n gange er derfor

$$P(n, r, p) = \underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{Antal hændelser}} \cdot \underbrace{p^r \cdot (1 - p)^{n-r}}_{\text{sandsynligheden for hændelsen}}$$



Video hvor jeg fortæller om binomialsandsynligheder.

■ **Eksempel 11** Antag at der er en meget stor gruppe (helst uendelig stor) hvor 62,79% er piger. Sandsynligheden for at udtrække en pige er ($p=0,6279$). Hvis jeg udtrækker 40 personer (n), hvad er sandsynligheden for, at der er netop 26 piger (r) i denne gruppe.

$$P(40, 26, 0.6279) = \binom{40}{26} \cdot 0,6279^{26} \cdot (1 - 0,6279)^{40-26} = 0,126$$

Der er altså en sandsynlighed på 12,6% for at det blev netop 26 ud af 40, der var piger. ■

I Maple vil kan udregning se således ud.

Maple : Binomialsandsynligheder.

with(Gym):

binpdf(40, 0.6279, 26)

0.1258941729

En binomialfordelt stokastisk variabel X er defineret ved antallet af forsøg n og sandsynligheden for succes p . Den skrives

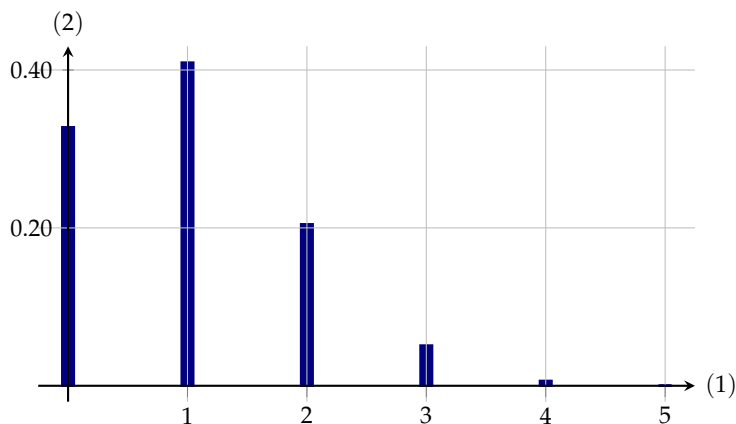
$$X \sim b(n, p)$$

■ **Eksempel 12** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(5, 0.2)$.

Bestem $P(X = 3)$.

$$P(5, 3, 0.2) = \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot (1 - 0,2)^{5-3} = 0,0512$$

Et plot af en binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(5, 0.2)$ er et pindediagram

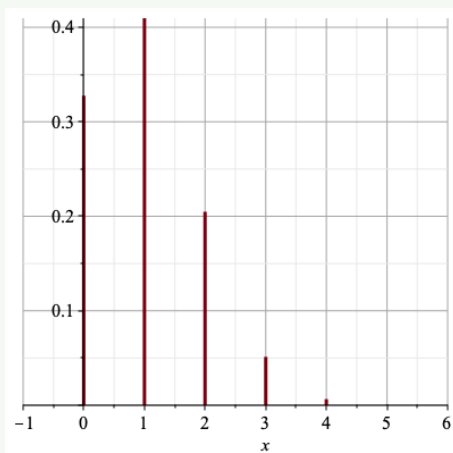


På diagrammet kan det ses at 1 succes ud af 5 er den mest sandsynlige hændelse, med en sandsynlighed på over 40 %.

I Maple kan dette diagram tegnes med kommandoen `pindediagramBIN`.

Maple : Plot af binomialfordeling.

`pindediagramBIN(5, 0.2)`



Plottet af binomialfordelingen kan bruges til at aflæse sandsynlighederne for de enkelte udfald i binomialfordelingen. Plottet kan også bruges til at visualisere nogle af de koncepter i binomialfor-

delingen som vi skal se.

Øvelse 39 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(7, 0.3)$.

- a) Bestem $P(X = 5)$.
- b) Opskriv sandsynlighedsfeltet for X .
- c) Bestem den mest sandsynlige hændelse.

■ **Eksempel 13** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(8, 0.25)$.

Bestem $P(X \leq 3)$.

For at bestemme $P(X \leq 3)$ skal $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ og $P(X = 3)$ bestemmes og lægges sammen.

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^8 = 0,10$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^7 = 0,27$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^6 = 0,31$$

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^5 = 0,21$$

Derefter lægges værdierne sammen

$$P(X \leq 3) = 0,10 + 0,27 + 0,31 + 0,21 = 0,89$$

Der er altså 89 % sandsynlighed for at der er 3 eller færre succeser.

■

Det er ikke tanken, at I skal bruge formlen til at beregne punkt-sandsynlighederne. Dette gøres med en kommando i Maple. I Maple gøres dette mere enkelt med kommandoen `bincdf`.

Maple

```
bincdf(8, .25, 3)
```

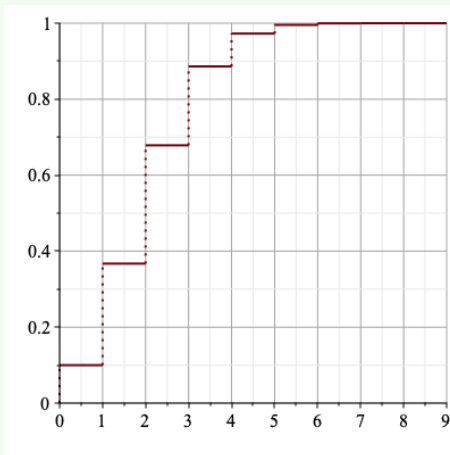
0.8861846923

$P(X \leq r)$ er den kumulerede sandsynlighed. Dette kan illustreres i trappediagrammet for den kumulerede sandsynlighed.

I Maple tegnes trappekurven for en binomialfordelt stokastisk variabel X med kommandoen `trappekurveBIN`. På trappekurven kan vigtige værdier for binomialfordelingen aflæses. Det er acceptmængde og kritiske værdier, der kan fastsættes efter at signifikansniveauet og testtypen er fastsat. Disse begreber blive forklaret i afsnittet om binomialtest.

Maple

```
trappekurveBIN(8, 0.25)
```



Definition 6 — Middelværdi. Middelværdien for en stokastisk variabel $X \sim b(n, p)$

$$\mu(X) = n \cdot p$$

Definition 7 — Spredning. Spredningen eller standard afvigelsen for en stokastisk variabel X .

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Middelværdi og spredning skal bruges til at estimere binomi-

alfordelingen, i de tilfælde hvor antalsparameteren er meget stor. Hvis antalsparameteren er meget stor, kan det være vanskeligt for computeren at visse beregninger. Det er forskelligt fra computer til computer, hvornår præcis antalsparameteren bliver for stor men 200 er et godt bud.

■ **Eksempel 14** En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(4, 0.7)$.

a) Bestem middelværdien for X .

b) Bestem spredningen for X .

Middelværdien beregnes

$$\mu = 4 \cdot 0.7 = 2.8$$

Spredningen beregnes

$$\sigma = \sqrt{4 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.7)} = 0.9165$$

■

I Maple kan en binomialfordelt stokastisk variabel X defineres med kommandoen `BinomialRandomVariable` der er i pakken `Student[Statistics]`. Derefter kan middelværdi, varians, spredning og sandsynlighederne for de enkelte udfald beregnes. Kommandoerne ses i tabellen herunder.

Middelværdi	Mean
Spredning	StandardDeviation

Maple

```
with(Student[Statistics]):
X := BinomialRandomVariable(4, 0.7):
Mean(X)
2.8
StandardDeviation(X)
0.9165151390
```

Øvelse 40 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(10, 0.4)$.

- a) Bestem middelværdien og spredningen for X .
- b) Bestem $P(X \leq 4)$.
- c) Bestem den mindste værdi for u så $P(X \leq u) \geq 0,8$.

Øvelse 41 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(6, 0.1)$.

- a) Bestem middelværdien og spredningen for X .
- b) Bestem $P(X \leq 2)$.
- c) Bestem den mindste værdi for u så $P(X \leq u) \geq 0,95$.

Øvelse 42 En binomialfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim b(6, 0.85)$.

- a) Bestem middelværdien og spredningen for X .
- b) Bestem $P(X \leq 2)$.
- c) Bestem den største værdi for u så $P(X \leq u) \leq 0,05$.

Øvelse 43 En binomialfordelt stokastisk variabel X har sandsynlighedsparameter 0.4 og middelværdien 24.

- a) Bestem antalsparameteren for X .
- b) Bestem spredningen uden at bruge antalsparameteren.

Øvelse 44 En binomialfordelt stokastisk variabel X har antalsparameteren 120 og middelværdien 24.

- a) Bestem sandsynlighedsparameteren for X .

Øvelse 45 En binomialfordelt stokastisk variabel X har sandsynlighedsfeltet

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	32.768	40.96	20.48	5.12	0.64	0.032

- a) Bestem middelværdien, antals- og sandsynlighedsparameteren for X .

Maple kan lave en simulering af en stokastisk variabel med en antals- og sandsynlighedsparameter. Her ses et eksempel på en stokastisk variabel med antalsparameter 8 og sandsynlighedsparameter 0,6. Der er lavet en simulering 10 gange. Det er muligt at bestemme frekvenser, trappediagram, gennemsnit og spredning.

Maple : Simulering.

```
with(Gym):
with(Student[Statistics]):
X := BinomialRandomVariable(8, .6):
Sample(X, 10)
```

[5,6,3,5,3,6,4,6,3,4]

```
data:=Sample(X, 100):
gennemsnit(data)
```

4.82

```
Mean(X)
```

4.8

3.2 Binomialtest

I det følgende afsnit skal vi se på to måder at lave binomialtest. Beregning af konfidensinterval og beregning af p-værdi. Begge metoder kan anvendes i alle tilfælde. Det er vigtigt at bemærke om testen er to-sidet, højre- eller venstresidet.

3.2.1 Konfidensinterval

Jeg køber en pose frossent morgenbrød med 10 rundstykker. På nogle er der birkes og på nogle er der sesam. Min nulhypotese er, at der er lige mange af hver i en pose. Men jeg ved godt at der kan være udsving, så der vil ikke være 5 rundstykker med birkes i alle poserne. Inden jeg åbner posen vil jeg først beregne et interval for hvor mange rundstykker med birkes jeg vil finde i posen. Dette interval kaldes et konfidensinterval. Jeg lader X være en stokastisk variabel som angiver hvor mange rundstykker med birkes der er i posen. Jeg kan i Maple udregne at $P(X = 5) = 0.246$. Det betyder at der er 24.6 % sandsynlighed for at der 5 rundstykker med birkes i posen.

For at beregne 95 %-konfidensintervallet skal jeg bestemme den største værdi for u så $P(X \leq u) \leq 0.025$ og den største værdi for v så $P(X \leq v) \leq 0.975$. Da er konfidensintervallet $[u, v]$. Grunden til de to tal 0.025 og 0.975 er fordi der mellem disse tal er 0.95, og det er derfor det er 95 %-konfidensintervallet. Maple kan lave denne beregning med kommandoen `binomialTest`.

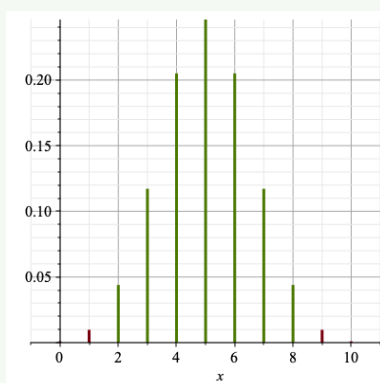


Video hvor jeg fortæller om binomialtest.

Maple : Konfidensinterval for n .

```
with(Gym):
```

```
binomialTest(10, 0.5, 0.05, tosidet)
```



Grafen viser at konfidensintervallet er $[2, 8]$. Det er de grønne søjler der viser konfidensintervallet som også kaldes acceptområdet. De kritiske områder er $[0, 1]$ og $[9, 10]$.

Definition 8 — Acceptområde. Acceptområdet er det interval som den observerede værdi skal ligge i for at godkende nulhypotesen. Nulhypotesen forkastes, hvis den observerede værdi ligger uden for acceptområdet.

Definition 9 — Kritisk område. Et kritisk område er det eller de interval(ler) som den observerede værdi skal ligge i for at nulhypotesen forkastes.

Denne kommando virker dog ikke altid, for store værdier af n skal der laves flere beregninger end computeren kan klare. Derfor indføres normalfordelingsapproximationen.

Sætning 3 — Normalfordelingsapproximationen. Konfidensintervallet for en binomialfordelt stokastisk variabel kan approksimeres med en normalfordelt stokastisk variabel, hvis $n > \frac{5}{p}$ og

$$n > \frac{5}{1-p}.$$

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$$

hvor $\mu = n \cdot p$ og $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$

Bruger jeg denne sætning for mit morgenbrød får jeg, middelværdien

$$\mu = 10 \cdot 0.5 = 5$$

og spredningen

$$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)} = 1.58$$

og intervallet

$$[5 - 2 \cdot 1.58, 5 + 2 \cdot 1.58] = [1.8, 8.2]$$

Da binomialfordelingen er en diskret fordeling skal intervallet afrundes. Det nedre intervalendepunkt skal altid rundes op og det øvre intervalendepunkt skal altid rundes ned. Det betyder at intervallet er $[2, 8]$.

I Maple kan denne beregning automatiseres. Det er en fordel at have automatiseret sådan en procedure i et dokument i Maple, så det kan tages frem når det er relevant. Husk at lave noter i

dokumentet så du forstår hvad der skal skrives hvor. Det kan være en fordel, hvis du har et eksempel med i dokumentet. I eksemplet vil det være godt hvis opgaven og hele besvarelsen også er med. Du kan med fordel have en opgave med som du har regnet i undervisningen. Husk til eksamen skal det kun være besvarelse af eksamenopgaven, som afleveres.

Maple : Normalfordelingsapproximationen.

Først indtastes n og p .

$n := 10:$

$p := 0.5:$

Så kan middelværdien bregnes

$m := n \cdot p$

$m := 5.0$

og spredningen.

$s := \text{sqrt}(n \cdot p \cdot (1 - p))$

$s := 1.581138830$

konfidensintervallet er

$[m - 2s, m + 2s]$

$[1.837722340, 8.162277660]$

Øvelse 46 I en pose med M&Ms har pastillerne 6 forskellige farver og der er i alt 512 pastiller. Nulhypotesen er, at der er lige mange af hver farve.

- Bestem sandsynligheden for få en blå.
- Bestem sandsynligheden for at der er højest 90 blå pasteller.
- Bestem konfidensintervallet for antallet af blå pasteller.
- Der er 68 blå pastiller. Benyt en binomialtest til at vurdere om nulhypotesen kan forkastes?

Øvelse 47 Et mikrobryggeri har produceret 7130 flasker med 33 cl øl. Deres nulhypotesen er, at 1% af øllene indeholder mindre end 33 cl. øl.

- a) Bestem sandsynligheden for at der er højest 55 øl med mindre end 33 cl. øl.
- b) Bestem konfidensintervallet for antallet af øl med mindre end 33 cl. øl.
- c) Der er 89 øl som indeholder mindre end 33 cl. øl. Benyt en binomialtest til at vurdere om nulhypotesen kan forkastes?

Øvelse 48 Et mikrobryggeri har produceret 7130 flasker med 33 cl øl. Deres nulhypotesen er, at mindre end 1% af øllene indeholder mindre end 33 cl. øl.

- a) Bestem sandsynligheden for at der er højest 55 øl med mindre end 33 cl. øl.
- b) Der er 89 øl som indeholder mindre end 33 cl. øl. Benyt en binomialtest til at vurdere om nulhypotesen kan forkastes?

Jeg har lavet en spørgeskemaundersøgelse blandt brugerne af platformen YourSkills. Det antages at den er repræsentativ. Den viser, at 84 % af brugerne (122) er glade for platformen. I spørgeskemaundersøgelsen deltog 145 personer. Nu vil jeg gerne bestemme konfidensintervallet for alle brugere på platformen.

Det jeg undersøger er hvor mange procent af alle brugerne, som er glade for platformen. Min resultat er et procentinterval. Der skal bruges en anden beregning, hvis det er et antalsinterval, altså den modsatte beregning. I den beregning, kender jeg tilfredsheden i procent for alle brugere og skal så beregne i hvilket interval antallet af glade brugere (blandt det 145 som bliver skurgt) skal ligge for, at jeg kan acceptere nulhypotesen. Nulhypotesen er så at tilfredsheden i procent for alle brugere er uændret.

Bemærk at det ikke ville give mening at lave et konfidensinterval, for de 122 glade brugere af platformen. De er blevet spurgt, så her kendes antallet.

Sætning 4 — Konfidensinterval for p . Konfidensintervallet for sandsynligheden i populationen p estimeret ud fra sandsynligheden i stikprøven $\hat{p}$ og størrelsen af stikprøven n .

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Ligger et udfald udenfor 95 % konfidensintervallet forkastes nulhypotesen. Ligger et udfald i 95 % konfidensintervallet forkastes nulhypotesen ikke.

Dette 95 %-konfidensinterval kan Maple beregne med kommandoen `konfidensInterval`. Det første tal i kommandoen er sandsynligheden eller antallet af succeser. Det andet tal er antallet af stikprøver. Det sidste tal er typen af konfidensinterval som typisk er 95 %.

Maple : Konfidensinterval for p .

```
with(Gym):
```

```
konfidensInterval(0.84, 145, 0.95)
```

```
[0.780329, 0.899671]
```

Eller

```
konfidensInterval(122, 145, 0.95)
```

```
[0.781917, 0.900841]
```

Bemærk at der er forskel i intervallerne. Det skyldes at 122 ikke er eksakt 84 % af 145. Den afrunding gør en forskel for intervallet. Det mest præcise, er at anvende antallet hvis dette haves, eller ikke at afrunde procenten inden den indsættes i kommandoen. Hvis det kun er procenten der kendes, skal den selvfølgelig anvendes. Det vil ikke give mening at omregne procenten til et antal.

Jeg kan konkludere at konfidensintervallet for glade brugere af YourSkills er [0.79, 0.90]. Efter en opdatering af platformen steg tilfredsheden til 92 %. Da det ligger udenfor konfidensintervallet af stikprøve kan jeg konkludere, at opdateringen ændrede brugernes tilfredshed med platformen.

Øvelse 49 Et mikrobryggeri har spurgt 234 af deres kunder om de ville købe mikrobryggeriets øl igen. 182 svarede ja. Efter en ændring i opskriften af øl spurgte mikrobryggeri igen en stikprøve af deres kunder og her svarede 85 % at de ville købe mikrobryggeriets øl igen.

- a) Bestem konfidensintervallet for sandsynligheden for at mikrobryggeriets kunder vil købe mikrobryggeriets øl igen, for alle mikrobryggeriets kunder.
- b) Bestem om ændringen af opskriften var en god idé.

3.2.2 *p*-værdi

I stedet for at bestemmes konfidensintervallet kan *p*-værdien for et udfald bestemmes. Hvis denne værdi er mindre end 0,05 kan nulhypotesen forkastes på et 5 % signifikansniveau.

Definition 10 — *p*-værdi. *p*-værdien for et udfald er sandsynligheden for at få et mindst lige så ekstremt udfald.

For binomialfordelingen betyder det at *p*-værdien for udfaldet u er

$$p\text{-værdien} = P(X \leq \mu - \delta) + P(X \geq \mu + \delta)$$

hvor $\delta = |\mu - u|$

Et mikrobryggeri har produceret 7130 flasker med 33 cl øl. Deres nulhypotesen er, at 1% af øllene indeholder mindre end 33 cl. øl. *p*-værdien for 89 øl som indeholder mindre end 33 cl. øl.

Middelværdien er

$$\mu = 7130 \cdot 0.01 = 71.3$$

Forskellen mellem middelværdien og udfaldet 89 er

$$\delta = |71.3 - 89| = |-17.7| = 17.7$$

$$P(X \leq 71.3 - 17.7) = 0.014$$

$$P(X \geq 71.3 + 17.7) = 0.023$$

Det giver en p-værdi på 0.04, og da den er mindre end 0.05, kan nulhypotesen forkastes.

Denne procedure kan automatiseres i Maple.

Maple : p-værdi i Maple.

```
with(Gym):
```

```
Først indtastes n, u og p.
```

```
n:=7130:
```

```
p:=0.01:
```

```
u:=89:
```

```
m:=n·p
```

```
m := 71.30
```

```
d := abs(m - u)
```

```
d := 17.70
```

```
l:=bincdf(n, p, m - d)
```

```
0.0140429999838888
```

```
h:=1 - bincdf(n, p, m + d - 1)
```

```
0.0231994448768269
```

```
p-værdien er summen af de to haler.
```

```
l+h
```

```
0.0372424448607157
```

```
p-værdien for udfaldet 89 er således mindre end 0,05 og  
nulhypotesen forkastes.
```

Her er det meget vigtigt om der er tale om en to-sidet, højre eller venstresidet test. Ved en to-sidet test undersøges om en bestemt værdi rammes. Fx En terning som slå to, med en sandsynlighed på $1/6$. Ved en venstresidet test undersøges om der rammes mindre end en bestemt værdi. Fx Mindre end (eller højest) 1 % af varerne har en fejl. Ved en højresidet test undersøges om der rammes over en bestemt værdi. Fx Dennis kommer til tiden i mere end (eller mindst) 99 % af timerne.

Øvelse 50 En mønt kastes 2903 gange og 1538 af gangene bliver det plat.

- a) Opstil en nulhypotese for at undersøge om mønten er ærlig.
- b) Skal nulhypotesen testes med en to-sidet, højre- eller venstresidet test?
- c) Benyt p-værdien for 1538 til at undersøge om nulhypotesen kan forkastes på et 5 % signifikansniveau.

Øvelse 51 En mønt kastes 236 gange og 124 af gangene bliver det plat.

- a) Opstil en nulhypotese for at undersøge om mønten er ærlig.
- b) Skal nulhypotesen testes med en to-sidet, højre- eller venstresidet test?
- c) Benyt p-værdien for 124 til at undersøge om nulhypotesen kan forkastes på et 1 % signifikansniveau.

Øvelse 52 På en fabrik fyldes juice på kartoner. Der skal være mindst 250 mL i hver karton. I en stikprøve på 600 kartoner var der 580 kartoner, med mindst 250 mL. Fabrikkens nulhypotese er at mindst 98 % af kartonerne indeholder mindst 250 mL.

- a) Skal nulhypotesen testes med en to-sidet, højre- eller venstresidet test?
- b) Benyt et binomialtest med et 5 % signifikansniveau til at vurdere fabrikkens nulhypotese.
- c) Benyt et binomialtest med et 1 % signifikansniveau til at vurdere fabrikkens nulhypotese.

Øvelse 53 En bestemt elev påstår at hun kommer til tiden i mindst 95 % af hendes timer. I en stikprøve på 120 timer kom hun til tiden i 110 af timerne.

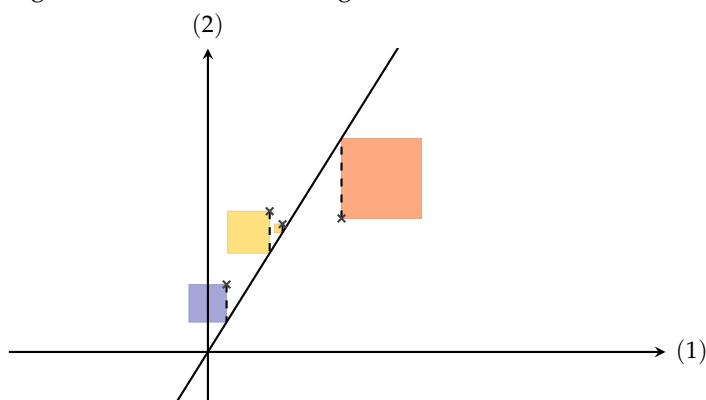
- Opstil en nulhypotese for at undersøge om elevens påstand er rigtigt.
- Skal nulhypotesen testes med en to-sidet, højre- eller venstresidet test?
- Benyt et binomialtest med et 5 % signifikansniveau til at vurdere elevens nulhypotese.

3.3 Lineær regression

Lineær regression er at finde den rette linje som på bedst mulig måde repræsentere sammenhængen mellem en (eller flere) uafhængige variable og en afhængig variabel.

3.3.1 Mindste kvadraters metode

Der findes flere metoder til at bestemme den 'bedste' rette linje. Det metode vi skal se på her er mindste kvadraters metode. Metoden består i at bestemme den linje, hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linjen og Y-værdierne fra data er mindst mulig. Denne afstand kaldes også residual.



Video hvor jeg fortæller om lineær regression ved mindste kvadraters metode.

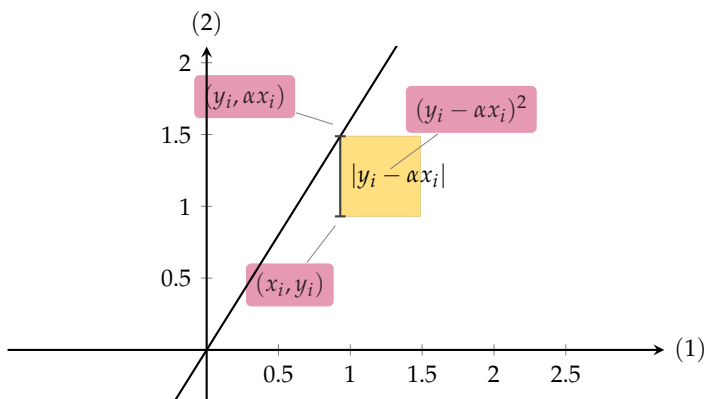
Sætning 5 — Mindste kvadraters metode. Den hældningskoefficient hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linjen og Y-værdierne fra data er mindst mulig, kan bestemmes med formlen

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n 2x_i^2}$$

Når der tages udgangspunkt i modellen

$$Y = \alpha X$$

er arealet af et kvadrat $(y_i - \alpha x_i)^2$, hvor (x_i, y_i) er datapar.



■ Bevis

Summen af arealerne er

$$\text{Areal}(\alpha) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha x_i)^2$$

hvor n er antallet af datapar. Ved at gange parentesen ud fås at

$$\text{Areal}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha^2 - x_i y_i \alpha + y_i^2 +$$

Her ses, at der er tale om et andengradspolynomium. Da α^2 er positivt, vil dette polynomium vende grenene op og toppunktet, vil være minimum for funktion. Toppunktet har 1.koordinanten $\frac{-b}{2a}$. Ved at indsætte koefficienterne fra andengradspolynomiet i toppunktsformlen fås, at

$$\frac{\sum_{i=1}^n -(-x_i y_i)}{\sum_{i=1}^n 2x_i^2}$$

Det kan reduceres en smule i tælleren

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n 2x_i^2}$$

■

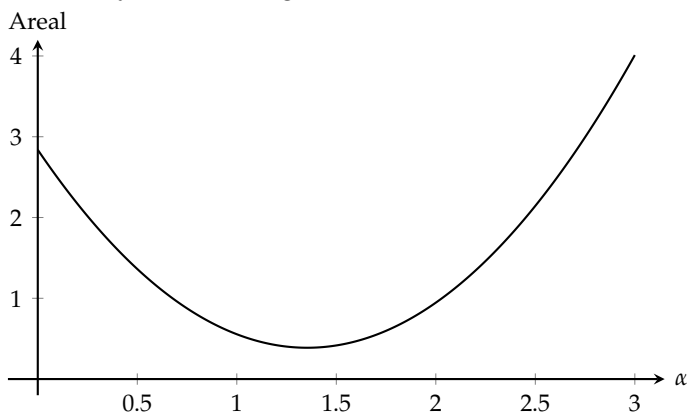
I dette tilfælde er der 4 datapar. Summen af de 4 arealer bliver

$$\text{Areal}(\alpha) = (.98 - .43\alpha)^2 + (.93 - .93\alpha)^2 + (.47 - .13\alpha)^2 + (.89 - .52\alpha)^2$$

Dette kan reduceres til

$$\text{Areal}(\alpha) = 2.8383 - 3.6204\alpha + 1.3371\alpha^2$$

der kan udtrykkes ved en graf.

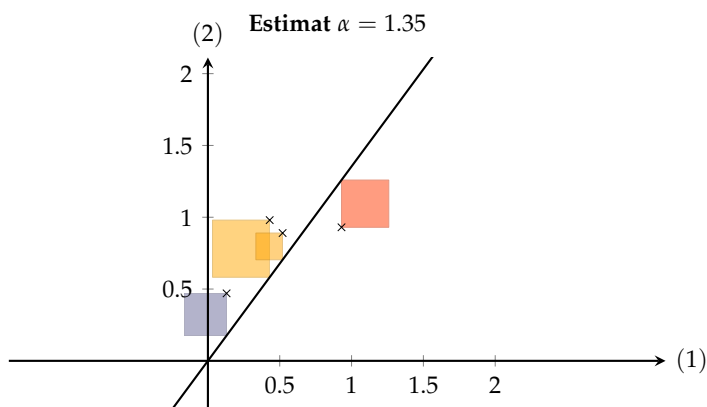


Den α (hældning) der gør at summen af kvadraterne er mindst mulig er derfor toppunktet af denne graf. Dette kan bestemmes med toppunktsformlens 1. koordinat $\frac{-b}{2a}$

For at bestemme den hældning som gør summen af kvadraterne er mindst mulig udregnes toppunktet.

$$\frac{-(-3.6204)}{2 \cdot 1.3371} = 1.353825443$$

Derfor er det denne værdi af α hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linjen og y -værdierne fra data, er mindst mulig.



I det daglige arbejde med regression, benyttes et IT-redskab til at udføre beregningerne, ud fra en givet model. I dette eksempel er der benyttet en meget simpel model, men i princippet er det de samme beregninger som IT-redskabet benytter selvom modellen er mere kompliceret.

Maple : Regression.

```
with(Statistics):
```

```
X:=[3,4,5,7]:
```

```
Y:=[1,2,3,4]:
```

```
Fit(a·x + b, X, Y, x, output = parametervalues)
```

```
[a = 0.742857142857143, b = -1.02857142857143]
```

3.4 Modelkontrol

Modellen som nu er konstrueret, er det vigtigt også at vurdere modellen. Der findes flere redskaber til at vurderer en model. Her skal vi se på

- Residualplot
- Residualspredning
- Afvigende residualer

For at kunne lave modelkontrol skal der være et stort antal datapunkter, som oftes vil skulle importeres i Maple.



Video hvor jeg fortæller om regression og modelkontrol i Maple.

Maple : Dataimport.

```
with(Statistics):
```

Data importeres HUSK at maplefilen og excelfilen med data skal være i samme mappe. I dette eksempel hedder filen co2.xlsx

```
data := Import(FileTools[JoinPath](["co2.xlsx"],  
base = worksheetdir))
```

Data konverteres til lister, så det er muligt at arbejde videre med de relevante data. Kolonnen decimaldate er x-værdierne og 3. kolonne er y-værdierne. Da modellen har 1958 som startår, skal dette fratrækkes alle x-værdierne. Dette gøres med ~1958.

```
X := convert(data['decimaldate'], list) - ~1958
```

```
Y := convert(data[3], list)
```

De bruges til at tage de nødvendige forbehold i fortolkningen af resultaterne.

3.4.1 Residualplot

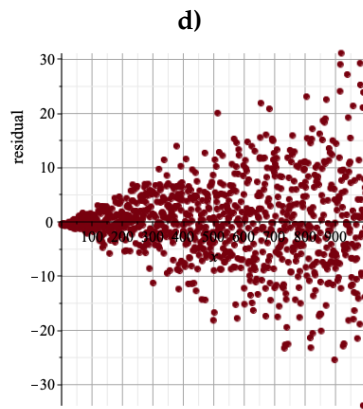
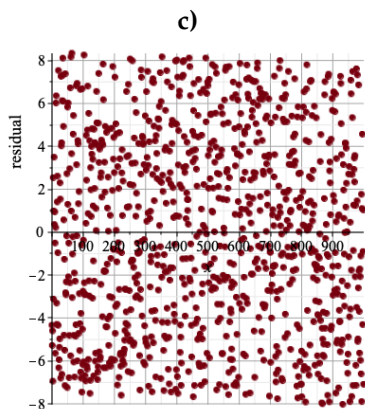
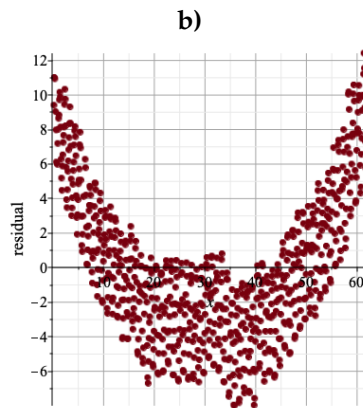
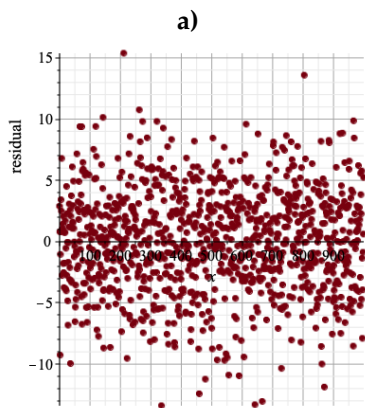
Residualplottet bruges til at kontrollere om de to betingelser om linearitet og ensartet varians er opfyldt. Hvis modellen er korrekt, skal residualplottet vise tilfældighed i placeringen af residualerne. Hvor residualerne er centreret omkring 1.aksen. Er der en klar systematisk variation i residualerne fx en bueform, er det et tegn på at modellen ikke er tilstrækkelig. Hvis spredningen i residualerne enten vokser eller aftager som funktion af X , er betingelsen om ensartet varians ikke opfyldt.

Maple : Residualplot.

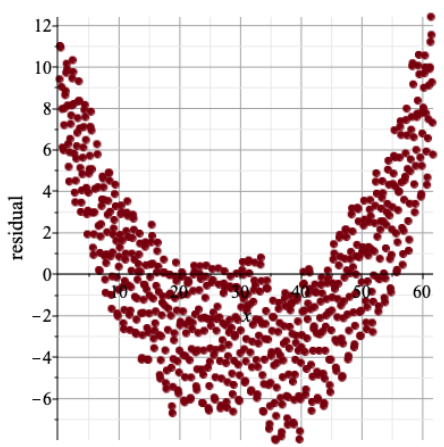
Husk at importere data først.

```
with(Gym):
```

```
plotResidualer(X, Y, LinReg)
```

Figur 3.1: Fire eksempler på residualplot. Residualplot a viser residualerne er centreret omkring 1.aksen og med ensartet spredning. Residualplot b viser et eksempel på, at residualerne ligger i en buform. Dette kunne tyde på, at en lineær model ikke er den rigtige til at modellere disse data. Residualplot c viser residualerne er fordelt med ensartet spredning, men de er ikke centreret om 1.aksen. Dette kunne tyde på at der er en konfunderende variabel som ikke er medtaget i modellen. Residualplot d viser et eksempel på at residualerne ikke har samme spredning over hele 1.aksen.



Video der viser hvordan regression og modelkontrol kan laves i Maple i et eksempel hvor modellen ikke er god.

3.4.2 Residualspredning

Betingelserne for at regressionen er gyldig er at forskellen på modellen og y_i -værdierne (herefter **residualerne**) er normalfordelte med middelværdi 0 og varians σ^2 , samt at variansen er den samme for alle værdier af x_i .

Definition 11 — Residual. Et residual er forskellen mellem en mål værdi og den af modellen forudsagte værdi.

$$r_i = y_i - (a \cdot x_i + b)$$

Residualspredningen har følgende definition for en lineære regression

Definition 12 — Residualspredning. For residualerne r_i til en lineær model $y = ax + b$ er residualspredningen s bestemt ved.

$$s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}{n - 2}}$$

Grunden til at der divideres med $n - 2$ og ikke n er fordi der er 2 parametre a og b i modellen.

Residualspredningen skal være lille i forhold til y_i -værdierne. Da y_i værdierne kan variere meget hvis hældningen er stor, er det svært at sætte et konkret mål op for størrelsesforholdet mellem residu-

alspredningen og y_i -værdierne. Jo mindre residualspredningen er, jo bedre er modellen til at forudsige y_i -værdierne.

Maple : Residualspredning.

Husk at importere data først.

`with(Statistics):`

Residualspredningen beregnes.

`Fit(a·x + b, X, Y, x, output = residualstandarddeviation)`

$s := 4.2449$

For at have noget at sammenligne residualspredningen bestemmer jeg min og max for den afhængige variabel.

`min(Y)`

313.2

`max(Y)`

414.66

Residualspredningen er ca. 4 og dette skal holdes op i mod en y -værdier mellem 313 og 415. Denne spredning må siges at være lille og det er et tegn på at der er tale om en god model.

3.4.3 Afvigende residualer

En eller flere observationer kan være ekstreme fordi de afviger meget fra den af modellen forudsagte værdi. Dette vil give observationen et stort residual. For at undersøge dette spørges til andelen af residualer i intervallet $[-2s, 2s]$. Da residualerne skal være normalfordelte betyder det at ca. 95% af residualerne skal ligge i intervallet $[-2s, 2s]$ og ca. 99,8% af residualerne skal ligge i intervallet $[-3s, 3s]$. Hvor s er residualspredningen. Hvis residualen for en observation ikke ligger i intervallet $[-3s, 3s]$, siges observationen at være exceptionel.

Maple : Afvigende residualer.

Husk at importere data først.

`with(Statistics):`

`s:=Fit(a·x + b, X, Y, x,`

```
output = residualstandarddeviation)
```

```
s := 4.244865835
```

Residualerne beregnes

```
res := Fit(a·x + b, X, Y, x, output = residuals)
```

```
res := [9.4106, 11.01886, 10.93867, 9.0367, ...]
```

```
with(Gym):
```

Residualerne inddeles i grupper

```
grupperData(res, <min(res, -2s), -2s, 2s, max(res, 2s)>)
```

$$\begin{bmatrix} -8.4897 \dots - 8.4897 & 0 \\ -8.4897 \dots 8.4897 & 702 \\ 8.4897 \dots 12.4185 & 30 \end{bmatrix}$$

Data er nu indelt i tre intervaller. Det første interval er intervallet mellem det mindste residual og $-2s$. Det andet interval er mellem $-2s$ og $2s$. Det tredje interval er mellem $2s$ og det største residual.

Bemærk at det første interval er tomt fordi det mindste residual er større en $-2s$ (og tilsvarende for $-3s$). Andelen af residualer i intervallet $[-2s, 2s]$ kan nu beregnes

$$\frac{702}{702 + 30} = 0.959$$

95,9 % af residualerne ligger i intervallet $[-2s, 2s]$, hvilket er et tegn på at der er tale om en god model.

Maple : Exceptionelle residualer.

Husk at importere data først.

```
with(Statistics):
```

```
s:=Fit(a·x + b, X, Y, x,
```

```
output = residualstandarddeviation)
```

```
s := 4.244865835
```

Residualerne beregnes

```
res := Fit(a·x + b, X, Y, x, output = residuals)
```

```
res := [9.4106, 11.01886, 10.93867, 9.0367, ...]
```

Residualerne inddeles i grupper

```
grupperData(res, <min(res, -3s), -3s, 3s, max(res, 3s)>)
```

$$\begin{bmatrix} -12.7346 \dots - 12.7346 & 0 \\ -12.7346 \dots 12.7346 & 732 \\ 12.7346 \dots 12.7346 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemærk at der ikke er nogle residualer som er exceptionelle, i det alle residualerne ligger i intervallet $[-3s, 3s]$.

Som en sidste måde at definere observationer som er afvigende kan definitionen af outlier benyttes. Det er residualer som ligger mere end 1,5 kvartilbredde fra medianen. I Maple bestemmes dette fx med BoxPlot kommandoen.

Maple : Outliers blandt residualer.

Husk at importere data først.

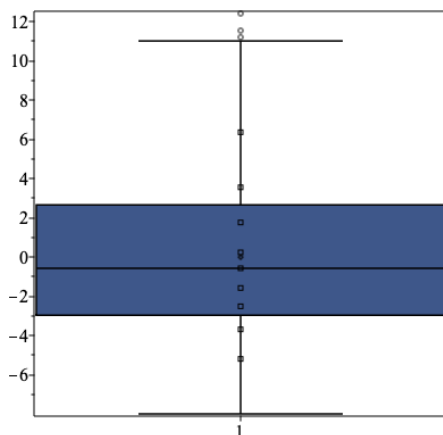
```
with(Statistics):
```

Residualerne beregnes

```
res := Fit(a·x + b, X, Y, x, output = residuals)
```

```
res := [9.4106, 11.01886, 10.93867, 9.0367, ...]
```

```
BoxPlot(res, outliers = true)
```



Her ses at der er tre residualer som er outliers.

Øvelse 54 Tabellen viser sammenhørende værdier for kropstemperaturen og hjerterytmen.

Kropstemperatur	96.2	96.7	...	100.0	100.8
Hjerterytme	70	71	...	78	77

(Resten af tabellen findes i bilaget "Normtemp.xls".)

I en model antages det, at sammenhængen mellem kropstemperaturen og hjerterytmen kan beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x betegner kropstemperaturen (målt i Fahrenheit), og $f(x)$ betegner hjerterytmen (målt i slag pr. minut).

- Bestem tallene a og b ved regression, og tegn residualplottet.
- Bestem residualspredningen s og gør rede for, at under 95 % af residualerne ligger i intervallet $[-2s; 2s]$.
- Tegn et boksplot af residualerne og afgør om der er outliers.
- Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive sammenhængen.

Øvelse 55 Tabellen viser sammenhørende værdier for kropsfedt og halsmål.

Kropsfedt	12.6	6.9	...	25.3	30.7
Halsmål	36.2	38.5	...	38.9	40.8

(Resten af tabellen findes i bilaget "kropsfedt.xlsx".)

I en model antages det, at sammenhængen mellem kropsfedt og halsmål kan beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x betegner kropsfedt (målt i pct), og $f(x)$ betegner halsmål (målt i cm).

- Bestem tallene a og b ved regression, og tegn residualplottet.
- Bestem residualspredningen s .
- Gør rede for, at under 95 % af residualerne ligger i intervallet $[-2s; 2s]$.
- Tegn et boksplot af residualerne og afgør om der er outliers.
- Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive sammenhængen.

4

Funktioner

Definitionen på en funktion er

Definition 13 En variabel y kaldes en funktion af en variabel x , hvis der til hver værdi af x svarer præcis én værdi af y . Denne værdi kaldes funktionsværdien og man skriver $y = f(x)$.

Bemærk at denne definition kun gælder hvis der er én afhængig (y) og én uafhængig (x) variabel.

Der er nogle begrænsninger for funktioner, fordi nogle udregninger ikke er definerede.

- division med 0.
- kvadratroden af negative tal.

Disse udregninger kan heller ikke laves i regneudtryk for funktioner, derfor siger man at funktionen kun er defineret for nogle værdier af x . De værdier af x som funktionen er defineret for kaldes for funktionens *definitions­mængde* og den skrives $Dm(f)$.

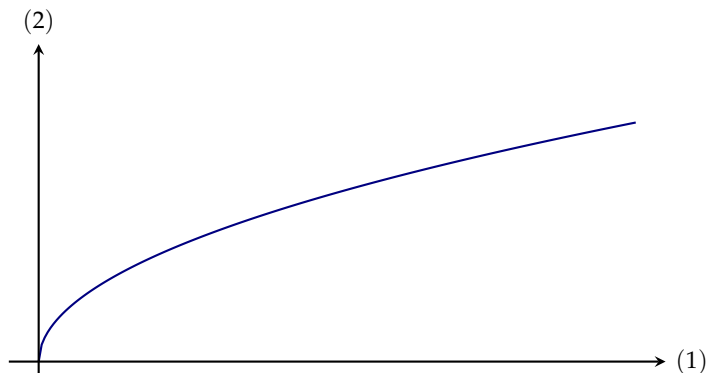
Til alle de x værdier, som ligger i definitions­mængden svarer - ifølge definitionen af en funktion - én værdi af y , disse værdier af y kaldes for funktionens *værdimængde* og den skrives $Vm(f)$.

Ved alle funktioner skal værdi- og definitions­mængde overvejes.

■ **Eksempel 15** Funktionen f givet ved forskriften $f(x) = 3x + 1$ har definitions­mængden $\mathbb{R}$, hvilket betyder at funktionen er defineret for alle reelle tal og værdimængden er også $\mathbb{R}$. ■

■ **Eksempel 16** Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Denne funktion er defineret for alle $x \geq 0$. Bemærk at der ikke er nogen graf for værdier af $x < 0$. Funktionens definitions­mængde er derfor $Dm(f) = [0, \infty[$ dette læses »alle reelle tal større end eller lig med 0«.

Værdimængden for funktionen er $Vm(f) = [0, \infty[$.



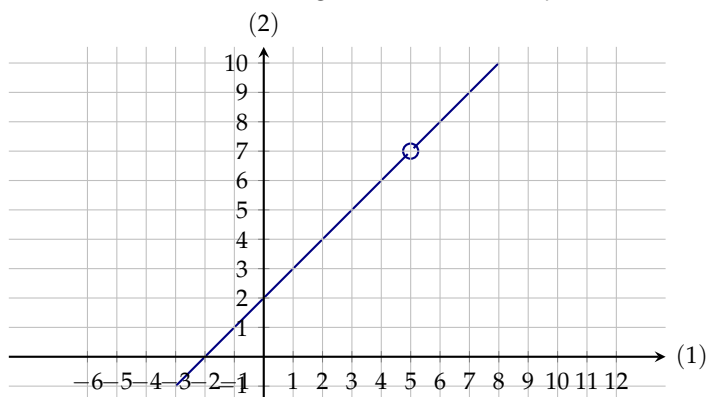
$$f(x) = \sqrt{x}$$

■

■ **Eksempel 17** Funktionen givet ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

har en begrænsning i sin definitionsmængde fordi $x - 5$ skal være forskelligt fra 0 og derfor kan x ikke være 5. Men for alle andre værdier af x er funktionen defineret, derfor bliver definitionsmængden $Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, hvilket læses »alle reelle tal undtagen 5. Værdimængden for f bliver så alle de værdier for y , undtagen den værdi der svarer til x -værdien 5. På grafen for $f(x)$ kan man se at det er værdien 7. Værdimængden er derfor $Vm(f) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.



$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

■

Øvelse 56 Bestem definitions- og værdimængde for følgende funktioner.

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

4.1 Lineære funktioner

Den lineære funktion $f(x) = ax + b$, hvor a er hældningskoefficienten, stigning pr. enhed. b er skæringen med y -aksen, start værdien. For at vise dette indsættes x -værdien for skæring med y -aksen $x = 0$.

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow f(0) = b$$

heraf ses at grafen for f vil skære y -aksen i punktet $(0, b)$.

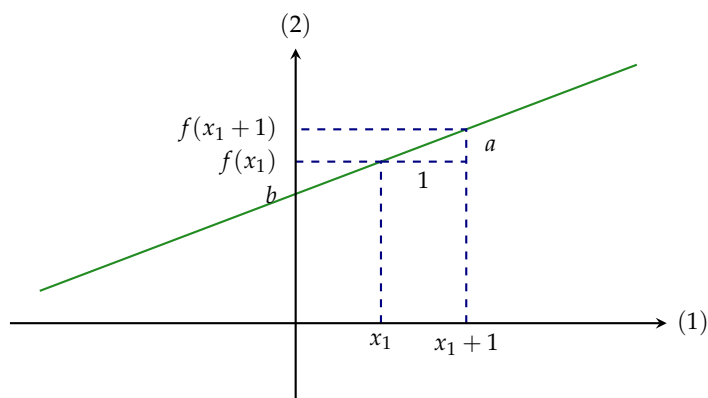
$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1) + b \\ &= ax + a + b \\ &= f(x) + a \end{aligned}$$

Værdien $x+1$ indsættes i $f(x)$
Parentesen ganges ud
 $ax + b$ erstattes med $f(x)$

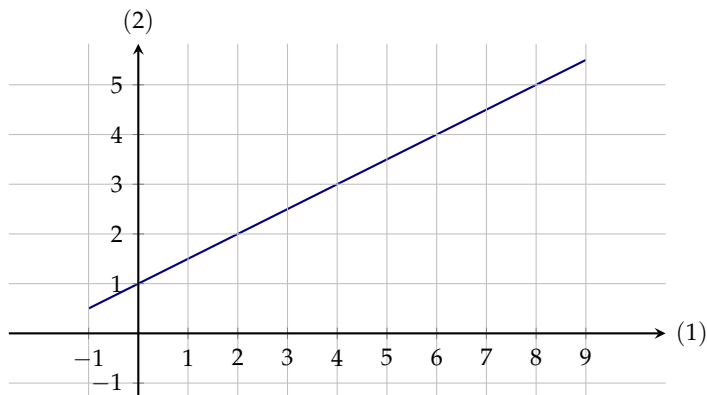
heraf ses at når x -værdien vokser med 1, vokser funktionsværdien med a .



Video der forklarer konstanternes betydning for grafens forløb for en lineær funktion.



■ **Eksempel 18** På figuren ses grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Denne graf skærer y -aksen i 1 og har hældningen $\frac{1}{2}$.

I Maple kan grafen for en funktion tegnes med kommandoen `plot`. Efter funktionsforskriften sættes komma og så skrives i hvilket interval funktionen skal tegnes, ved at skrive `x=fra .. til`. Det er meget vigtigt at der bruges netop to punktummer.



Video der viser hvordan kommandoen `plot` kan bruges i Maple

Maple : Graf for funktion.

```
plot(2*x+4,x=-3..7)
```

Maple : Graf for flere funktioner.

```
plot([2x+4, -x+1],x=-3..7)
```

GeoGebra : Graf for funktion.

```
f(x)=2x+4
```

GeoGebra : Graf for flere funktioner.

```
f(x)=2x+4
```

```
g(x)=-x+1
```

Sætning 6 For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, da vil

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad b = y_1 - ax_1$$

■ **Bevis** Da $f(x_1) = y_1$ er $y_1 = ax_1 + b$ og da $f(x_2) = y_2$ er $y_2 = ax_2 + b$. Ved at udregne $y_2 - y_1$ fås at

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b)$$

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b$$

parenteserne ophæves

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

udtrykket reduceres

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

udtrykket faktorerises



Video med bevis for to-punkts-formlen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

ligningen divideres med $x_2 - x_1$

Når a er kendt kan b beregnes ved at isolere b i en af ligningerne $y_1 = ax_1 + b$ og $y_2 = ax_2 + b$. Herved fremkommer formlen

$$y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$$

og tilsvarende for ligningen $y_2 = ax_2 + b$. ■

■ **Eksempel 19** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$. $(2, 3)$ og $(3, 6)$, Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{6 - 3}{3 - 2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$b = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3$$

Regneforskriften bliver $f(x) = 3x - 3$ ■



Video med eksempel på bestemmelse af forskrift for en lineær funktion ud fra to punkter.

■ **Eksempel 20** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$. $(5, 3)$ og $(2, 9)$, Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{9 - 3}{2 - 5} = \frac{6}{-3} = -2 \quad b = 3 + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

Regneforskriften bliver $f(x) = -2x + 13$ ■

■ **Eksempel 21** Funktionen $f(x)$ er lineær og $f(3) = 5$ og $f(6) = 4$, bestem regneforskriften for $f(x)$.

$$a = \frac{4-5}{6-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$b = 5 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5 + 1 = 6$$

Regneforskriften for $f(x)$ bliver $f(x) = -\frac{1}{3}x + 6$ ■

Øvelse 57 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne, bestem forskriften for f .

a) $(3,6)$ og $(2,4)$

b) $(5,1)$ og $(15,2)$

c) $(2,4)$ og $(4,3)$

d) $(8,7)$ og $(12,28)$

e) $(4,4)$ og $(6,2)$

f) $(-2,4)$ og $(8,5)$

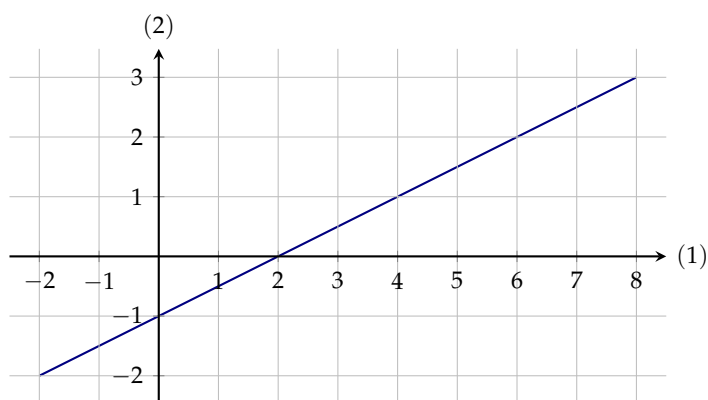
g) $(5,11)$ og $(70,52)$

h) $(2,-4)$ og $(-5,3)$

i) $(-2,-2)$ og $(-5,-2)$

j) $(-2,-2)$ og $(-2,5)$

■ **Eksempel 22** For at bestemme forskriften på grafen aflæses to punkter.



De to aflæste punkter er $(2,0)$ og $(0,-1)$. Disse punkter indsættes

i formlerne

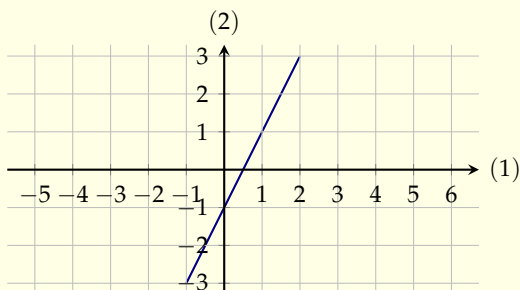
$$a = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$b = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

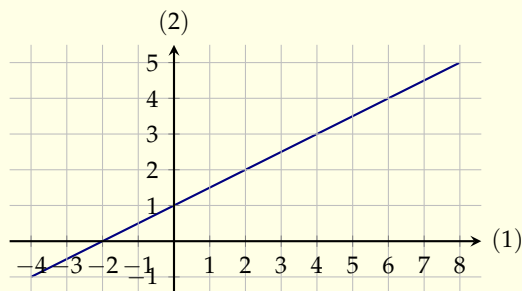
Forskriften bliver $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$. ■

Øvelse 58 Bestem forskriften for funktionen f hvis graf ses på figuren.

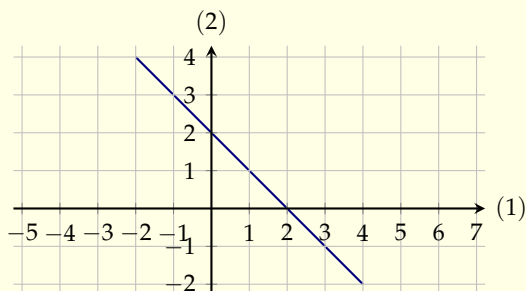
a) Bestem forskriften for funktionen, hvis graf ses på figuren.



b) Bestem forskriften for funktionen, hvis graf ses på figuren.



c) Bestem forskriften for funktionen, hvis graf ses på figuren.



Konstanterne a og b er hældningen og skæringen med y -aksen. Men hvis funktionen anvendes til at beskrive en sammenhæng mellem to variable x og y med en relation til virkelige størrelser, får a og b også en betydning i relation til denne sammenhæng og funktionen kaldes en *model*.

■ **Eksempel 23** En patient får et saltvandsdrop. Dropflasken indeholder til at begynde med 950 mL saltvand, og patienten får 5 mL saltvand pr. minut. En model for sammenhængen mellem tid og dropflaskens indhold bliver så

$$y = -5x + 950$$

hvor y er dropflaskens indhold i mL og x er tiden i minutter. ■

■ **Eksempel 24** Efter 5 minutter er der 925 mL saltvand i dropflasken og efter 25 minutter er der 825 mL tilbage. Bestem a og b for den lineære sammenhæng mellem tid og dropflaskens indhold.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{925 - 825}{5 - 25} = \frac{100}{-20} = -5$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 825 - (-5) \cdot 25 = 950$$

Det betyder at der hvert minut løber 5 mL (a) saltvand ud af dropflasken og at flasken indeholdt 950 mL (b) fra start. ■

■ **Eksempel 25** En patient får et saltvandsdrop. Sammenhængen mellem dropflaskens indhold af saltvand og tiden i minutter ses i tabellen nedenfor. Det antages at sammenhængen er lineær.



Video med eksempel på fortolkning af konstanter i lineære og eksponentielle modeller.

Tid i min.	0	10	17	25
Indhold i mL	950	900	865	825

For at bestemme a og b i den lineære funktion udføres lineær regression på tabellens data. I maple skrives

Maple : Lineær regression.

```
with(Gym):
LinReg([0, 10, 17, 25],[950, 900, 865, 825],x)


$$-5x + 950$$

```

GeoGebra : Lineær regression.

```
FitLinje({(0,950),(10,900),(17,865),(25,825)})
→  $y = -5x + 950$ 
```



Video med et eksempel på opstilling af funktion ud fra en sproglig beskrivelse.

Den fundne model kan anvendes til at beregne enten den afhængige eller uafhængige variabel.

■ **Eksempel 26** Sammenhængen mellem indholdet af saltvand i et drop og tiden kan beskrives med følgende model

$$f(x) = -5x + 950$$

Hvor x er tiden i minutter og $f(x)$ er indholdet af saltvand i mL i droppet.

Hvor mange mL saltvand er der tilbage efter 50 minutter?

$$y = -5 \cdot 50 + 950 = -250 + 950 = 700$$

Efter 50 minutter er der 700 mL tilbage.

Hvor lang tid går der inden der er 200 mL tilbage?

$$200 = -5 \cdot x + 950 \Leftrightarrow 200 - 950 = -5 \cdot x \Leftrightarrow \frac{-750}{-5} = 150$$

Der går 150 minutter inden der kun er 200 mL tilbage. ■

Øvelse 59 I perioden 2004-2008 er det årlige offentlige forbrug steget med 18,5 mia. kr. pr. år. I 2004 var det årlige offentlige forbrug 388 mia. kr.

- Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver udviklingen i det årlige offentlige forbrug som funktion af tiden.
- Hvornår vil det offentlige forbrug være 500 mia.?
- Hvad vil det offentlige forbrug være i 2020?

Øvelse 60 Antallet af medlemmer af e-sports foreninger stiger hvert år med 750 og i år 2015 var der 1300 medlemmer.

- Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver udviklingen i antallet af medlemmer i e-sports foreninger som funktion af antallet af år.

Øvelse 61 Produktionen af øl i perioden 2010 til 2015 i et mikrobryggeri.

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Øl i mio. liter	0,23	0,31	0,42	0,49	0,61	0,71

Det antages at udviklingen i produktionen af øl følger en model som denne

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor x er antallet af år efter 2010 og $f(x)$ er produktionen af øl i mio. liter.

- Benyt tabelles data til at bestemme a og b .
- Giv en fortolkning af a .
- I hvilket år vil mikrobryggeriet producere mere end 1,2 mio. liter øl?

4.1.1 Forskydning af grafen for en funktion

Grafen for enhver funktion kan forskydes parallelt med 2. akse ved at tilføje en konstant til funktionsforskriften. Er konstanten positiv forskydes grafen op og er konstanten negativ forskydes grafen ned. Grafen forskydes parallelt med 1. akse ved at tilføje en konstant til den uafhængige variabel. Er konstanten positiv forskydes grafen til venstre og er konstanten negativ forskydes grafen til højre.

■ **Eksempel 27** Funktion med forskriften $f(x) = -2x$ kan forskydes parallelt med 2. akse ved at tilføje en konstant til regneudtrykket, så kommer funktionen til at se således ud

$$f(x) = -2x + k$$

Maple

```
Explore(plot(-2x+k, x=-5..5, -5..5), k =-4..4)
```

GeoGebra

$f(x) = -2x + k$

GeoGebra vil selv definere k som en skyder i intervallet -5 til 5. Intervallet kan ændres i programmets indstillinger.

Grafen forskydes parallelt med 1. akse ved at tilføje en konstant til den uafhængige variabel, så kommer funktionen til at se således ud

$$f(x) = -2(x + k)$$

Maple

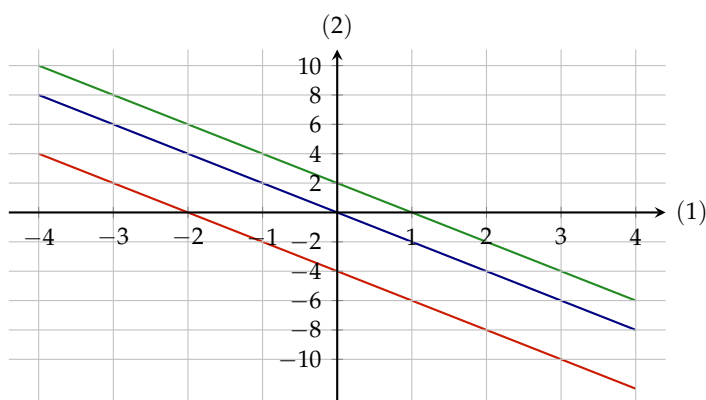
```
Explore(plot(-2(x+k), x=-5..5, -5..5), k =-4..4)
```

GeoGebra

$f(x) = -2(x + k) + p$

GeoGebra vil selv definere k og p som skydere i intervallet -5 til 5. Intervallet kan ændres i programmets indstillinger.

■



$$\begin{aligned} & \text{---} y = -2 \cdot x \\ & \text{---} y = -2 \cdot x + 2 \\ & \text{---} y = -2 \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

I Maple kan der godt være to parametre

Maple

```
Explore(plot(-2(x+k)+p, x=-5..5, -5..5),
  k = -4..4, p=-4..4)
```

Øvelse 62 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = 2x + 3$$

For at parallelforskyde funktionen skal der to parametre ind i forskriften.

$$f(x) = 2(x + k) + 3 + p$$

- a) Hvilke værdier er der for k og p , for at grafen for f går gennem punktet $(-1, 2)$.

Øvelse 63 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = -4x + 1$$

- a) Hvilke værdier kan parameterne have, for at grafen for f går gennem punktet $(1, 6)$.

Øvelse 64 Brug Maples Explore kommando til at parallelforskyde grafen for funktionen

$$f(x) = x$$

- Hvilke værdier kan parameterne have, for at grafen for f går gennem punktet $(1, 2)$.
- Er det nødvendigt med to parametre?

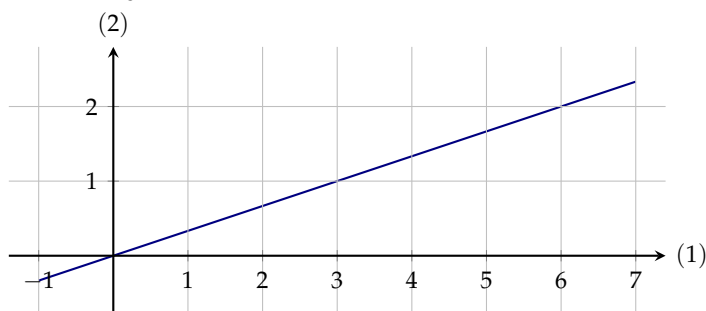
4.1.2 Ligeftrem- og omvendt proportional

Definition 14 De to variable x og y siges at være ligeftrem proportionale, hvis

$$y = k \cdot x$$

Dette kan også skrives $\frac{y}{x} = k$ dvs. at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.

■ **Eksempel 28** y er ligeftrem proportional med x med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{3}$.



Video hvor ligeftrem proportionalitet forklares.

$$y = \frac{1}{3} \cdot x$$

■ **Eksempel 29** I formelen $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ er F og M ligeftrem proportionale, hvis G, m og r er konstante.

$$F = \underbrace{\frac{G \cdot m}{r^2}}_k \cdot M$$

■

■ **Eksempel 30** I formlen

$$x \cdot y = a \cdot b$$

er x og y ikke ligefrem proportionale, selvom a og b er konstante.

$$x = \underbrace{a \cdot b}_k \cdot \frac{1}{y}$$

x og y kaldes omvendt proportionale. ■

■ **Eksempel 31** I formlen

$$P = a \cdot T^4$$

hvor a er en konstant, er der ingen ligefrem proportionalitet fordi T er i fjerde. ■



Video hvor omvendt proportionalitet forklares.

Øvelse 65 Hvilke af disse variable er der en ligefrem proportional sammenhæng mellem?

a) $m = n \cdot M$

b) $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

c) $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

d) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$

■ **Eksempel 32** Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot 4$$

Det betyder at k er 2,5.

Når $x = 20$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 2,5 \cdot 20$$

Det betyder at y er 50. ■

Øvelse 66 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2		7
y	1	2	

Øvelse 67 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x		2	5
y	6	8	

Definition 15 De to variable x og y siges at være omvendt proportionale, hvis

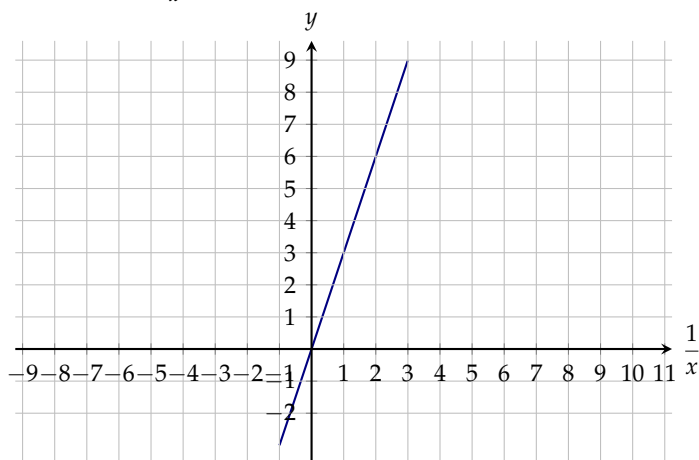
$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

Dette kan også skrives $y \cdot x = k$, k kaldes proportionalitetsfaktoren.

■ **Eksempel 33** I formlen

$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

er varablerne y og x omvendt proportionale. Grafisk kan det ses ved at lave et $(y, \frac{1}{x})$ -plot.



$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

■ **Eksempel 34** Variablerne x og y er omvendt proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formelen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot \frac{1}{4}$$

Det betyder at k er 40.

Når $x = 10$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 40 \cdot \frac{1}{10}$$

Det betyder at y er 4. ■

Øvelse 68 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2	8	
y	2		$\frac{1}{3}$

Øvelse 69 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	6		12
y	10	6	

4.1.3 Inverse funktioner

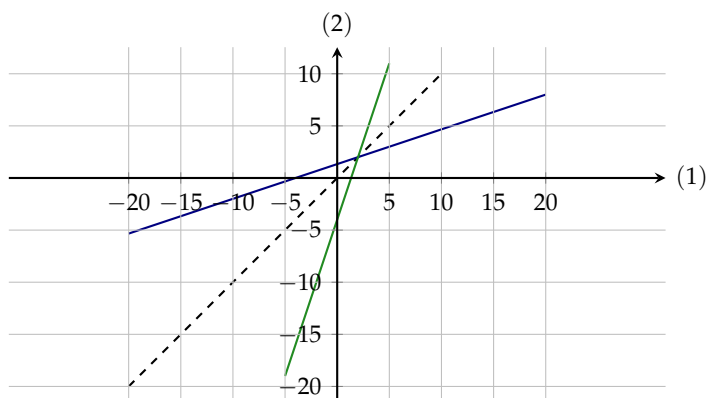
En invers funktion er en funktion hvor x og y er byttet om. Symbolet for en invers funktion er $^{-1}$. Den inverse funktion til funktionen $f(x)$:

$$y = 3x - 4$$

er således funktionen $f^{-1}(x)$, hvor x og y er byttet om: $x = 3y - 4$ hvor y isoleres

$$-3y = -x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Når man ser på det grafisk, ser man at graferne for de to funktioner er spejlinger af hinanden i linien $y = x$.



--- Spejlingsakse
 — $y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3}$
 — $y = 3 \cdot x - 4$



Video hvor inverse funktioner forklares. Eksempler på bestemmelse af inverse funktioner.

Definition 16 — Invers funktion. Den inverse funktion til f kaldes f^{-1} , og den inverse funktion f^{-1} er defineret som funktionen der opfylder at

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

■ **Eksempel 35** Det betyder at for $f(x) = 3x - 4$ og $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ skal der gælde at $f(f^{-1}(x)) = x$. Dette ses af følgende udregning.

$$f(f^{-1}(x)) = 3 \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) - 4 = (x + 4) - 4 = x$$

Øvelse 70 Undersøg om følgende funktioner er inverse til hinanden.

a) $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ og $g(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = 4x - 8$ og $g(x) = \frac{1}{4}x - 2$

d) $f(x) = x - 3$ og $g(x) = x + 3$

I den inverse funktion er x og y byttet om, det kan bruges til at sige noget om hvilken type af funktion en invers funktion er. Her ses tabellen og hvilke typer af funktioner der findes. Denne gang er den udvidet med hvilken type de inverse funktioner er. Det kan ses ud fra om x og y er hhv. + og $\cdot$. For den lineære funktion

som er en $(+, +)$ -funktion og den inverse er en $(+, +)$ -funktion og derfor også lineær. Men eksponentialfunktionen som er en $(+, \cdot)$ -funktion, der vil den inverse funktion være en $(\cdot, +)$ -funktion. Og det er en logaritmefunktion. Senere ses på potens, eksponentiel- og logaritmefunktionerne.

Funktion			Invers funktion		
Lineær funktion	x	$+$	y	$+$	Lineær funktion
	y	$+$	x	$+$	
Potens-funktion	x	$\cdot$	y	$\cdot$	Potens-funktion
	y	$\cdot$	x	$\cdot$	
Eksponentiel-funktion	x	$+$	y	$+$	Logaritme-funktion
	y	$\cdot$	x	$\cdot$	
Logaritme-funktion	x	$\cdot$	y	$\cdot$	Eksponentiel-funktion
	y	$+$	x	$+$	

For at bestemme den inverse til en funktion, byttes om på de to variable, typisk x og y , og derefter isoleres variablen y .

■ **Eksempel 36** For funktionen $f(x) = 2x - 3$, hvor $f(x) = y$, kan den inverse funktion udregnes ved at erstatte y med x og x med y . Da kommer ligningen til at se således ud.

$$x = 2y - 3$$

og i denne ligning isoleres y .

$x = 2y - 3$	
$x + 3 = 2y$	3 lægges til ligningen
$\frac{x + 3}{2} = y$	ligningen divideres med 2
$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = y$	brøken deles op

Den inverse funktion er så $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. ■

Øvelse 71 Bestem den inverse funktion til f .

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$

c) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = 3x - 3$

e) $f(x) = 2x - 4$

f) $f(x) = -2x - 2$

g) $f(x) = 3x + 5$

h) $f(x) = ax + b$

4.2 Eksponentielle funktioner

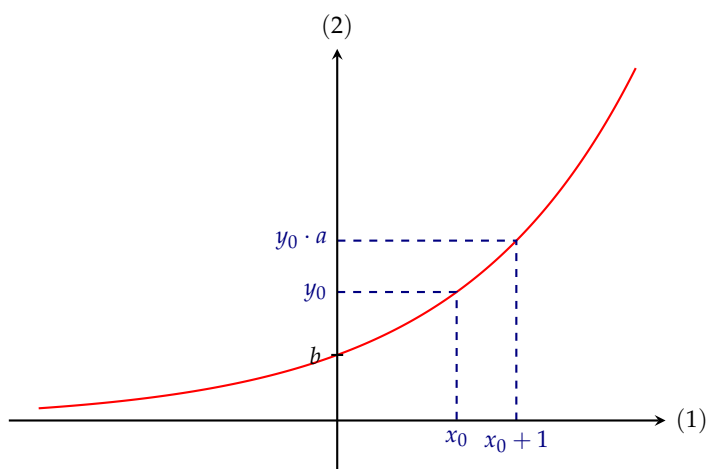
Definition 17 En funktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $a > 0$ og forskellig fra 1 kaldes for en eksponentiel funktion.

Forskriften for en eksponentiel funktion er $f(x) = b \cdot a^x$ hvor b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren.

Sætning 7 — Konstanternes betydning for grafens forløb. For eksponentielle funktioner med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ gælder der, at grafen for funktionen går gennem punktet $(0, b)$, dvs grafen skærer 2.aksen i b . Der gælder ligeledes, at grafen går gennem punktet $(x_0 + 1, a \cdot y_0)$.



Video med en forklaring af sammenhængen mellem a og b forløbet af grafen for en eksponentiel funktion.



■ **Bevis** Når grafen skærer 2.aksen er x -værdien 0. Funktionsvær-

dien kan så beregnes

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

Ved at indsætte funktionsværdien $x_0 + 1$ fås, at

$$f(x_0 + 1) = b \cdot a^{x_0+1} = b \cdot a^{x_0} \cdot a^1 = y_0 \cdot a$$

Dette viser at grafen for f vil gå gennem punktet $(x_0 + 1, y_0 \cdot a)$. ■

Definition 18 — Voksende og aftagende. En funktion er voksende hvis

$$x_1 < x_2 \text{ gælder at } f(x_1) < f(x_2)$$

En funktion er aftagende hvis der for to værdier x_1 og x_2 hvor $x_1 < x_2$ gælder at $f(x_1) > f(x_2)$.

Sætning 8 — Betydningen af begyndelsesværdi og fremskrivningsfaktor.

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder følgende

- Grafen for en eksponentiel funktion er voksende, hvis fremskrivningsfaktoren a er større end 1, og aftagende hvis a er mellem 0 og 1.
- Jo større a er i intervallet $]1, \infty[$ jo hurtigere vokser grafen. Jo mindre a er i intervallet $]0, 1[$ jo hurtigere aftager grafen.

Beviset for påstand a) kræver kendskab til logaritme funktionen, og udskydes derfor til denne funktion er indført.

■ **Bevis — Sætning 8 b).** Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer større end 1 fås følgende.

$$a_1 < a_2$$

$$a_1^x < a_2^x$$

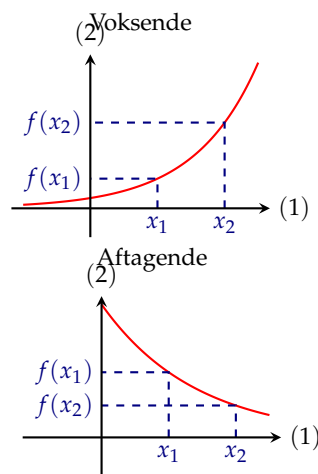
opløft begge sider med x .

Da $a > 1$ skal ulighedstegnet ikke vendes
multipliser med b .

$$b \cdot a_1^x < b \cdot a_2^x$$

Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer mellem 0 og 1 fås



Video med forklaring på konstanternes betydning for grafens forløb for en eksponentiel funktion.

følgende.

$$a_1 < a_2$$

$$a_1^x > a_2^x$$

opløft begge sider med x .

Da $0 < a < 1$ skal ulighedstegnet vendes

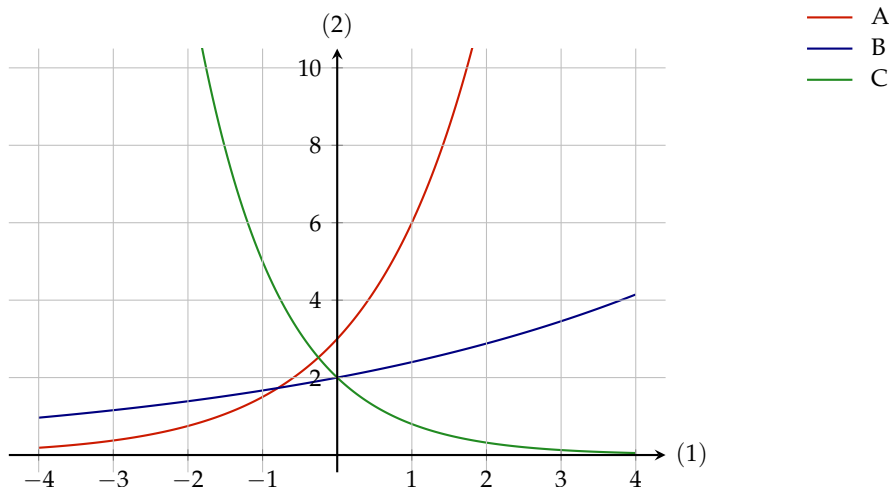
$$b \cdot a_1^x > b \cdot a_2^x$$

multipliser med b .

Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

■

■ **Eksempel 37** På figuren ses grafen for tre funktioner



Af de tre funktioner

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

$$g(x) = 2 \cdot 1,2^x$$

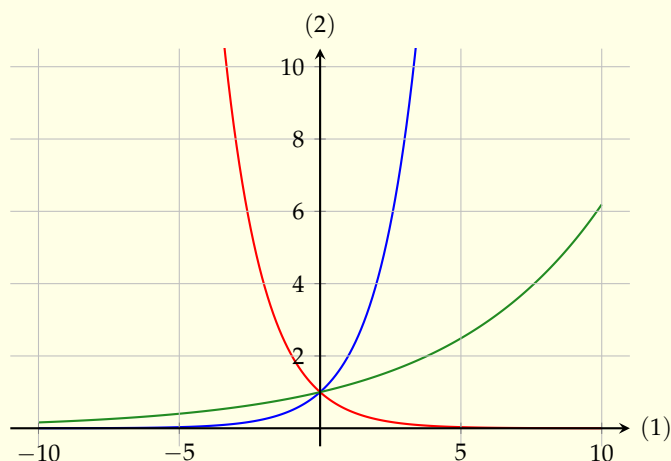
$$h(x) = 2 \cdot 0,4^x$$

er A graf for funktionen f da f har den største fremskrivningsfaktor, og grafen A vokser hurtigst og har den største b -værdi, da grafen skærer y -aksen højest af de tre grafer. Funktionen for grafen B er g da den har en fremskrivningsfaktor, som er større end 1 (grafene er voksende) men mindre end fremskrivningsfaktoren for f , og grafen vokser langsommere end grafen for A. C er grafen for funktionen h , da grafen er aftagende og fremskrivningsfaktoren er mindre end 1.

■

Øvelse 72 Figuren viser grafen for funktionerne

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 0,5^x \text{ og } h(x) = 1,2^x$$



— B
— A
— C

a) Gør rede for hvilken graf, der hører til hvilken funktion.

Sætning 9 Forskriften for en eksponentiel funktionen $f(x) = b \cdot a^x$, kan bestemmes, hvis to punkter på dens graf kendes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$



Video med bevis for to-punkt
formlen for en eksponentiel
funktion.

■ **Bevis** Hvis fremskrivningsfaktoren a er kendt, kan b beregnes hvis ét punkt (x_1, y_1) er kendt. I ligningen $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ isoleres b ved at dividere med a^{x_1} .

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Er fremskrivningsfaktoren ikke kendt, skal den beregnes ved at bruge endnu et punkt. Hvis de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger på grafen, betyder det at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Ved division

af y_2 med y_1 fås, at

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

forkort med b

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

potensregneregelen $\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2-x_1}$$

da $y > 0$ findes $x_2 - x_1$ roden af $\frac{y_2}{y_1}$

$${}^{x_2-x_1}\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} = a$$



Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en eksponentiel funktion ud fra to punkter.

■ **Eksempel 38** Grafen for en eksponentielt voksende funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Grafen går gennem punkterne $P(1,6)$ og $Q(3,24)$.

Tallene a og b kan bestemmes

$$a = {}^{3-1}\sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2 \quad b = \frac{6}{2^1} = 3$$

Øvelse 73 Bestem forskriften for en eksponentiel funktion med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem punkterne $(2,6)$ og $(4,24)$.

Øvelse 74 Væksten af en bakteriekultur kan beskrives med en eksponentielt voksende funktion $f(x)$, hvor x er antallet af timer og $f(x)$ er antallet af bakterier. Det oplyses, at $f(3) = 864$ og $f(6) = 1493$.

a) Bestem en forskrift for f .

Forskriften for en eksponentiel funktion kan også bestemmes med regression. I dette eksempel skal en eksponentiel model bestemmes ved regression, hvor den uafhængige variabel er tid. Det er vigtigt at huske ikke at bruge årstallet, fordi så vil IT-værktøjet i nogle tilfælde afrunde resultatet til nul. I modeller med årstal, er det altid antallet af år efter et bestemt årstal.

■ **Eksempel 39** I tabellen ses en opgørelse over den årlige svinetransport ud af Danmark i perioden 2006-2009.

Årstal	2006	2007	2008	2009
Mio. svin	4.3	4.9	6.3	8.0

I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, er en funktion f af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor x er antal år efter 2005.

Med eksponentiel regression bestemmes forskriften til

$$f(x) = 4.2 \cdot 1.24^x$$

Maple

```
with(Gym):
ExpReg([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],x)

4.1571.235x
```

GeoGebra

```
FitVækst({(0,4.3),(1,4.9),(2,6.3),(3,8)})
→ 4.16 · 1.24x
```

■
Øvelse 75 Tabellen nedenfor viser udviklingen i et lands energiproduktion (målt i GW) i perioden 2005-2010.

Årstal	2005	2007	2008	2009	2010
Energiproduktion	202	421	623	1132	1541

I en model kan udviklingen i energiproduktion beskrives ved en funktion af typen

$$E(t) = b \cdot a^t$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i MW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Benyt data fra tabellen til at bestemme en forskrift for E .

Definition 19 Vækstraten r er fremskrivningsfaktoren a minus en.

$$r = a - 1$$



Video med eksempel på bestemmelse af vækstraten for en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 40** I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, i perioden 2006-2009, er en funktion f af typen

$$f(x) = 4.2 \cdot 1.24^x$$

hvor x er antal år efter 2006.

Tallet 4,2 viser antallet af svin der blev transporteret ud af Danmark i år 2006. Tallet 1,24 viser at den gennemsnitlige vækstrate pr. år i årene 2006-2009 var 0,24 eller 24%. ■

Øvelse 76 Udviklingen i energiproduktion i et land, i perioden 2005-2010, beskrives ved modellen

$$E(t) = 2.5 \cdot 1.09^t$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i GW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Bestem vækstraten for energiproduktionen.

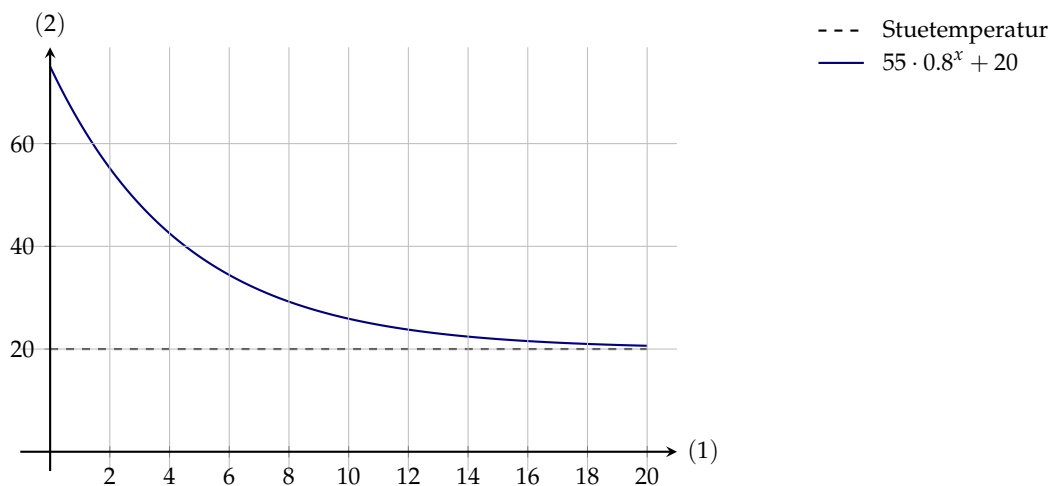
4.2.1 Forskydning af grafen for en eksponentielfunktion

Grafen for en eksponentielfunktion kan forskydes, på samme måde som en lineær funktion. Forskriften for den forskydte graf ser således ud.

$$f(x) = b \cdot a^{x+k} + p$$

hvor k er grafens forskydning parallelt med 1. akse og p er grafens forskydning med grafen parallelt med 2. akse.

■ **Eksempel 41** Afkøling af en kop varm cacao i stuetemperatur er et eksempel på en eksponentialfunktion der er forskudt parallelt med 2. akse.



■

I Maple kan Explore kommandoen bruges til at undersøge en eksponentielfunktion.

Maple

```
Explore(plot(2 * 1.2(x+k) + p, x=-10..10, -10..10),
  k=-4..4, p=-4..4)
```

GeoGebra

$$f(x) = 2 \cdot 1.2^{x+k} + p$$

GeoGebra vil selv lave de relevante skydere.

Øvelse 77 Brug Maples Explore funktion til at undersøge parallelforskydninger af funktionen

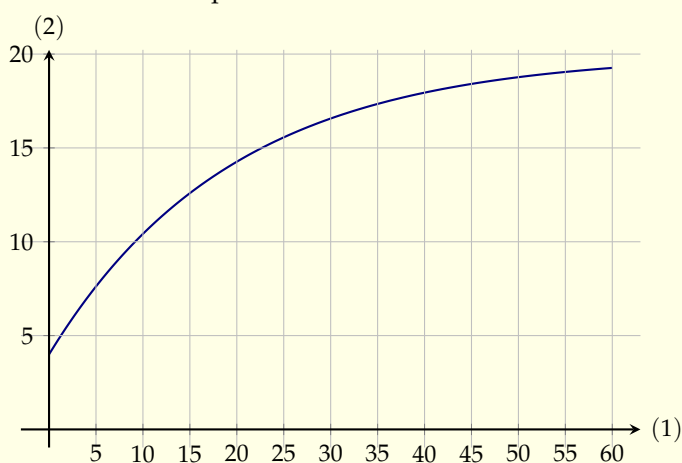
$$f(x) = 22 \cdot 0.85^x$$

- Hvilke værdier for parameterne gør, at grafen for f går gennem punktet $(2, 9)$?
- Er der nogle punkter, grafen ikke kan gå gennem?

- c) Er det muligt at forskyde grafen, så den går gennem punkterne $(0,7)$ og $(10,2)$?
- d) Er det muligt at forskyde grafen, så den går gennem to vilkårlige punkter?

Den næste funktion du skal undersøge, er noget anderledes fordi b i eksponentialfunktionen er negativ. Dette er ikke normalt noget du vil se, men funktionen illustrerer en meget normal situation.

Øvelse 78 På grafen ses temperaturen af noget koldt saftvand der står ved stuetemperatur.

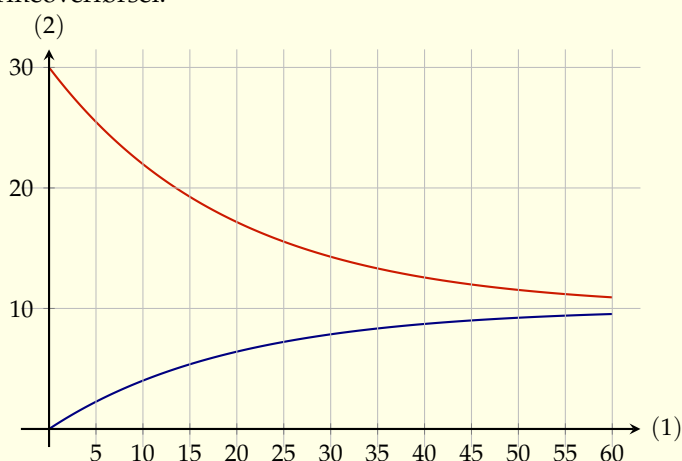


$$-16 \cdot 0.95^x + 20$$

- a) Hvad er temperaturen af saftvandet efter 5 min. ved stuetemperatur?
- b) Forklar hvordan grafen er blevet manipuleret fra den sædvanlige eksponentielle model.
- c) Hvordan kan starttemperaturen af saftvandet beregnes?
- d) Hvordan kan sluttemperaturen af saftvandet beregnes?
- e) Benyt grafen til at se, hvornår vokser temperaturen af saftvandet hurtigst?
- f) Benyt grafen til at se, hvornår vokser temperaturen af saftvandet langsomst?

Den næste situation er også meget normal, det kan fx være at blande koldt og varmt vand. Men den illustration som er her, kan ikke være vand, fordi det blandes meget hurtigere. Tænk på hvad der sker når du åbner for både det kolde og varme vand i en vandhane. Hvis det ikke er vand, hvad kan det så være? Er der energibevarelse i eksemplet? Det som gør det lidt mystisk, er at de har samme vækstrate.

Øvelse 79 På grafen ses temperaturen af to legemer af samme materiale, der er i kontakt med hinanden og derfor laver en varmeoverførsel.



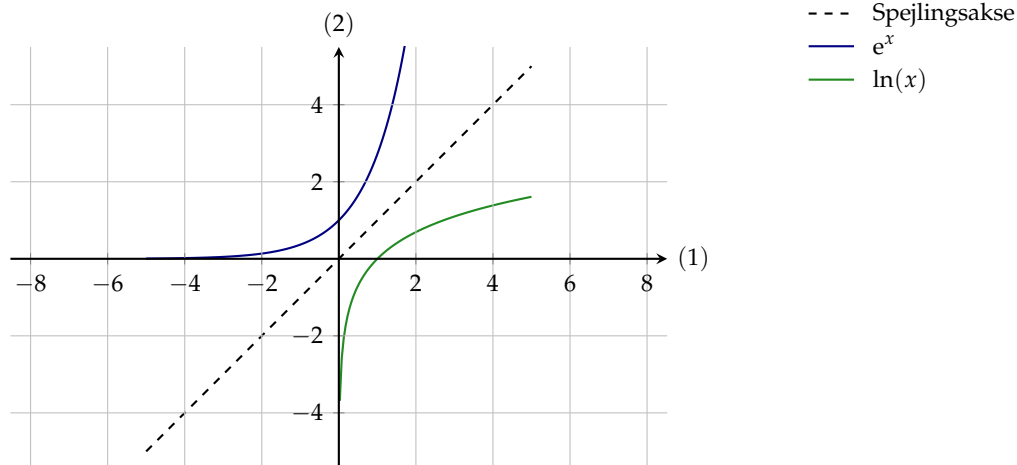
$$\begin{aligned} \text{Red line: } & 20 \cdot 0.95^x + 10 \\ \text{Blue line: } & -10 \cdot 0.95^x + 10 \end{aligned}$$

- Forklar hvordan graferne er blevet manipuleret fra den sædvanlige eksponentielle model.
- Hvad er størrelsesforholdet mellem de to legemer?
- Hvilken af de to legemer ændre temperatur hurtigst i starten?
- Kan sluttemperaturen af de to legemer forudsiges?
- Beregn temperaturen af 200 mL vand på 5°C og 800 mL vand på 25°C .

4.3 Logaritmefunktioner

Definition 20 — Den naturlige logaritme. Den naturlige logaritme $\ln(x)$ er den inverse funktion til den eksponentielle funktion e^x , hvor $e \approx 2.718281828$. Dette betyder at

$$\ln(e^x) = x \quad e^{\ln(x)} = x$$



Sætning 10 — Logaritmeregneregler. For den naturlige logaritme gælder følgende regneregler for $x, y > 0$.

- a) $\ln(e) = 1$
- b) $\ln(1) = 0$
- c) $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$
- d) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- e) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

■ **Bevis — Sætning 10 a) og b).** Ifølge definitionen af den naturlige logaritme er $\ln(e^x) = x$.

$$\ln(e^1) = 1$$

definition 20 for $x = 1$. Bemærk at $e^1 = e$

$$\ln(e^0) = 0$$

definition 20 for $x = 0$. Bemærk at $e^0 = 1$

■ **Bevis — Sætning 10 c).**

$$x^a = x^a$$

$$x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a$$

$$x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$$

$$\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$$

definition 20 $x = e^{\ln(x)}$

potensregnereglen $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

den naturlige logaritme anvendes

■

■ **Bevis — Sætning 10 d).**

$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)})$$

$$= \ln(e^{\ln(x) + \ln(y)})$$

$$= (\ln(x) + \ln(y)) \cdot \ln(e)$$

$$= \ln(x) + \ln(y)$$

definition 20 giver at $x = e^{\ln(x)}$

potensregnereglen $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

sætning 10 c)

sætning 10 a)

■

■ **Bevis — Sætning 10 e).**

$$\ln(x) = \ln(x)$$

$$\ln\left(x \cdot \frac{y}{y}\right) = \ln(x)$$

$$\ln\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = \ln(x)$$

$$\ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

x ganges med $1 = \frac{y}{y}$

faktorerne ombyttes

sætning 10 d) anvendes

$-\ln(y)$ lægges til

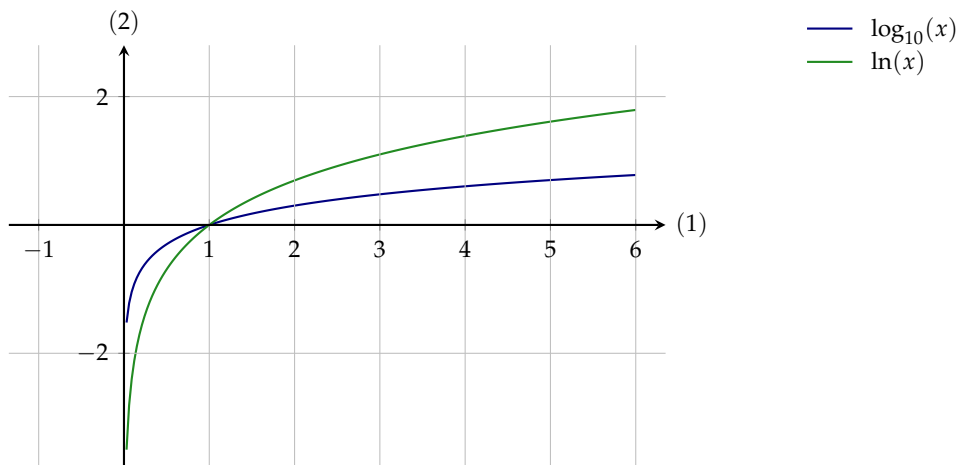
■

Definition 21 — Logaritmen med grundtal a . Logaritmen med grundtal a er den inverse funktion til eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$. Dette betyder at

$$\log_a(a^x) = x \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Sætning 11 Funktionen $\ln(x)$ er proportional med $\log_a(x)$, med proportionalitetsfaktor $\ln(a)$.

$$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$$



■ Bevis

$$x = a^{\log_a(x)}$$

definition 21

$$e^{\ln(x)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^{\log_a(x)}$$

definition 20

$$e^{\ln(x)} = e^{\ln(a) \cdot \log_a(x)}$$

potensregneregel $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

$$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$$

den naturlige logaritme anvendes

■

Da $\ln(x)$ er proportional med $\log_a(x)$ vil alle regnereglerne fra sætning 10 gælde for $\log_a(x)$ for alle grundtal a .

Logaritmen med grundtal 10 anvendes, ofte fx i definitionen af koncentrationen af H_3O^+ pH og decibel dB. Denne logaritme skrives ofte log uden angivelse af grundtal.

Logaritmeregnereglerne skal her bruges til at løse ligninger med eksponentialfunktioner og potensfunktioner.

Maple : Den naturlige logaritme.

$\ln(x)$

GeoGebra : Den naturlige logaritme.

$\ln(x)$

Maple : 10-tals logaritmen.

$\log[10](x)$

GeoGebra : 10-tals logaritmen.

$\log_{10}(x)$

Maple : Eksponentialfunktionen e^x .

$\exp(x)$

GeoGebra : Eksponentialfunktionen e^x .

$\exp(x)$

Maple : Tallet e .

$\exp(1)$

GeoGebra : Tallet e .

$\exp(1)$

Det er et problem for livet i havet hvis vandet bliver surt. Det er fordi havdyr ofte har et skelet indvendigt som fisk eller udvendigt som muslinger, og dette skelet består af calcium og calcium kan reagere med H_3O^+ . Det betyder at havdyrernes skelet bliver opløst i vandet, hvilket dyrerne ikke kan overleve. I surt vand er der mere H_3O^+ end i basisk vand. pH værdien fortæller præcist hvor meget

H_3O^+ der er i vandet med formlen

$$\text{pH} = -\log_{10}([\text{H}_3\text{O}^+])$$

Eller hvor mængden af H_3O^+ er isoleret.

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

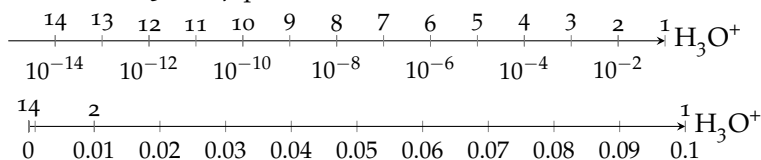
Det betyder at i vand med en pH-værdi på 7.6 er der ti gange så meget H_3O^+ som i vand med en pH-værdi på 8.6.

■ **Eksempel 42** For at beregne mængden af H_3O^+ i havvand med en pH-værdi på 8.6, indsættes pH-værdien i formlen

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8.6}$$

Det giver $2.5 \cdot 10^{-9}$. ■

Grunden til at H_3O^+ måles på en logaritmisk skala, kan ses på følgende akser. På akserne er pH-værdien vist i forhold til indholdet af H_3O^+ . Mens den første akse der er logaritmisk fint viser alle pH-værdierne, er det ikke rigtigt muligt at se forskel på pH-værdierne 3 til 14, på den anden akse.



Det kunne selvfølgelig også være lige meget, hvis det ikke var fordi der er meget stor forskel på om pH-værdien er 11 eller 3.

Øvelse 80 Bestem den procentvise forskel mellem havvands indhold af H_3O^+ når pH-værdien falder fra 8.3 til 8.1.

4.3.1 Forskydning af logaritmefunktionen

Logaritmefunktionen indholder kun en parameter, der er grundtallet. Undersøg med kommandoen Explore hvordan sammenhængen er mellem grafen for logaritmefunktionen og grundtallet.

Maple

```
Explore(plot(log[a](x), x=-8..8, -4..3), a=2..10)
```

Grafen for logaritmefunktionen, med den naturlige logaritme $\ln$ kan også forskydes, hvor forskriften med parameterne k og p .

$$\ln(x + k) + p$$

Maple

```
Explore(plot(ln(x+k)+p, x=-8..8, -10..10),
k=-3..10, p=-10..10)
```

Øvelse 81 Undersøg den parameteriserede logaritme funktion

$$f(x) = \ln(x + k) + p$$

- a) Undersøg sammenhængen mellem parameteren k og funktionens definitionsmængden.

4.4 Mere om eksponentialfunktionen

Fordoblingskonstanten T_2 er det antal år pengene skal stå på kontoen for, at saldoen fordobles eller sagt på en anden måde, hvor lang tid går der før saldoen er steget med 100%.

Definition 22 — Fordoblingskonstanten. Fordoblingskonstanten T_2 er den konstant der opfylder ligningen

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

hvor f er en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 43** Hvis du fik 6% i rente pr. år, hvor mange år vil der så gå, før saldoen er blevet fordoblet? Det er denne ligning vi skal



Video med eksempel på anvendelse af fordoblings- og halveringskonstanten.

løse $1.06^n = 2$.

$$1.06^n = 2$$

$$\ln(1.06^n) = \ln(2)$$

$$n \cdot \ln(1.06) = \ln(2)$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.06)}$$

den naturlige logaritme anvendes

sætning 10 c) anvendes

ligningen divideres med $\ln(1.06)$

hvilket er 11.9 år. ■

Dette eksempel kan generaliseres til følgende sætning.

Sætning 12 Fordoblingskonstanten, T_2 , for funktionen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

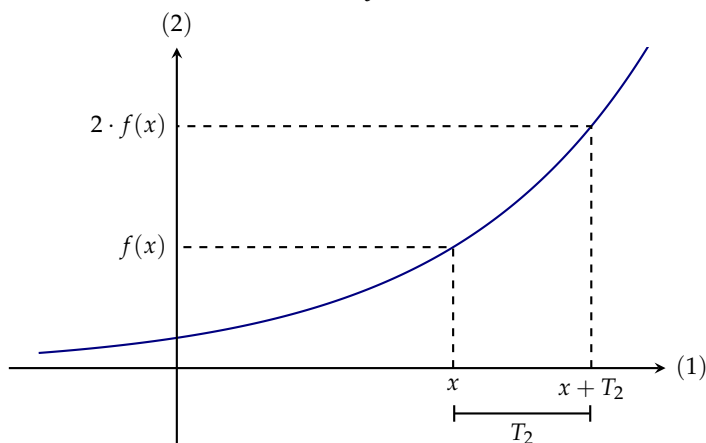
kan bestemmes med formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$



Video med bevis for formlen for fordoblingskonstanten.

■ **Bevis** Fordoblingskonstanten T_2 er det antal enheder (år) som x -værdien skal vokse med for at y -værdien fordobles.



Dette kan omskrives til ligningen

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

i denne ligning skal T_2 isoleres. Først anvendes funktionsudtrykket for $f(x) = b \cdot a^x$

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

så isoleres T_2 .

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

$$a^x \cdot a^{T_2} = 2 \cdot a^x$$

$$a^{T_2} = 2$$

$$\ln(a^{T_2}) = \ln(2)$$

$$T_2 \cdot \ln(a) = \ln(2)$$

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

ligningen divideres med b

ligningen divideres med a^x

den naturlige logaritme anvendes

sætning 10 c) anvendes

ligningen divideres med $\ln(a)$

Sætning 13 Den eksponentielt aftagende udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $0 < a < 1$ har halveringskonstanten

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

■ **Eksempel 44** Bestem fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 1.03^x$. Ved at bruge formelen $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.03)} \approx 23,4$$

fordoblingskonstanten er 23,4.

■ **Eksempel 45** Bestem halveringskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 0.7^x$. Ved at bruge formelen $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.7)} \approx 1.9$$

halveringskonstanten er 1,9.

Øvelse 82 Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for funktionen f .

a) $f(x) = 34 \cdot 1.025^x$

b) $f(x) = 4 \cdot 1.3^x$



Video med eksempel på bestemmelse af fordoblingskonstanten.



Video med eksempel på bestemmelse af halveringskonstanten.

c) $f(x) = 2 \cdot 11^x$

d) $f(x) = 11 \cdot 32^x$

e) $f(x) = 2 \cdot 1.001^x$

f) $f(x) = 34 \cdot 0.93^x$

g) $f(x) = 34 \cdot 0.03^x$

h) $f(x) = 0.2 \cdot x^{0.0721}$

Øvelse 83 Befolkningen i Nepal var i 1998 22.3 mio. I 1999 var den 22.8 mio. Antag at der er tale om en eksponentiel udvikling.

- Opstil en model for befolkningsudviklingen i Nepal.
- Bestem fordoblingstiden for befolkningen i Nepal.
- Bestem befolkningens størrelse i 2015.
- Bestem den relative forskel mellem modellen og det faktiske befolkningstal i 2015, hvor der var 28.4 mio.

Kilde: Globalis

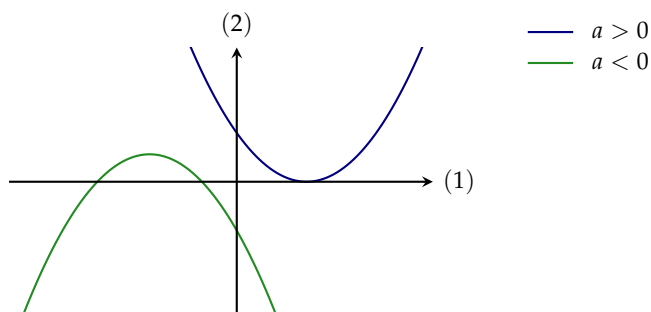
4.5 Andengradspolynomium

Definition 23 Et andengradspolynomium p er en funktion med forskriften

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

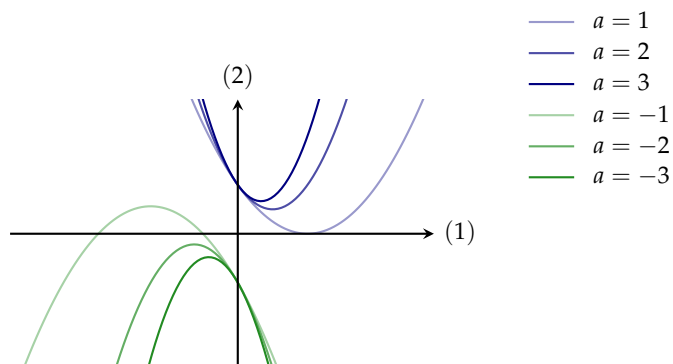
hvor $a \neq 0$ og a, b og c er reelle tal.

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel. Konstanterne a, b og c i andengradspolynomiet påvirker hvordan grafen ser ud. Er a positiv vender grene op og er a negativ vender grene ned.



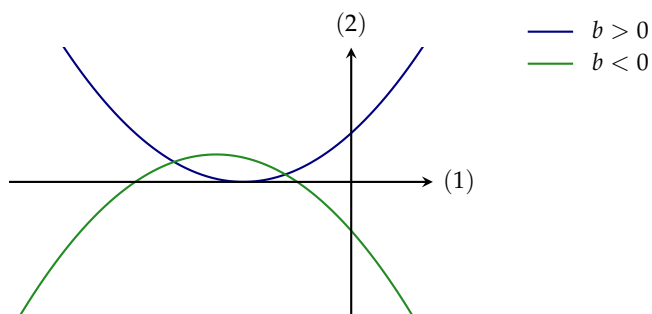
Video der forklarer betydningen af konstanterne for grafens forløb for et andengradspolynomium.

Jo større eller mindre a er, jo hurtigere vokser eller aftager grafen.

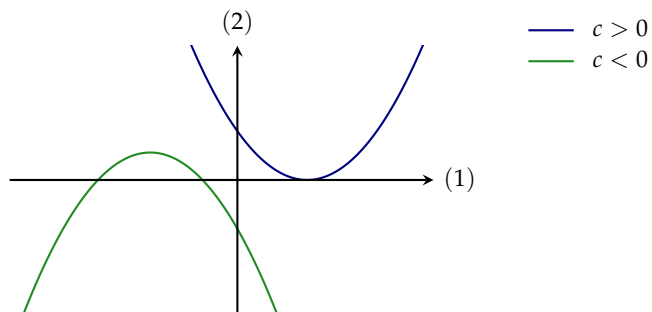


Video der forklarer, hvordan grafen for et andengradspolynomium tegnes.

b er hældning på grafen i grafens skæringspunkt med 2. akse.

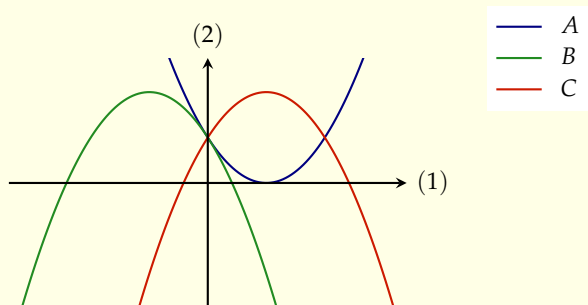


c er grafens skæringspunkt med 2. akse.

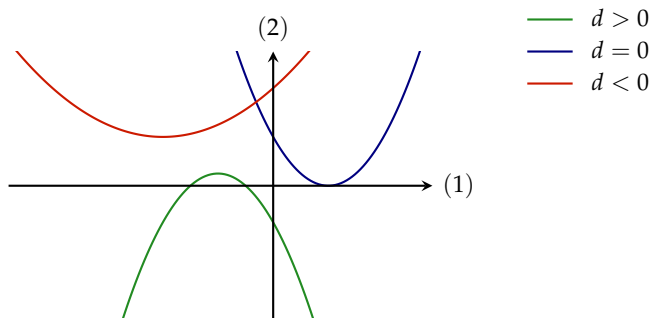


Øvelse 84 Grafen for de tre funktioner f, g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

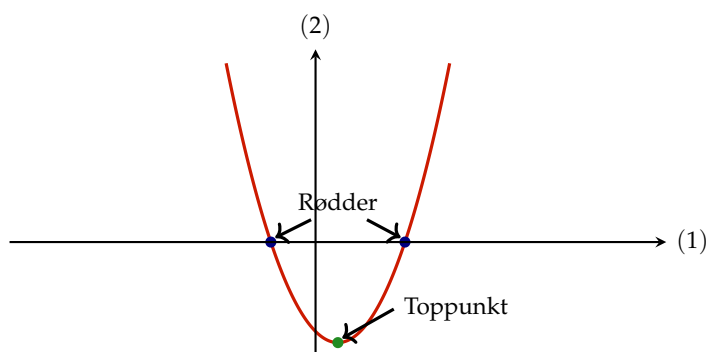
$$f(x) = -x^2 - 4x + 4 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad h(x) = -x^2 + 4x + 4$$



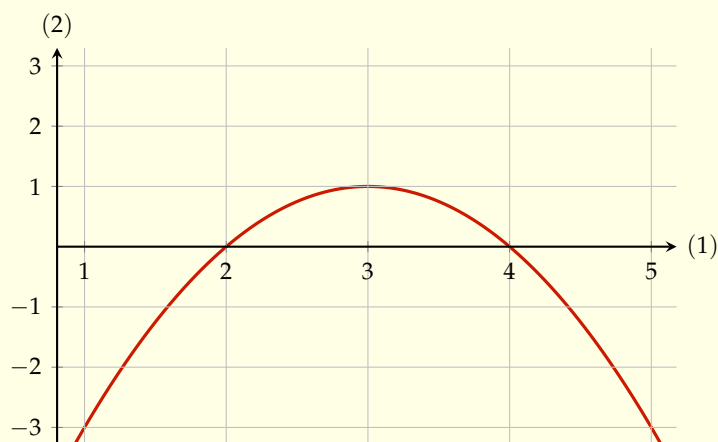
Hvis grafen for polynomiet skærer 1. aksen, kaldes disse skæringspunkter for polynomiets rødder. Et andengradspolynomium har inden rødder hvis diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ er negativ, hvis diskriminanten er 0 har polynomiet en rod.



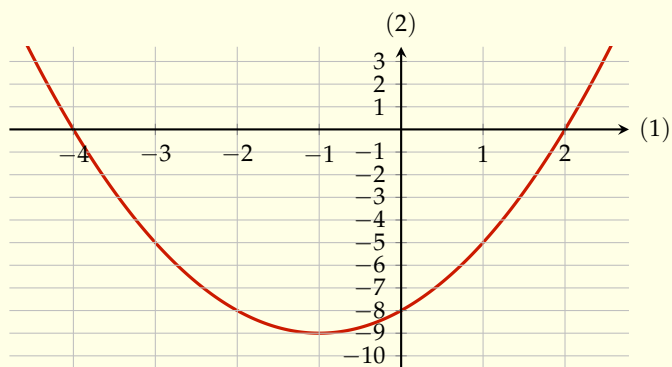
Det punkt hvor graferne skifter fra at være voksende til at være aftagende, eller omvendt, kaldes for grafens toppunkt.



Øvelse 85 Bestem rødder og toppunkt for parabeln.



Øvelse 86 Bestem rødder og toppunkt for parabeln.



Grafen for andengradspolynomiet kan forskydes parallelt med 1. og 2. akse. Det gøres ved at indsætte de to parametre p og s i forskriften for $f(x) = x^2$.

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

I Maple kan denne parameterfunktion undersøges med kommandoen Explore.

Maple

```
Explore(plot((x+s)^2 + p, x=-8..8, -10..10),
s=-3..10, p=-10..10)
```



Video der forklarer forskydningen af grafen for $f(x) = x^2$.

Øvelse 87 Undersøg funktionen med forskriften

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

hvor p og s er parametre.

- Hvad er sammenhængen mellem p og s og toppunktet for parabelen?
- Hvilke værdier kan p og s have for at grafen går gennem punktet $(3, 3)$.

Øvelse 88 Undersøg sammenhængen mellem p og s og a , b og c i de to forskrifter

$$f(x) = (x + s)^2 + p$$

og

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

- Opskriv en formel til beregning af b og c når s og p er kendt.
- Opskriv en formel til beregning af p og s når b og c er kendt.

Sætning 14 — Rødder. Grafen for polynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$ mulige skæringspunkter med førsteaksen - polynomiets rødder - kan findes med formlen

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

hvor $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, når $d \geq 0$ og $a \neq 0$.



Video bevis for formelen til bestemmelse af rødderne i et andengradspolynomium.

■ **Bevis** Der hvor grafen skærer 1. aksen er y -værdien 0. Det betyder, at for at finde rødderne skal ligningen $0 = ax^2 + bx + c$ løses.

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$4a \cdot 0 = 4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot c$$

$$0 = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac$$

$$b^2 - 4ac = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac + b^2 - 4ac \quad b^2 - 4ac \text{ lægges til}$$

$$b^2 - 4ac = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 \quad b^2 - 4ac \text{ erstattes med } d$$

$$d = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 \quad 1. \text{ kvadratsætning}$$

$$d = (2ax + b)^2$$

$$\sqrt{d} = \pm(2ax + b)$$

$$\pm\sqrt{d} = 2ax + b$$

$$-b \pm \sqrt{d} = 2ax$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = x$$

ligningen ganges med $4a$

omskrivninger

$b^2 - 4ac$ lægges til

$b^2 - 4ac$ erstattes med d

1. kvadratsætning

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$$

kvadratroden tages af ligningen

ligningen ganges med -1

b trækkes fra

ligningen divideres med $2a$

For at ligningen har rødder skal $d \geq 0$ fordi ellers er $\sqrt{d}$ ikke defineret. ■

■ **Eksempel 46** Rødderne til et andengradspolynomium

$$p(x) = x^2 - 2x - 3$$

kan beregnes ved at løse andengradsligningen

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

Dette gøres ved først at finde a , b og c .

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$$

Derefter beregnes diskriminanten med formlen $d = b^2 - 4ac$.

$$d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 - 4 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Nu kan løsningen til ligningen beregnes med formlen $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$



Viden der gennemgår beregningen af løsningen til en andengradsligning.

Øvelse 89 Bestem rødderne i polynomierne

a) $p(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

d) $p(x) = 0.5x^2 - 2x + 2$

■ **Eksempel 47 — Rødder i et polynomium.** Bestem rødderne i polynomiet

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

GeoGebra

Først defineret polynomiet.

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Så bestemmes rødderne. Rod(p)

$$\rightarrow A = (0.5, 0)$$

$$\rightarrow B = (1, 0)$$

Maple

$$\text{solve}(2x^2 - 3x + 1 = 0)$$

$$1, \frac{1}{2}$$

Rødderne er 0.5 og 1.

Øvelse 90 Bestem rødderne i polynomierne

a) $p(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

d) $p(x) = 0.5x^2 - 2x + 2$

Sætning 15 — Toppunkt. Toppunktet for grafen for andengradspolynomiet

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

kan findes med formelen

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right)$$

hvor $d = b^2 - 4ac$.

■ **Bevis** Toppunktet ligger mellem de to rødder, derfor kan førstekoordinaten til toppunktet beregnes som

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-b + \sqrt{d} - b - \sqrt{d}}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2b}{2a} \right) = \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

Dette er 1. koordinaten til toppunktet. For at bestemme 2. koordinaten, beregnes $p\left(\frac{-b}{2a}\right)$.



Video bevis for toppunktsformlen.

$$\begin{aligned} p\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c \\ &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-b^2}{2a} + c \\ &= \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + \frac{-b^2}{2a} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} \cdot \frac{2}{2} + c \cdot \frac{4a}{4a} \\
&= \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-d}{4a}
\end{aligned}$$



Video med eksempel på bestemmelse af toppunktet.

■ **Eksempel 48** Bestem toppunktet for polynomiet

$$p(x) = x^2 - 4x + 3$$

Formlen ($T_x = -b/2a$, $T_y = -d/4a$) hvor $d = b^2 - 4ac$, anvendes.

$$T_x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \text{ og } T_y = \frac{-((-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3)}{4 \cdot 1} = \frac{-(16 - 12)}{4} = -1$$

Koordinatsættet til toppunktet er $(2, -1)$.

Øvelse 91 Bestem toppunktet for polynomierne

a) $p(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

d) $p(x) = 0.5x^2 - 2x + 2$

■ **Eksempel 49 — Toppunkt i et andengradspolynomium.** Bestem toppunktet i polynomiet

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

GeoGebra

Først defineret polynomiet.

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Så bestemmes toppunkter.

Ekstremum(p)

$$\rightarrow A = (0.75, -0.13)$$

I Maple indsættes tallene i formlen.

Toppunktet er $(0.75, -0.13)$.

Øvelse 92 Bestem toppunkter i polynomierne

a) $p(x) = x^2 + x - 8$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $p(x) = 2x^2 + 2x - 24$

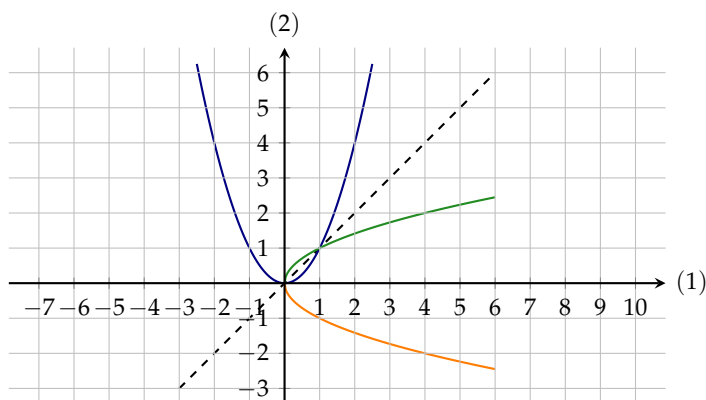
d) $p(x) = 0.5x^2 - x + 2$

4.6 Den inverse funktion til andengradspolynomiet

Funktionen $f(x) = x^2$ har to forskellige funktioner som dens inverse alt efter hvilket definitionsområde, der er gældende. Den inverse funktion findes ved at ombytte x og y derfor vil den inverse funktion være

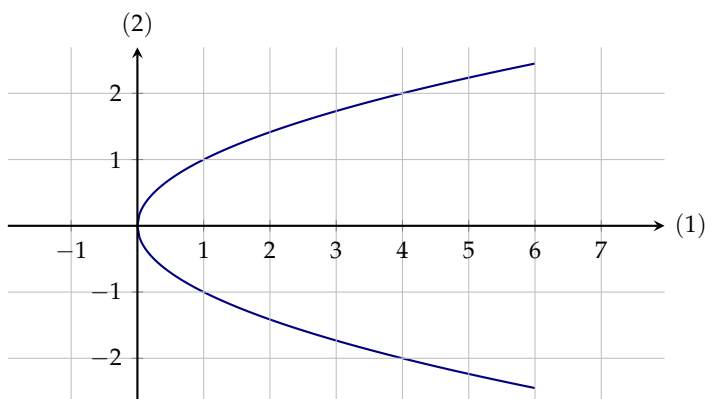
$$x = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

Denne funktion kan som det ses af grafen ikke være én funktion men er sammensat af de to funktioner $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ og $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$



- - - Spejlingsakse
- $f(x) = x^2$
- $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Dette kan ikke sammensættes til en enkelt funktion fordi denne graf, ikke er grafen af en funktion, fordi der til nogle x -værdier findes to funktionsværdier.



Eftersom at grafen for et andengradspolynomium altid har denne form, skal et andengradspolynomium altid begrænses i sin definitionsmængde inden den inverse bestemmes. Den inverse til et andengradspolynomium får værdimængden fra andengradspolynomiummet som definitionsmængden.

■ **Eksempel 50** Bestem den inverse funktion til $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, hvis graf går gennem punktet $(-2, 6)$
isoleret y i ligningen

$$x = -y^2 + 6y - 2$$

Det giver de to ligninger

$$y = 3 - \sqrt{7 - x}$$

$$y = 3 + \sqrt{7 - x}$$

Bemærk at definitionsområdet for begge funktioner er værdimængden for f . Definitionsområdet for f^{-1} er $x \leq 7$ i begge tilfælde. Værdimængden for $3 + \sqrt{7 - x}$ er $x \geq 3$, da $\sqrt{7 - x}$ ikke kan være negativt. Værdimængden for $3 - \sqrt{7 - x}$ er $x \leq 3$ af samme grund.

Da grafen skal gå gennem punktet $(-2, 6)$ må den søgte inverse funktion være

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{7 - x}$$

■

Øvelse 93 Bestem den inverse funktion med definition- og værdimængde for funktionen med forskriften

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Grafen for den inverse funktion går gennem punktet (14, 6).

Øvelse 94 Bestem den inverse funktion med definition- og værdimængde for funktionen med forskriften

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1$$

Grafen for den inverse funktion går gennem punktet (-1, 0).

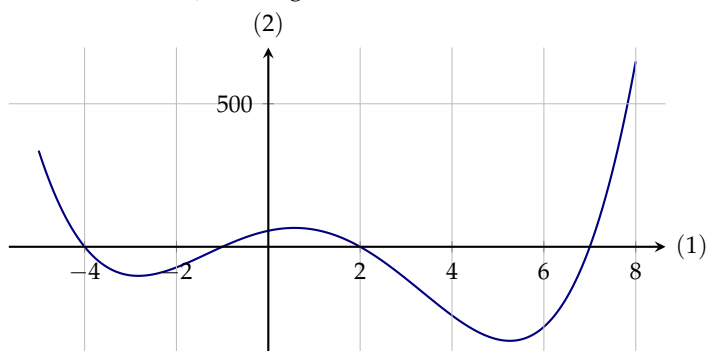
4.7 Polynomier generelt

Et polynomium er en funktion der består af led af typen ax^n hvor n er et helt positivt tal. Det led med det største giver navn til polynomiet. Er $n = 4$ kaldes polynomiet for et fjerdegradspolynomium. Der hvor grafen for et polynomium skærer 1. aksen siges polynomiet at have en rod. Et polynomium kan have lige så mange rødder som graden af polynomiet.

■ **Eksempel 51** Fjerdegradspolynomiet

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 27x^2 + 34x + 56$$

Har fire rødder i -4, -1, 2 og 7.



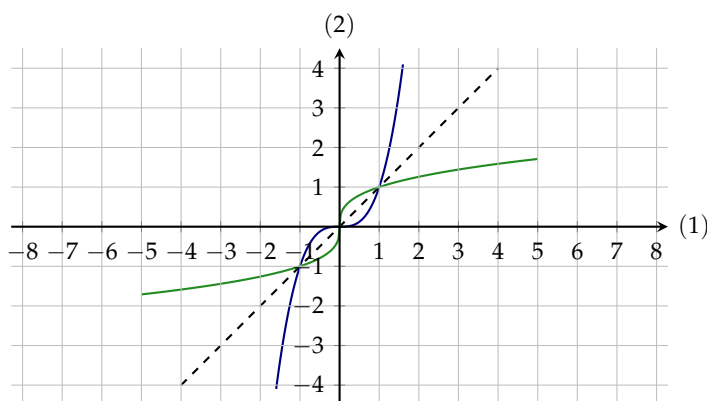
■

Rødderne i et polynomium p bestemmes ved at løse ligningen $p(x) = 0$.

Den inverse funktion til $f(x) = x^3$ er

$$x = y^3 \Leftrightarrow y = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Den inverse funktion er en stykkevis funktion. Disse funktioner kan ses på følgende graf.



--- Spejlingsakse

— $f(x) = x^3$

— $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \end{cases}$

Det er også muligt at lave regression til en polynomium, det er dog vigtigt at være opmærksom på, at man skal tænke sig godt om. For det første skal der være mindst ét datapunkt mere end graden på polynomiet. Det betyder at der skal være mindst tre datapunkter for at lave regression til en andengradspolynomium. For det andet kan størrelsen på koefficienterne blive så små at de er uden betydning. For det tredje bliver regressionen altid bedre jo større grad polynomiet har, men det betyder ikke at det er en bedre model. Det er vigtigt at have en faglig begrundelse for valget af model.

■ **Eksempel 52** Nogle datapunkter er mål

x	-4	-2	0	2
y	158	146	142	145

Det antages at de den bedste model er et andengradspolynomium.

Modellen bestemmen i Maple med kommandoen PolyReg. Efter

at data er indtastet skal graden af polynomiet skrives, her skrives 2.

Maple

```
PolyReg([-4, -2, 0, 2], [158, 146, 142, 145], 2)
```

$$0.9375x^2 - 0.275x + 141.85$$

GeoGebra

```
FitPoly({(-4,158),(-2,146),(0,142),(2,145)},2)
```

→ $0.94x^2 - 0.28x + 141.85$

For et andengradspolynomium bliver R^2 0.99966 mens det for et 3.gradspolynomium bliver R^2 1.00000. Det ses at R^2 bliver større, hvis graden af polynomiet er større. Men det er ikke i sig selv et argument for at vælge et polynomium af større grad som model. Der skal faglige argumenter til for at vurdere, hvad den bedste model er.

GeoGebra

Først defineres punkterne.

```
L={(-4,158),(-2,146),(0,142),(2,145)}
```

Derefter konstrueres regressions funktionen. 2-tallet angiver at der er tale om et andengradspolynomium.

```
f(x)=FitPoly(L,2)
```

→ $0.94x^2 - 0.28x + 141.85$

Derefter beregnes R^2 .

```
Rkvadreret(L,f)
```

→ 0.99966

Sæt antallet af decimaler til 5

■

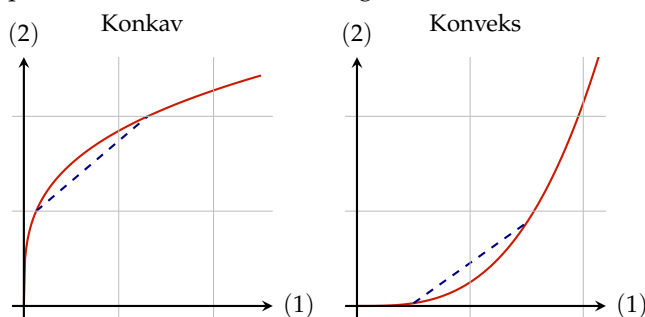
4.8 Potensfunktion

Definition 24 En potensfunktion er en funktion med regneforskriften

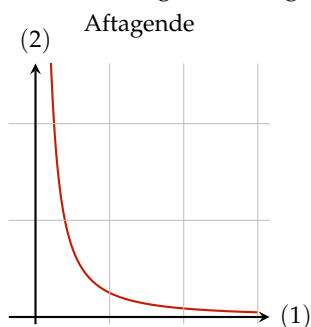
$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $b > 0$ og både a og b er reelle tal.

Grafen for en potensfunktion med regneforskrift $f(x) = bx^a$ kan have tre typer af forløb. Forløbet af grafen afhænger af a . Hvis $a > 1$ er grafen voksende og konveks. For a mellem 0 og 1 er grafen for potensfunktionen voksende og konkav.



For $a < 0$ er grafen aftagende.



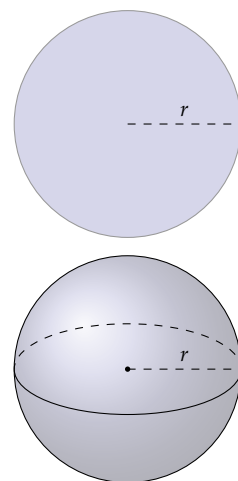
Sammenhængen mellem arealet A og radius r af en cirkel, er et eksempel på en potensfunktion

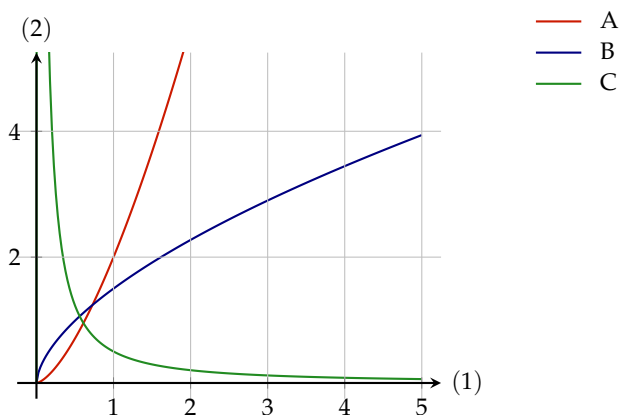
$$A = \pi \cdot r^2$$

Eller sammenhængen mellem volumen V og radius r af en kugle

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

■ **Eksempel 53** Figuren viser graferne for funktionerne



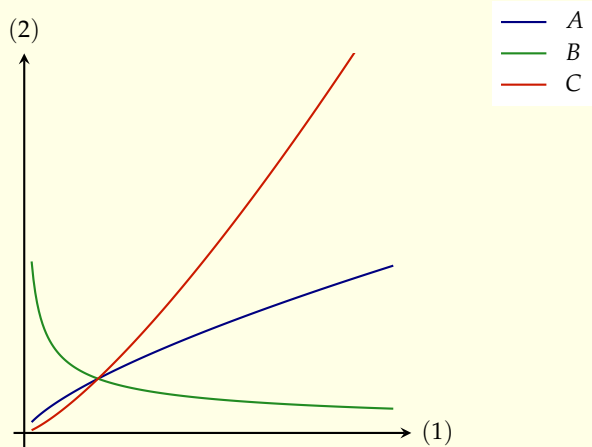


$$f(x) = 1.5 \cdot x^{0.6} \quad g(x) = 2 \cdot x^{1.5} \quad h(x) = 0.5 \cdot x^{-1.3}$$

A er grafen for g da grafen er konkav og voksende og eksponenten er større end 1 i funktionen f . B er grafen for f da grafen er konveks og voksende og eksponenten er mellem 0 og 1. C er grafen for h , da grafen er konveks og aftagende og eksponenten er mindre end 0. ■

Øvelse 95 Grafen for de tre funktioner f, g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

$$f(x) = 1.5 \cdot x^{1.3} \quad g(x) = 1.5 \cdot x^{-0.5} \quad h(x) = 1.5 \cdot x^{0.7}$$



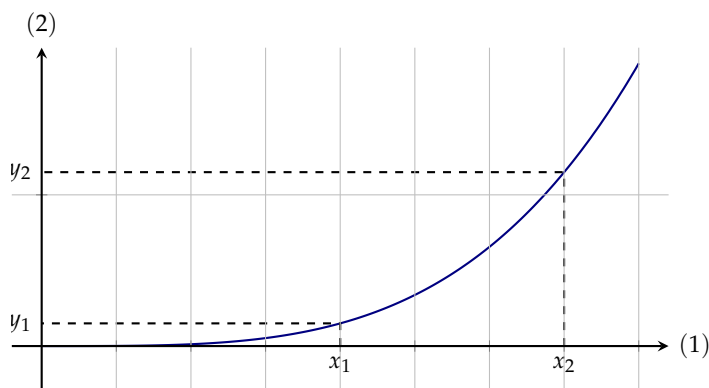
Potensfunktionen er en funktion der beskriver sammenhænge,

som fx hvis én billet koster 50 kr. og der sælges 400 og prisen på biografbilletter stiger med 6%, og antallet af solgte billetter falder med 20%. Så vil den nye pris være 53 kr og der vil blive solgt 320 billetter. Inden prisen blev sat op var den samlede indtjening 20 000 kr og efter prisstigningen er den samlede indtjening 16 960 kr.

Vides det, at der er tale om en potensfunktion og kendes to punkter kan regneforskriften findes.

Sætning 16 En potensfunktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot x^a$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$ så er

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} \quad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$



Det vides at $f(x_1) = y_1$ og at $f(x) = b \cdot x^a$, disse to udtryk medfører, at $y_1 = f(x_1) = b \cdot x_1^a$ altså, $y_1 = b \cdot x_1^a$. Tilsvarende vil det gælde for $y_2 = b \cdot x_2^a$. Disse to ligninger divideres.

$$\frac{b \cdot x_1^a}{b \cdot x_2^a} = \frac{y_1}{y_2}$$

brøken forkortes med b

$$\frac{x_1^a}{x_2^a} = \frac{y_1}{y_2}$$

potensregnereglen $\frac{y^s}{x^s} = \left(\frac{y}{x}\right)^s$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a = \frac{y_1}{y_2}$$

den naturlige logaritme

$$\ln\left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \quad \text{logaritmeregnereglen } \ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$a \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \quad a \text{ isoleres}$$

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \quad \text{logaritmeregnereglen } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$a = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{\ln(x_1) - \ln(x_2)}$$

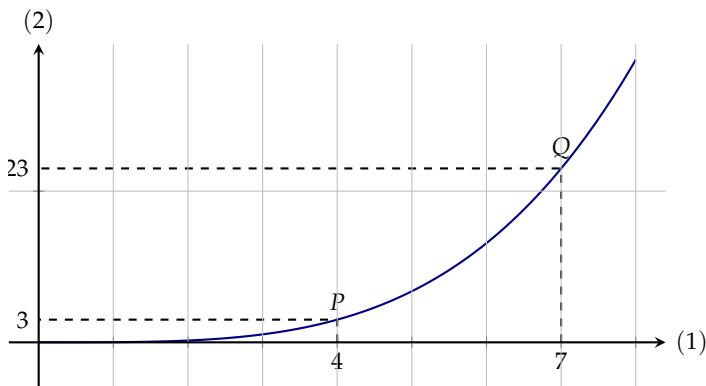
Nu kendes a , hvilket bruges til at finde b , fordi

$$b \cdot x_1^a = y_1$$

Og dette medfører, at

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

■ **Eksempel 54** Grafen for en potensfunktion går gennem punkterne $P(4, 3)$ og $Q(7, 23)$.



Forskriften for funktionen udregnes ved først at finde a ,

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(23) - \ln(3)}{\ln(7) - \ln(4)} = 3.64$$

og derefter b : $b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{3}{4^{3.64}} = 0.0193$. Forskriften bliver

$$f(x) = 0.0193 \cdot x^{3.64}$$



Video med eksempel på beregning af forskrift, afhængig og uafhængig variabel i en potensfunktion.

Øvelse 96 Bestem forskriften for en potensfunktion hvis graf går gennem punkterne $(2, 23)$ og $(6, 138)$.

Øvelse 97 I en biograf koster én billet 50 kr og de sælger i gennemsnit 150 billetter til en forestilling. De beslutter at sætte prisen op til 55 kr og derefter sælger de 120 billetter til en forestilling. Det antages at sammenhængen mellem prisen på billetten og antallet af solgte billetter kan beskrives med modellen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor x er prisen på billetterne og $f(x)$ er det gennemsnitlige antal solgte billetter.

- Bestem a og b i modellen.
- Bestem ændringen i den samlede indtægt for biografen.

Sætning 17 For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ og for et tal k gælder, at

$$f(x \cdot k) = f(x) \cdot k^a$$

■ **Bevis**

$$\begin{aligned} f(x \cdot k) &= b \cdot (x \cdot k)^a \\ &= b \cdot x^a \cdot k^a \\ &= f(x) \cdot k^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{potensregnereglen } (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n \\ f(x) &= b \cdot x^a \end{aligned}$$

■

Det betyder, at når x ændres med en procent p_x , ændres $y = f(x)$ også med en procent p_y . Fra procentregning vides, at et tal ændres en procent ved at gange det med $p + 1$, hvor p er den procent tallet ønskes ændret med.

■ **Eksempel 55** Ønskes tallet 54 øget med 20 %, beregnes

$$54 \cdot (0.20 + 1) = 64.8$$

■

Det betyder at sætning 17 betyder

Sætning 18 For potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ gælder at en procentændring i p_x i den uafhængige variabel x medfører en procentændring p_y i den afhængige variabel $y = f(x)$. Sammenhængen mellem p_x og p_y er

$$(1 + p_x)^a = p_y + 1$$



Video med eksempel på beregning af procentprocentvækst.

■ **Eksempel 56** Arealet af en cirkel bestemmes med formlen $A = \pi \cdot r^2$, hvor r er radius på cirklen. Når radius vokser med 30%

$$(1 + 0.30)^2 - 1 = 0.69$$

vokser arealet med 69%. ■

■ **Eksempel 57** Lad $f(x) = 0.3 \cdot x^{4.1}$. Antag at x øges med 3%. Hvor mange procent ændres $f(x) = y$ med?

Sættes $p_x = 0.03$ og $a = 4.1$ ind i formlen fås

$$p_y = (1 + 0.03)^{4.1} - 1 = 0.129$$

y ændres med 12.9%. ■

Øvelse 98 Sammenhængen mellem alderen og arealet af en musling kan beskrives med sammenhængen

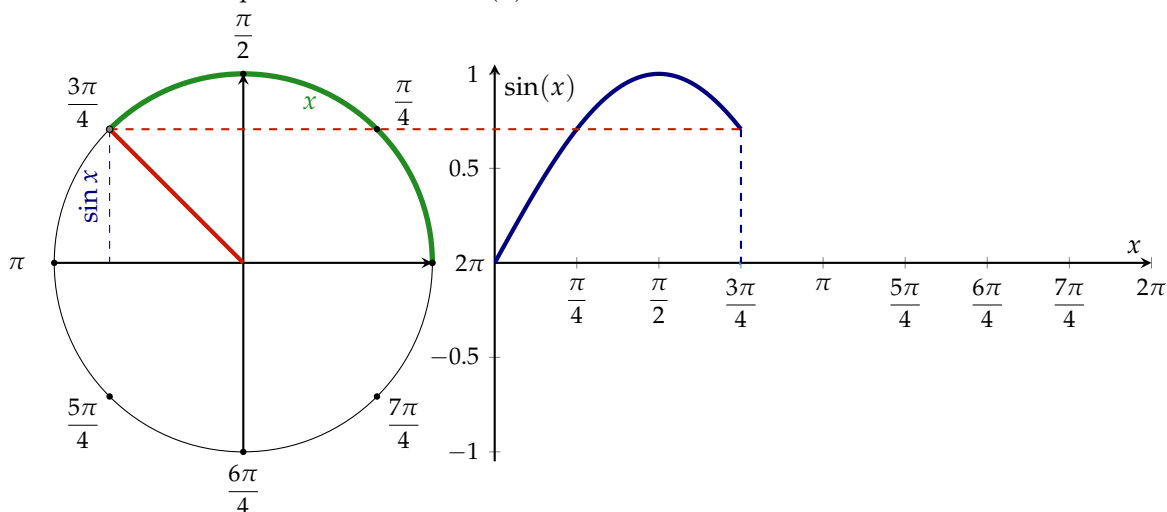
$$A = 0.3 \cdot t^{0.9}$$

hvor A er arealet af muslingen og t er alderen af muslingen.

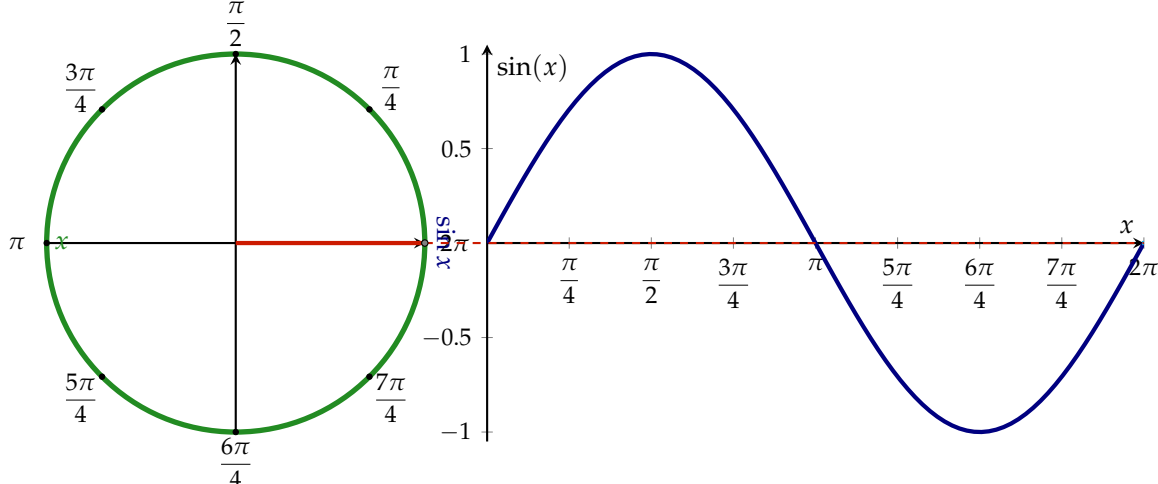
- Bestem muslingens areal, når alderen er 12.
- Bestem muslingens alder, når arealet er 0.9.
- Bestem hvor mange procent arealet øges med, når muslingens alder øges med 25%.

4.9 De trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner bruges til at modellere periodiske begivenheder fx svingninger eller lydbølger. For at forstå $\sin(x)$ som en funktion ses på definitionen af $\sin(x)$ ud fra enhedscirklen.



Ved at forsætte hele vejen rundt i cirklen tegnes en hel periode for sinusfunktionen.

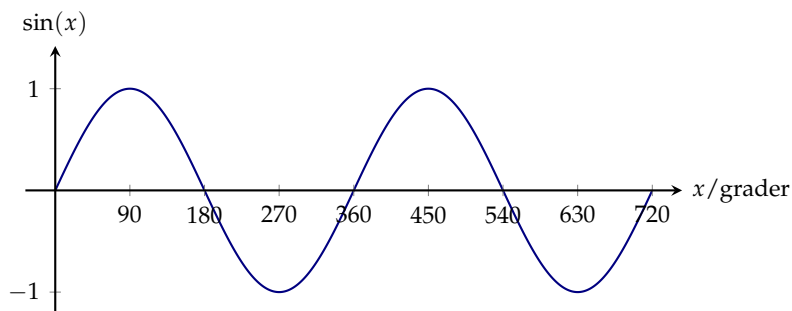


Buelængden x kaldes for radian. En radian er en anden måde at angive en vinkel på. Hver radian svare til et gradtal. Fx π radian

svare til 180° . Formlen til omregning mellem grader og radian er

$$\text{radian} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{grad}$$

Sinusfunktionen $\sin(x)$ har grafen hvor vinklen er angivet i grader.



Denne funktion kan parametriseres med parametrene A , B , C og D

$$f(x) = A \cdot \sin(B \cdot x + C) + D$$

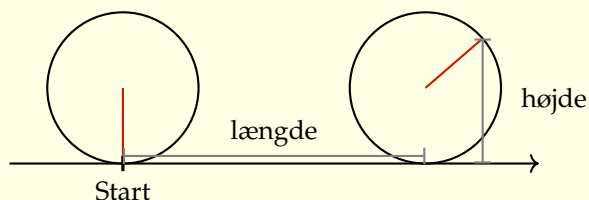


Sinusfunktionen og den harmoniske svingning

Øvelse 99 Undersøg denne funktion og bestem sammenhængen mellem grafen og parameterne A , B , C og D .

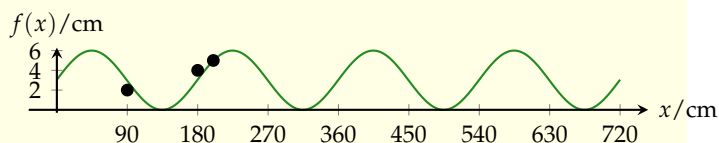
- Lav i dit IT-værktøj en sinuskurve med fire parametre A , B , C og D som du kan manipulere i et passende interval.
- Beskriv i ord hvordan A , B , C og D påvirker grafen og tegn eksempler.

- c) Tag flere cirkelrunde genstande fx tallerkner eller et stykke karton og mål radius. Sæt en prik eller marker på anden måde et punkt på kanten af tallerkenen. Tril nu tallerkenen om mål sammenhørende værdier for længden tallerkenen har trillet og højden af punktet over bordet.



Længde i cm	0			...
Højden i cm	0			...

- d) Indsæt punkterne i et koordinatsystem og bestem værdier for A, B, C og D , der gør at grafen på bedste vis kommer tæt på punkterne, ved at manipulere med værdierne for A, B, C og D i jeres IT-værktøj.



- e) Argumenter for sammenhængen mellem A, B, C og D og radius. Vis hvordan resultatet af jeres argumentation passer med jeres data.
- f) Hvis en af konstanterne ikke afhænger af radius, hvad afhænger den så af?

■ **Eksempel 58** Løs ligningen

$$3 \cdot \sin(2x) = 2, \quad 0 \leq x \leq 5$$

I Maple bruges kommandoen `intervalsolve` fordi der er angivet

et interval for

Maple

```
intervalsolve(3*sin(2*x) = 2.0, x = 0 .. 5)
```

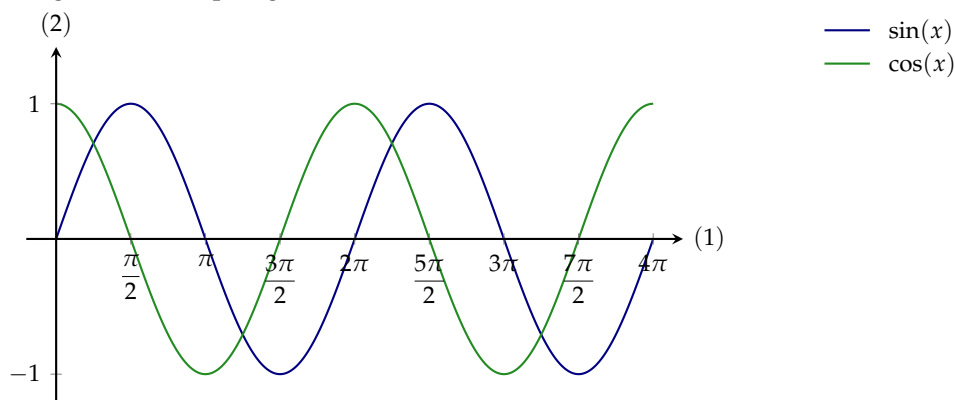
```
[.3648638281, 1.205932499, 3.506456482, 4.347525152]
```

Ligningen har fire løsninger i intervallet 0 til 5. ■

Øvelse 100 Løs ligningen

$$3 \cdot \sin(\pi x) = 3, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Funktionen cosinus kan på tilsvarende vis beskrives. Graferne for sinus og cosinus ses på figuren.

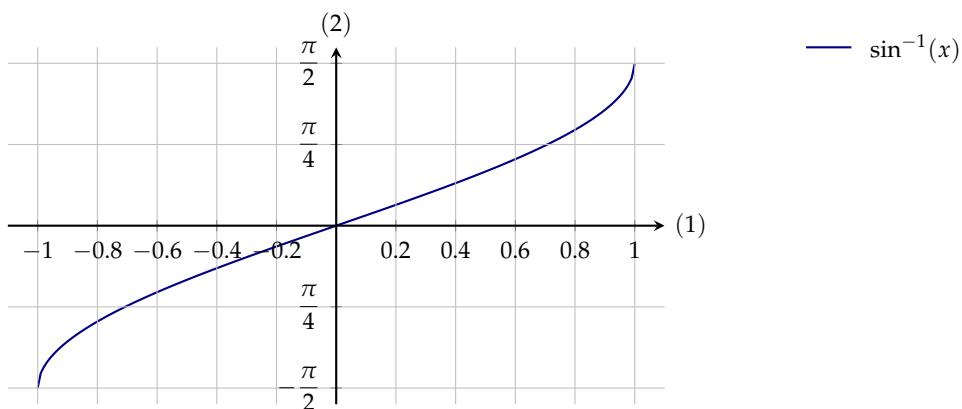


Som det ses kan funktionen $\cos(x)$ kan også beskrives som en forskydning af funktionen $\sin(x)$ hvor x er forskudt $\frac{\pi}{2}$. Derfor er

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Den inverse funktion til $\sin(x)$ har definitionsmængden $[-1; 1]$, fordi det var værdimængden for $\sin(x)$ og værdimængden $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

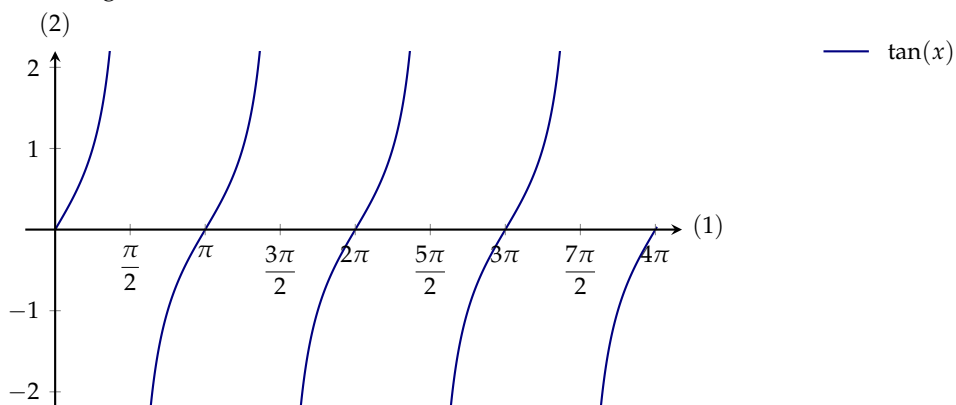
Grafen for den inverse sinusfunktion bestemmes igen med enhedscirklen. Men denne gang afsættes x -værdien fra enhedscirklen på grafens 2. akse og 2. koordinaten til punktet på cirkelperiferien afsættes på grafens 1. akse. Det giver følgende graf.



Funktionen tangens kan beskrives som

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Den har grafen



Bemærk at funktionen ikke er defineret for $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, hvor n er et helt tal.

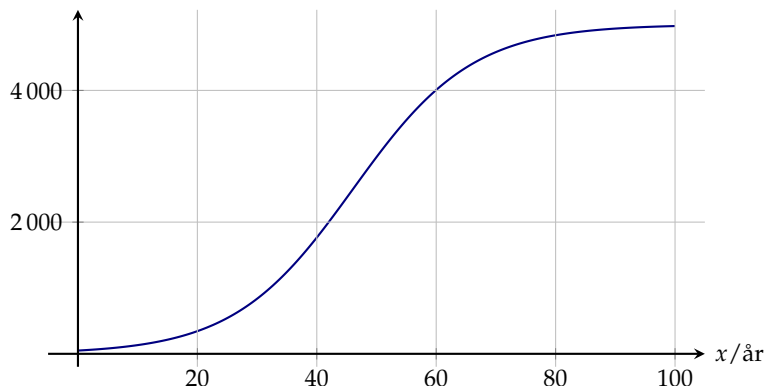
4.10 Funktionskompositioner

Funktioner kan kombineres på flere forskellige måder som det i dette afsnit skal ses på. Formålet med at kombinere funktioner er, at få nogle nye funktioner, der kan beskrive sammenhænge der ikke er mulige med de funktioner der hidtil er beskrevet. Det gælder fx funktionen

$$f(x) = \frac{5000}{1 + 100 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$$

Der beskriver antallet af individer i en population af truede dyr, efter at dyrene er beskyttet af en international aftale om ikke at fange dyret.

Antal individer



$$f(x) = \frac{5000}{1 + 100 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$$

4.10.1 Regning med funktioner

Det er muligt at lave nye funktioner ved at lægge funktioner sammen, eller gange dem med hinanden, eller trække dem fra eller dividere dem med hinanden.

■ **Eksempel 59** To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x^2$$

Ved at bruge de fire regnearter kan der laves nye funktioner.

$$\begin{aligned}
 f(x) + g(x) &= 2x + 3 + x^2 \\
 f(x) - g(x) &= 2x + 3 - x^2 \\
 f(x) \cdot g(x) &= (2x + 3) \cdot x^2 \\
 \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{2x + 3}{x^2}
 \end{aligned}$$

Ved division mellem funktioner skal der være opmærksom på muligheden af at dividere med nul. I dette tilfælde skal definitionsmængden indskrives til $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, altså alle tal undtagen nul.

■

Øvelse 101 To funktioner f og g er givet ved

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x - 12 \\
 g(x) &= x^2 - 9
 \end{aligned}$$

- Bestem forskriften for de to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Tegn grafen for to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Bestem definitionsmængderne for de to funktioner $\frac{f}{g}(x)$ og $\frac{g}{f}(x)$.
- Bestem forskriften for grafen for $\frac{g}{f}(x)$.
- Løs ligningen $f(x) + g(x) = 0$.

Det kan give nogle nye typer af funktioner at kombinere funktioner, men det er ikke sikkert at det sker. Det kan godt give funktioner, der allerede er kendt eller kan opnås ved at forskyde kendte funktioner.

4.10.2 Stykkevise og sammensatte funktioner

De kendte funktioner som lineære, eksponentielle, potens, polynomier og trigonometriske kan sammensættes og stykkes sammen til nye funktioner.

■ **Eksempel 60 — Sammensatte funktioner.** To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot 0.9^x$$

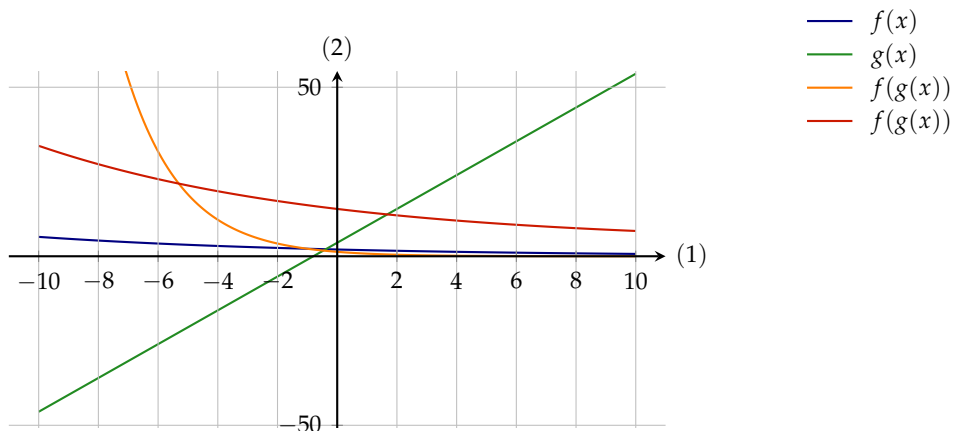
$$g(x) = 5 \cdot x + 4$$

Kan sammensættes til funktionerne $f(g(x))$ og $g(f(x))$. Det giver to nye funktioner.

$$f(g(x)) = 2 \cdot 0.9^{5x+4}$$

$$g(f(x)) = 5 \cdot (2 \cdot 0.9^x) + 4$$

Her ses grafen for alle fire funktioner



På graferne kan det ses at det godt kan give grafer der blot er forskydninger af de allerede kendte funktioner. ■

Øvelse 102 Givet to funktioner f og g .

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

Vis at $g(f(x))$ er et andengradspolynomium.

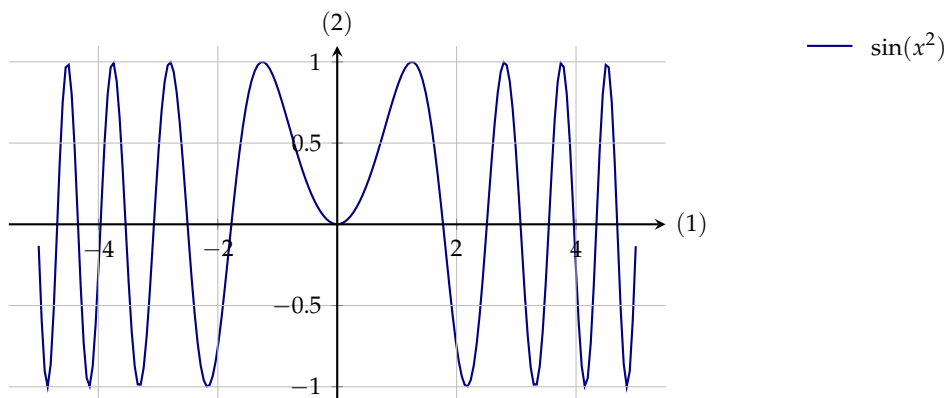
Øvelse 103 Givet to funktioner f og g .

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2$$

Løs ligningen $g(f(x)) = f(g(x))$

■ **Eksempel 61** Funktionen $\sin(x^2)$ er et eksempel på en sammensat funktion. Den er sammensat af de to funktioner $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x^2$. Den er så funktionen $f(g(x))$.



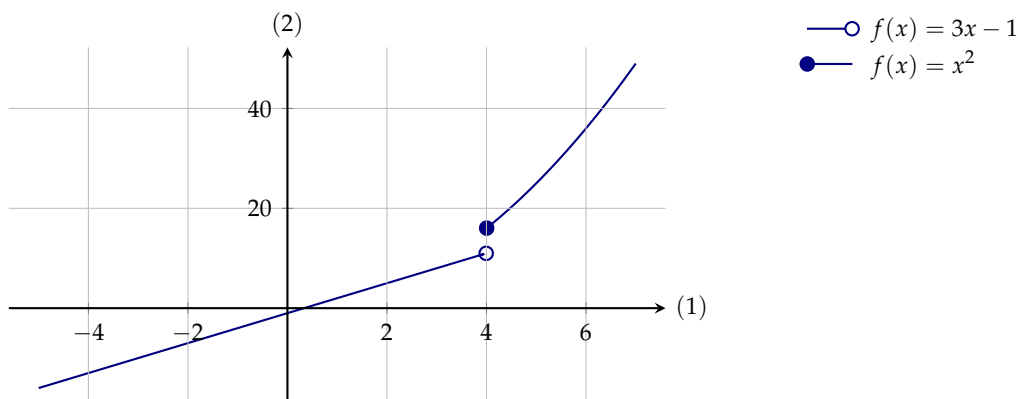
På grafen ses, at denne graf ikke kan fremkomme som forskydningen af en af de allerede kendte grafer. ■

Øvelse 104 Undersøg hvilken værdi parameterne a , b , c og d kan have for at

$$a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d = (\sin(x))^2$$

■ **Eksempel 62 — Stykkevisse funktioner.** En funktion der er bestemt af flere funktionsforskrifter med hvert deres interval kaldes en stykkevis funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 4 \\ x^2 & 4 \leq x \end{cases}$$



På grafen markeres endepunktet for intervallerne med en $\bullet$ hvis endepunktet er indeholdt i intervallet. ■

I Maple kan stykkevis funktioner defineres med kommandoen `piecewise`, bemærk at intervallet kommer først og forskriften bagefter.

Maple

```
f(x) := piecewise(x < 4, 3*x-1, 4 <= x, x^2)
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} 3x - 1 & x < 4 \\ x^2 & 4 \leq x \end{cases}$$



Stykkevis lineær

For at tegne grafen for en stykkevis funktion, skal kommandoen `plot` indeholde `discont` for, at gøre Maple opmærksom på, at funktionen ikke er sammenhængende.

Maple

```
plot(f(x), x=-5..5, discont)
```

Øvelse 105 En stykkevis funktion er givet

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & x < 2 \\ 3x - 2 & 2 \leq x \end{cases}$$

Bestem værdien af a så grafen for f er sammenhængende.

5

Differentialregning

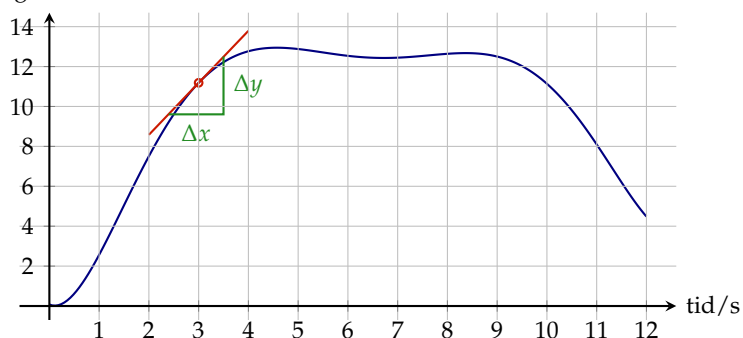
Ideen med differentialregning er at se på *uendeligt* små forskelle¹ i x -værdien. I det følgende ses på et eksempel hvor hastigheden og tiden er målt for 12 sekunders kørsel i en bil. Bilen kører mellem to lyssignaler. Hastigheden er omregnet fra km/t til m/s. 40 km/t er cirka 11 m/s. Differentialregning kan bruges til at besvare en række spørgsmål om kørslen.

¹ differenser og heraf navnet differentialregning.

- Hvad er bilens acceleration på et bestemt tidspunkt?
- Hvad ville hastigheden være hvis accelerationen, på et bestemt tidspunkt, fortsatte?
- Hvornår har bilen lokal maksimal og minimal hastighed?
- Hvad er den maksimale og minimale hastighed?
- I hvilket tidsrum er bilens acceleration positiv og i hvilket tidsrum er bilens acceleration negativ?
- Hvor langt er bilen kørt?

Bilens acceleration der i differentialregning generaliseres til væksthastigheden, der kan beregnes for et interval med formlen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bliver i differentialregning beregnet i et enkelt punkt og her anvendes formelen $\frac{dy}{dx}$.

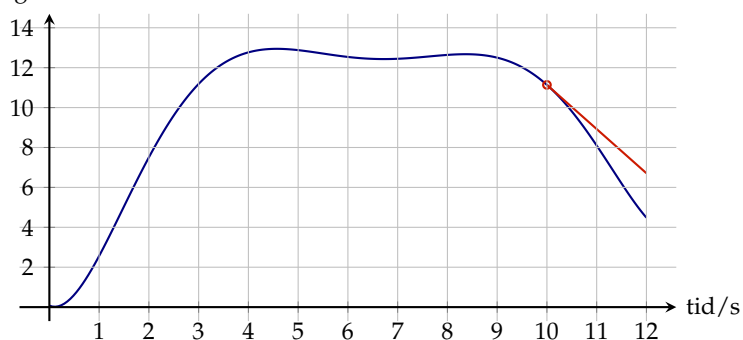
hastighed/ m/s



Væksthastigheden, der i dette tilfælde er accelerationen, ved 3 s er 2.6 m/s^2 . Dette beregnes ved at bestemme hældningen af den røde rette linje, der kaldes tangenten, og tangenten er tegnet i punktet hvor $x = 3$. Hældningen af tangenten kan bestemmes ved at aflæse to punkter på tangenten og ikke på grafen for hastigheden.

For at bestemme bilens hastighed, hvis accelerationen er konstant, skal ligningen for tangenten bestemmes. Ligningen for tangenten er ligningen for en ret linje $y = ax + b$, hvor a er hældningen af tangenten og b kan beregnes ved at bruge punktet på grafen, som tangenten er tangent i. I dette tilfælde er punktet ved 10 s og her er hastigheden 11 m/s, dette kan også skrives (10, 11).

hastighed/ m/s



Ligningen for tangenten ved 10 s er $y = -2.21x + 33.2$. Havde bi-

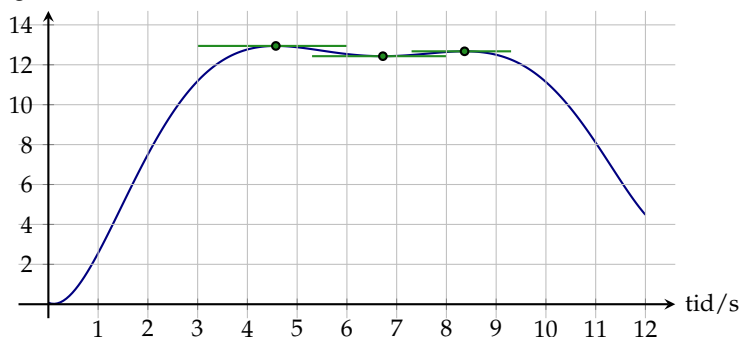
len fortsat med konstant acceleration ved 10 s, ville bilens hastighed ved 12 s have været

$$-2.21 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ s} + 33.2 \text{ m/s} = 6.68 \text{ m/s}$$

og ikke lidt under 5 m/s, som den faktisk var.

Bilens lokale maksimale og minimale hastighed, der i differentialregning generaliseres til lokale ekstrema, kan bestemmes som de tidspunkter hvor accelerationen er 0. Det er de tidspunkter, hvor hældningen af tangenten er 0, hvilket betyder at tangenten er parallel med 1. akse.

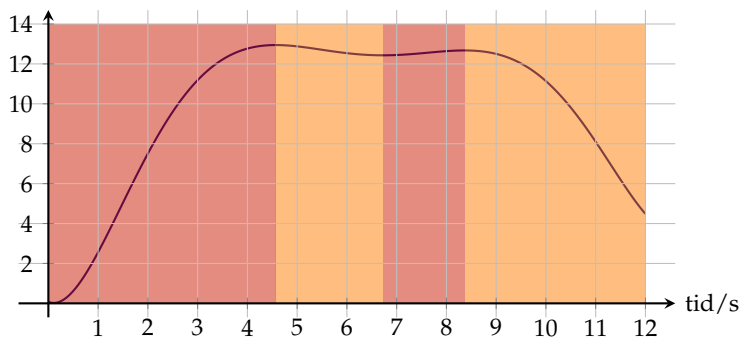
hastighed/ m/s



De lokale ekstrema er ved 4.57, 6.72 og 8.37 sekunder.

I nogle tidsintervaller har bilen en positiv acceleration og i nogle tidsintervaller har bilen en negativ acceleration, i differentialregning generaliseres dette til funktionens monotoniforhold. Det betyder en bestemmelse af, for hvilke x -værdier funktionen er voksende, og for hvilke x -værdier funktionen er aftagende.

hastighed/ m/s



Funktionen er voksende når x er i intervallerne $[0, 4.56]$ og

$[6.72, 8.37]$ og aftagende når x er i intervallerne $[4.56, 6.72]$ og $[8.37, 12]$.

Det hele handler om at bestemme hældningen af tangenten til grafen i et punkt.

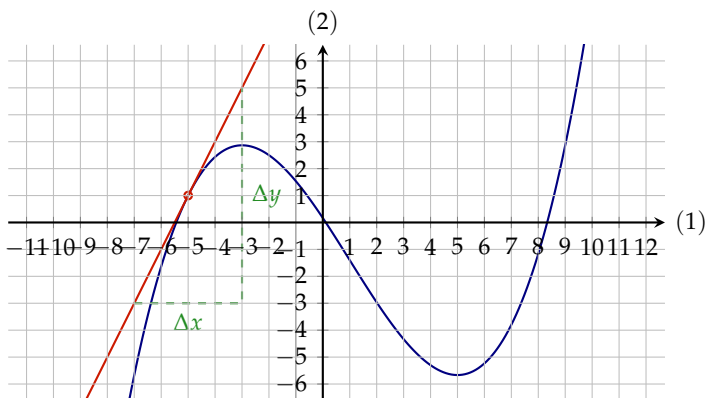
- Hældningen af tangenten er væksthastigheden i punktet,
- hældningen af tangenten kan sammen med punktet bruges til at bestemme ligningen for tangenten,
- hvis hældningen af tangenten er 0, har funktionen et lokalt ekstrema,
- hvis hældningen af tangenten er positiv er funktionen voksende, og hvis den er negativ er funktionen aftagende.

Det centrale er at bestemme hældningen af tangenten.

■ **Eksempel 63** Bestem hældningen af tangenten i punktet $(-5, 1)$ grafisk.



Video med eksempel på grafisk bestemmelse af hældning af tangent.

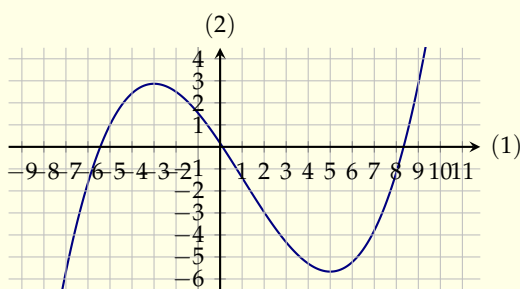


Ved først at tegne tangenten i punktet $(-5, 1)$ og derefter at aflæse de to punkter $(-7, -3)$ og $(-3, 5)$ er det muligt at bestemme hældningen af tangenten.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-3)}{-3 - (-7)} = \frac{8}{4} = 2$$

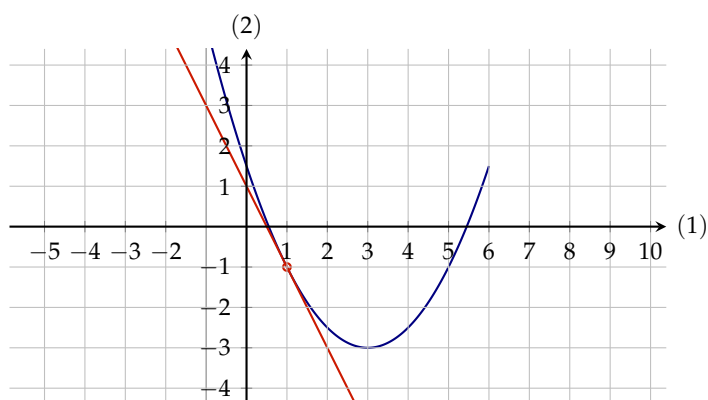
■

Øvelse 106 Bestem hældningen af tangenten i punktet $(7, -4)$.



Opgaver med grafisk bestemmelse af tangentens hældning.

■ **Eksempel 64** Bestem ligningen af tangenten i punktet $(1, -1)$.



Først tegnes tangenten i punktet $(1, -1)$. Herefter aflæses et punkt $(-1, 3)$. Hældningen a på tangenten bliver så

$$a = \frac{-1 - 3}{1 - (-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

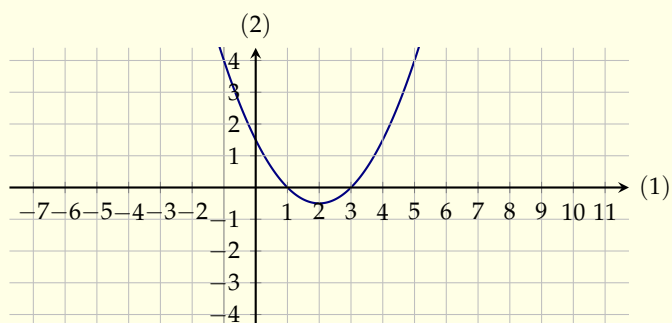
Ved at indsætte punktet $(1, -1)$ i tangentens ligning $y = ax + b$ sammen med hældningen fås, at

$$\begin{aligned} -1 &= -2 \cdot 1 + b \\ -1 &= -2 + b \\ -1 + 2 &= b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

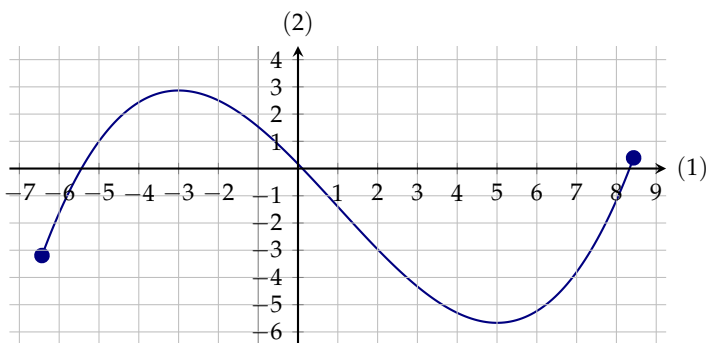
$$\begin{aligned} a &= -2, y = -1, x = 1 \\ \text{reducering} \\ 2 &\text{ lægges til ligningen} \end{aligned}$$

Tangentens ligningen er $y = -2x + 1$. ■

Øvelse 107 Bestem ligningen for tangenten i punktet $(3,0)$.

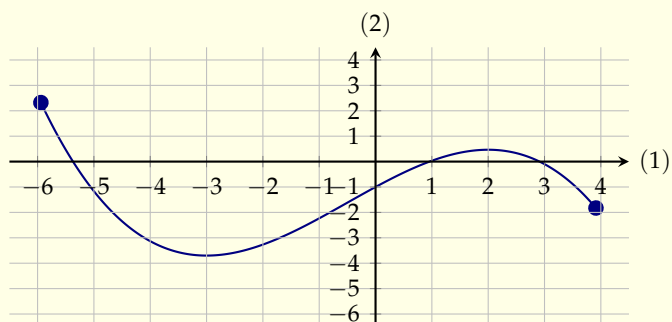


■ **Eksempel 65** Bestem lokale ekstrema for funktionen

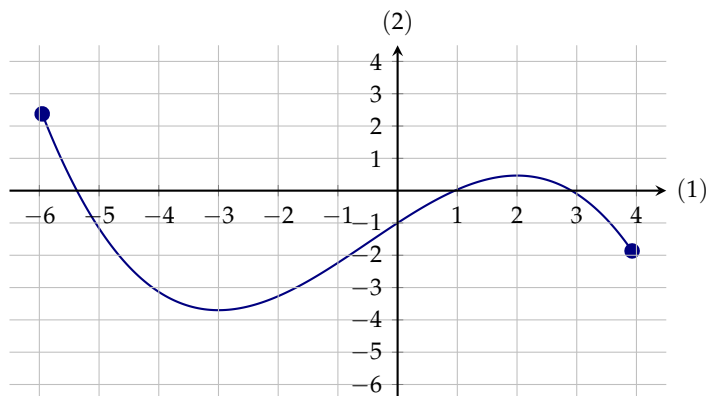


På grafen ses at ved $x = -3$ har funktionen et lokalt maksimum og ved $x = 5$ har funktionen et lokalt minimum. ■

Øvelse 108 Bestem lokale ekstrema for funktionen hvis graf ses på figuren.



■ **Eksempel 66** Bestem monotoniforhold for funktionen.



Fra -6 til -3 er funktionen aftagende og fra -3 til 2 er funktionen voksende og fra 2 til 4 er funktionen aftagende. ■

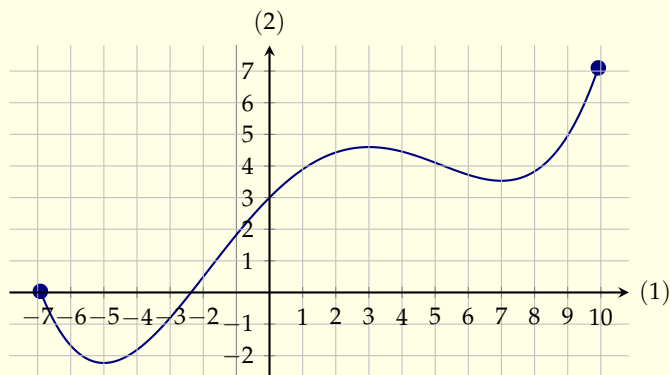


Video med eksempel på grafisk bestemmelse af monotoniforhold.



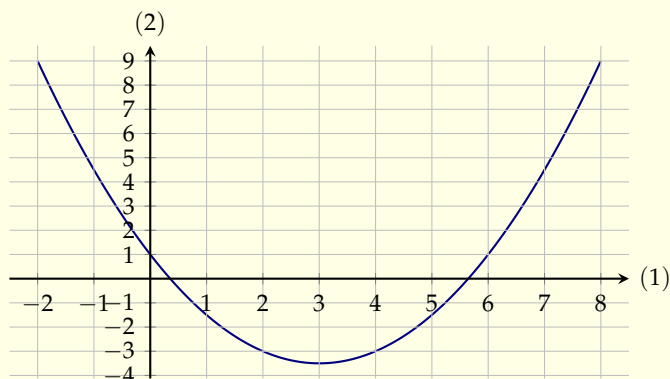
Opgaver hvor monotoniforhold skal bestemmes grafisk.

Øvelse 109 Bestem monotoniforhold for funktionen.



Øvelse 110 Grafen for funktionen f ses på figuren.

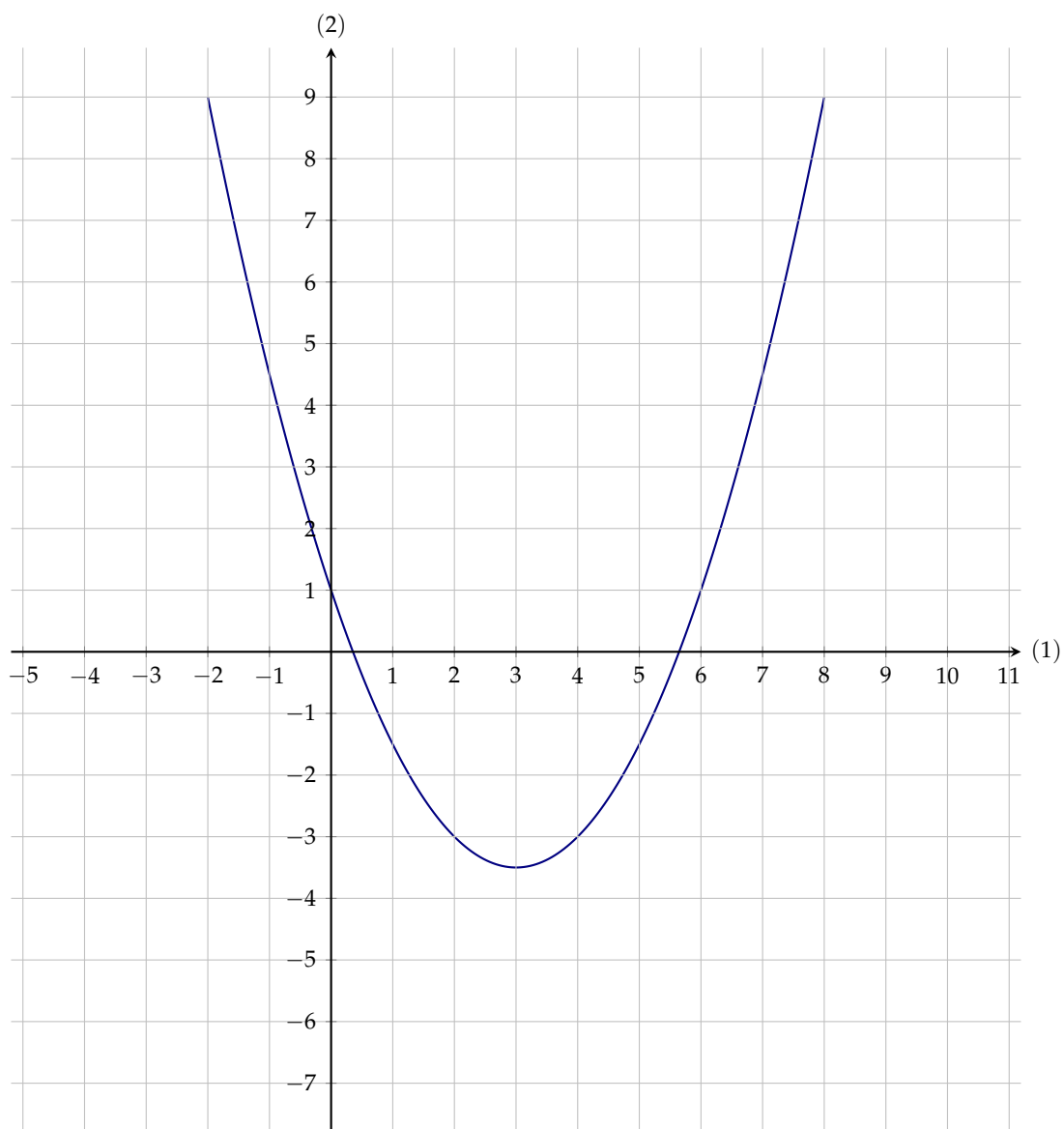
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$



- a) Bestem hældningen for tangenten i punkterne $-1, 0, 1, 2, 4, 6$ og 8 . Brug evt. bilaget.

x	-1	0	1	2	4	6	8
tangent hældning							

- b) Indsæt hældningen for tangenten som y -værdien sammen med den tilsvarende x -værdi som punkter i sammen koordinatsystem som grafen for f .
- c) Bestem en forskrift for den rette linje der går gennem punkterne.
- d) Brug forskriften for den rette linje til at bestemme hældningen af tangenten i punkterne $3, 5$ og 7 .



x	-1	0	1	2	4	6	8
tangent hældning							

5.1 Grænseværdi

En grænseværdi er en værdi, som en funktion nærmer sig når funktionsværdien nærmer sig en given værdi.

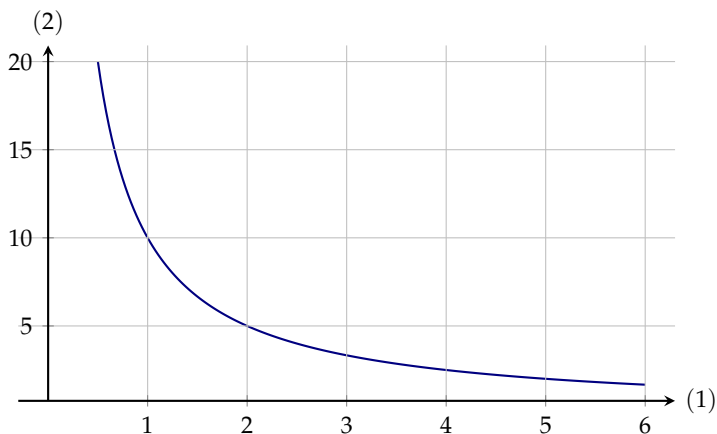
En funktion f har grænseværdien a i punktet x_0 , hvis man kan opnå funktionsværdier vilkårligt tæt ved a ved at vælge x -værdier tilstrækkeligt tæt ved x_0 . Hvis denne grænseværdi eksisterer, skriver vi, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

■ **Eksempel 67** Se på funktionen $f(x) = 10/x$.

Se på grænseværdien for denne funktion for x gående mod 2. Først den simple afprøvning.

x	1.8	1.9	2	2.1	2.2
$f(x)$	≈ 5.56	≈ 5.26	?	≈ 4.76	≈ 4.55

Ved at se på grafen giver det en god idé om at grænseværdien er 5.



$$f(x) = \frac{10}{x}$$

Med denne funktion er et også muligt at udregne funktionsværdien $f(2)$, og denne værdi er 5.

Konklusionen er derfor at funktionsværdien nærmer sig værdien 5 når x nærmer sig 2. Dette kan skrives

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

Nogle gange skrives det også $f(x) \rightarrow 5$ for $x \rightarrow 2$

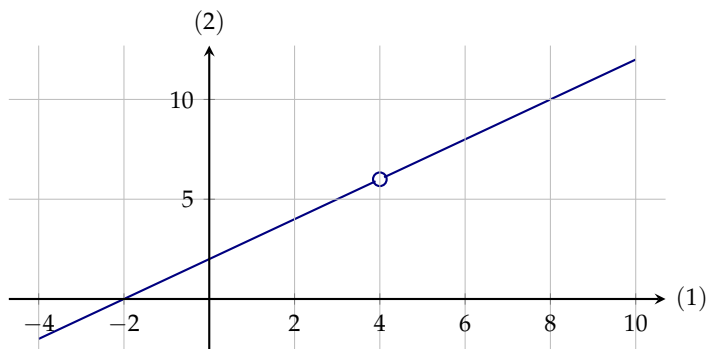
■

■ **Eksempel 68** Se på funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$. Grænseværdien i $x = 4$ kan ikke udregnes fordi nævnerne her har værdien 0.

Først den simple afprøvning.

x	3.90	3.99	4	4.01	4.10
$f(x)$	≈ 5.9	≈ 5.99	?	≈ 6.01	≈ 6.10

Derefter ses på grafen.



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$

Selvom det ikke er muligt at udregne funktionsværdien $f(4)$, er konklusionen at grænseværdien er 6.

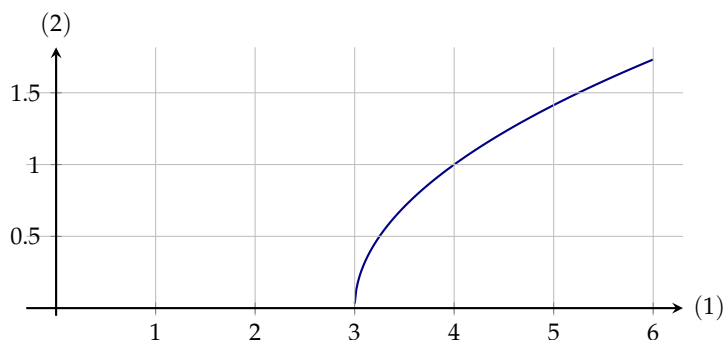
$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 6$$

Funktionens definitions mængde er alle reelle tal undtagen 4, dette skrives $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ■

■ **Eksempel 69** Se på funktionen $f(x) = \sqrt{x - 3}$. Da kvadratroden af et negativt tal ikke er defineret, er denne funktion kun defineret for reelle tal som gør at uligheden $x - 3 \geq 0$ er opfyldt, dvs. x skal være lig med eller større end 3, dette skrives $x \in [3, \infty[$. For at bestemme grænseværdien for x gående mod 3, laves først en simple afprøvning.

x	2,9	2,99	3	3,01	3,10
$f(x)$	—	—	?	≈ 0.1	≈ 0.32

Derefter ses på grafen.



Fordi det ikke er muligt at beregne hvad funktionsværdien er når x er mindre end 3 betyder det, at funktionen ikke har en grænseværdi for x gående mod 3, så $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3}$ eksistere ikke. ■

Øvelse 111 Udregn grænseværdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer i følgende tilfælde.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x + 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^4-16}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

Man kan »regne« med grænseværdier, det betyder at hvis funktionerne f og g har grænseværdierne a og b i punktet x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

så er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a + b$$

Det samme gælder for subtraktion, multiplikation og division sålænge at der ikke divideres med 0. Det gælder også at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot a$$

hvor k er en konstant.

5.2 Kontinuitet

Definition 25 — Kontinuitet. En funktion f kaldes kontinuert i punktet x_0 , hvis dens grænseværdi i punktet x_0 er lig med dens funktionsværdi i x_0 , dvs.

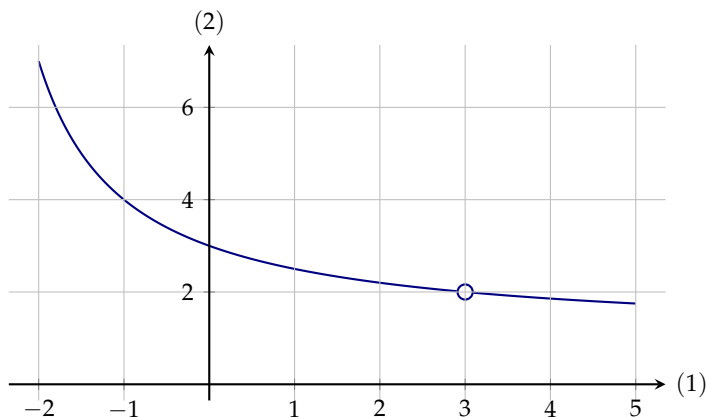
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

En funktion, der er kontinuert i alle punkter af sin *definitions-mængde* kaldes kontinuert. Hvis grænseværdien ikke eksisterer eller hvis grænseværdien er forskellig fra $f(x_0)$, så siger man at $f(x)$ er diskontinuert i x_0 .

Bemærk at det kun er hvis punkterne, som giver anledning til at grafen ikke er sammenhængende, ligger i definitionsmængden, at funktionen ikke er kontinuert.

Som eksempel på en kontinuert funktion, som har 'hul' i grafen kan man se på funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9}$

Som man kan se på grafen, er der et 'hul' i grafen, men da 'hullet' er i 3 som *ikke* ligger i funktionens definitionsmængde er funktionen kontinuert.



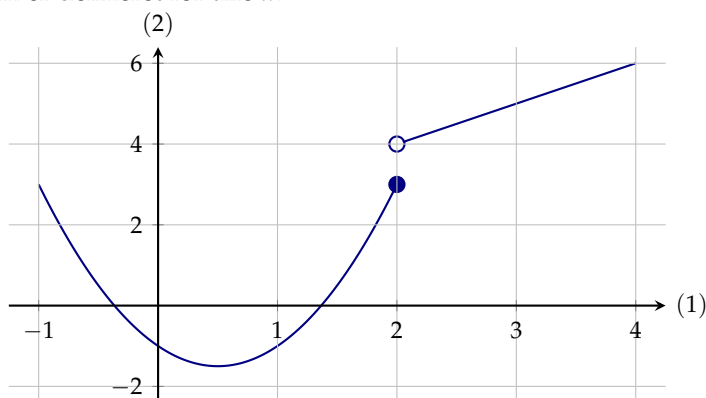
$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9}$$

Nu kommer et eksempel på en ikke kontinuert funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$

Grafen for funktionen er ikke sammenhængende, men funktio-

nen er defineret for alle x .



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$

Funktionen er defineret for alle værdier af x , men funktionen er diskontinuert i punktet $x = 2$. I tabellen herunder ses at funktionsværdien i $x = 2$ er 3. Grænseværdien fra venstre er ganske vist også 3, men grænseværdien fra højre er 4. Derfor er grænseværdien ikke defineret og funktionsværdien er derfor ikke lig med grænseværdien og funktioner er derfor ikke kontinuert.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	2.9402	2.994002	3	4.001	4.01

Hvis to funktioner er kontinuerte vil deres sum, differens, produkt, kvotient eller sammensætning også være kontinuert, med passende indskrænkning i deres definitionsmængder.

Øvelse 112 Afgør om funktionerne er kontinuerte i $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 9x - 11 & 2 < x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 10x - 11 & 2 < x \end{cases}$

5.3 Differentialkvotienten

Definition 26 — Differentiabel. Funktionen f siges at være differentiabel i punktet x_0 , hvis differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

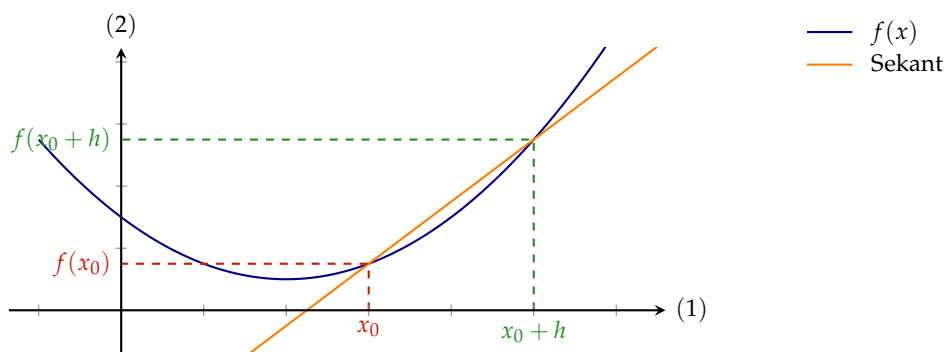
har en grænseværdi for $h \rightarrow 0$.



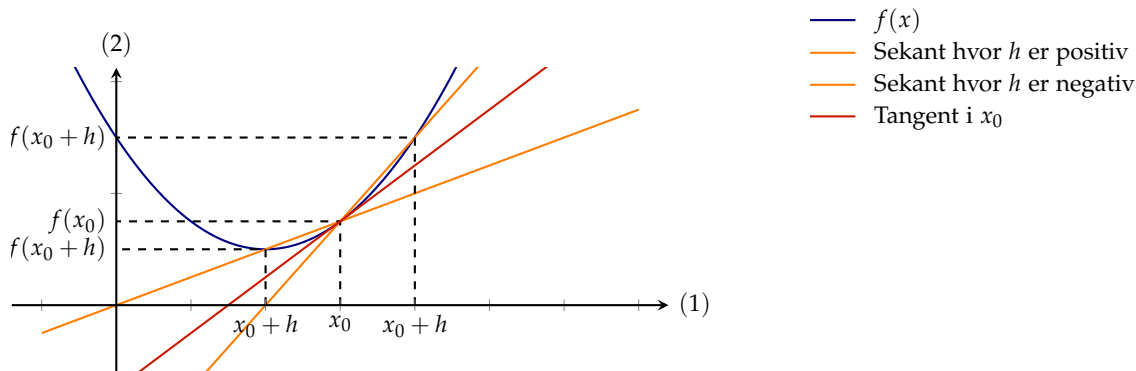
Video med introduktion til differentialregning.

På grafen for f aflæses to punter - et ved x_0 og et ved $x_0 + h$, disse to punkter bruges til at bestemme hældningen af den rette linje der går gennem disse to punkter. Den rette linje kaldes sekanten.

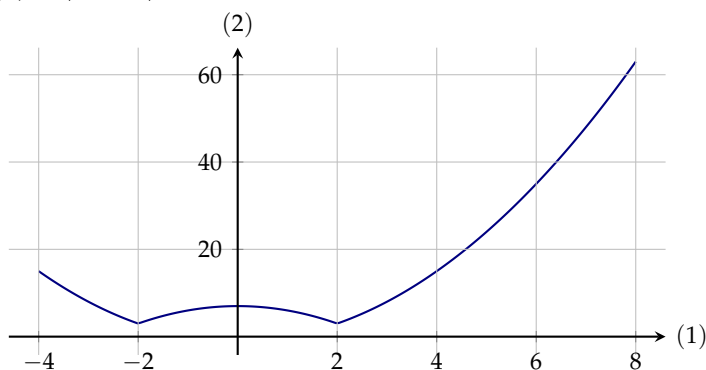
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Og når h går imod 0 vil sekanten gå imod tangenten til $f(x)$ i punktet $(x_0, f(x_0))$, uanset om h går imod 0 fra den positive side eller negative side.



På denne måde kan man finde tangenter til alle punkter på alle funktioner, hvor det kan lade sig gøre. For nogle funktioner er der punkter, hvor der ikke findes en tangent, fx findes der ikke tangenter til punkterne $(2, 3)$ og $(-2, 3)$ på grafen for funktionen $f(x) = |x^2 - 4| + 3$.



$$f(x) = |x^2 - 4| + 3$$

Der findes ingen tangent i et punkt på grafen, hvor funktionen ikke er kontinuert eller ikke er defineret.

Definition 27 Grænseværdien kaldes differentialkvotienten i x_0 og skrives $f'(x_0)$, dvs.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ angiver tangentens hældningskoefficient i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Hvis f er differentiabel i ethvert punkt af sin definitions-mængde, kaldes f differentiabel. Hvis funktionen f er differentiabel kaldes $f'(x)$ for den afledte funktion.

Når en funktion skal differentieres anvendes en metode med tre trin (tre-trins-metoden).

■ **Eksempel 70** Funktionen $f(x) = 6x^3$ skal differentieres. Først udregnes $f(x_0 + h) - f(x_0)$ hvor $f(x_0 + h) = 6(x_0 + h)^3$ og $f(x_0) = 6x_0^3$.

$$\begin{aligned} 6(x_0 + h)^3 - 6x_0^3 &= 6(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - 6x_0^3 \\ &= 6x_0^3 + 18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3 - 6x_0^3 \\ &= 18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3 \end{aligned}$$



Video der forklarer tre-trins-metoden.

Derefter divideres med h .

$$\frac{18x_0^2h + 18x_0h^2 + 6h^3}{h} = 18x_0^2 + 18x_0h + 6h^2$$

Til sidst udregnes grænseværdien for h gående mod 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} 18x_0^2 + 18x_0h + 6h^2 = 18x_0^2$$

Konklusionen er at $f'(x) = 18x^2$. ■

■ **Eksempel 71** Funktionen $f(x) = 2x^2 + 3$ skal differentieres. Først udregnes $f(x_0 + h) - f(x_0)$ hvor $f(x_0 + h) = 2(x_0 + h)^2 + 3$ og $f(x_0) = 2x_0^2 + 3$.

$$\begin{aligned} 2(x_0 + h)^2 + 3 - (2x_0^2 + 3) &= 2(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 3 - 2x_0^2 - 3 \\ &= 2x_0^2 + 4x_0h + 2h^2 + 3 - 2x_0^2 - 3 \\ &= 4x_0h + 2h^2 \end{aligned}$$

Derefter divideres med h .

$$\frac{4x_0h + 2h^2}{h} = 4x_0 + 2h$$

Til sidst udregnes grænseværdien for h gående mod 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4x_0 + 2h = 4x_0$$

Konklusionen er at $f'(x) = 4x$. ■

■ **Eksempel 72** Funktionen $f(x) = x^2 + x$ skal differentieres. Først udregnes $f(x_0 + h) - f(x_0)$ hvor $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 + (x_0 + h)$ og $f(x_0) = x_0^2 + x_0$.

$$\begin{aligned} (x_0 + h)^2 + (x_0 + h) - (x_0^2 + x_0) &= (x_0^2 + 2x_0h + h^2) + (x_0 + h) - x_0^2 - x_0 \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 + x_0 + h - x_0^2 - x_0 \\ &= 2x_0h + h^2 + x_0 + h - x_0 \\ &= 2x_0h + h^2 + h \end{aligned}$$

Derefter divideres med h .

$$\frac{2x_0h + h^2 + h}{h} = 2x_0 + h + 1$$

Til sidst udregnes grænseværdien for h gående mod 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h + 1 = 2x_0 + 1$$

Konklusionen er at $f'(x) = 2x + 1$. ■

Øvelse 113 Differentier funktionerne med tre-trins-metoden.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 5x$

c) $f(x) = 3x - 2$

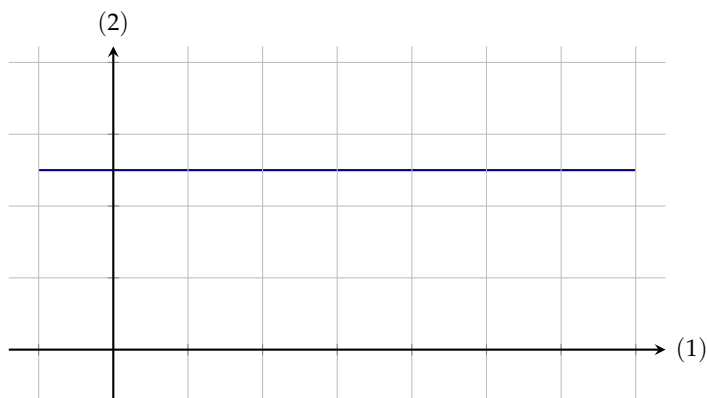
d) $f(x) = -4x^2 - x$

Sætning 19 Funktionen $f(x) = k$, hvor $k \in \mathbb{R}$ er differentiabel og $f'(x) = 0$

■ **Bevis** Definition 26 bruges på $f(x) = k$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

På grafen ses det at hældningen er 0 for alle x , hvilket stemmer med sætningen.



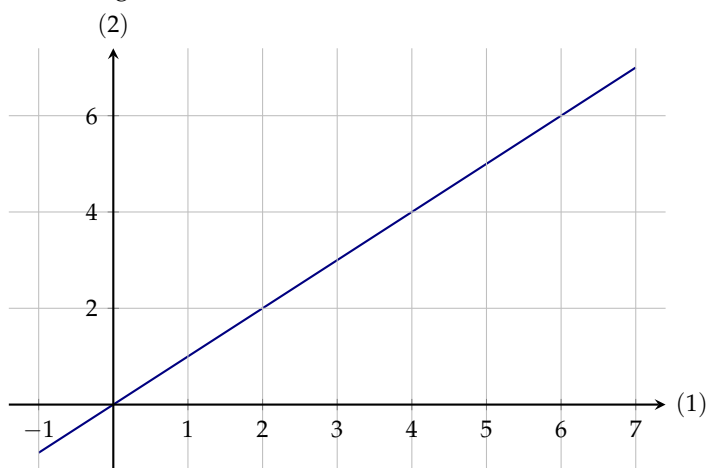
— $f(x) = k$

Sætning 20 Funktionen $f(x) = x$ er differentiabel og $f'(x) = 1$.

■ **Bevis** Definition 26 bruges på $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

På grafen ses det at hældningen er 1 for alle x , hvilket stemmer med sætningen.



— $f(x) = x$

Sætning 21 Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $x \neq 0$ er differentiabel og $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

■ **Bevis** Definition 26 anvendes på $f(x) = \frac{1}{x}$



Video med bevis for differentialkvotienten af $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$$

fælles nævner ved forlængelse

med x_0 og $x_0 + h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0}{x_0 \cdot (x_0+h)} - \frac{x_0+h}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

brøkerne samles

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - (x_0+h)}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

minus parentes ganges ud

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - x_0 - h}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h}$$

$$x_0 - x_0 = 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x_0^2 + x_0 \cdot h}}{h}$$

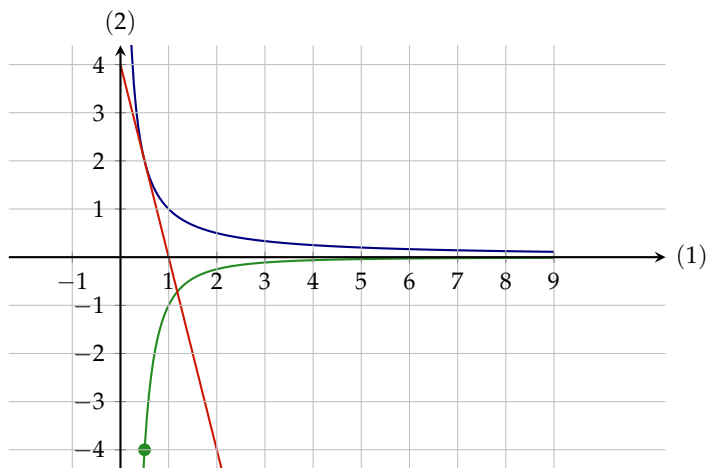
divideres med h

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot h}$$

grænseværdien udregnes

$$= -\frac{1}{x_0^2}$$

■



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= \frac{1}{x} \\ \text{— } f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ \text{— } \text{Tangent i } x &= 0.5 \end{aligned}$$

På grafen ses, at hældningen af tangenten til f i punktet $x = 0.5$ er -4 og det svarer til værdien af f' i $x = 0.5$.

Sætning 22 Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, hvor $x \geq 0$ er differentiabel og $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

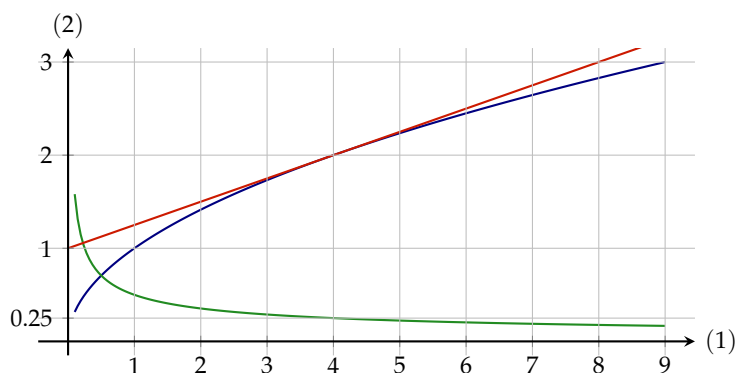


Video med bevis for differentialkvotienten af $\sqrt{x}$.

■ **Bevis** Definition 26 anvendes på $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Brøken forlænges med} \\ & && \sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Tælleren ganges ud.} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Da } x_0 - x_0 = 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} && \text{Brøken forkortes med } h. \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} && \text{Grænseværdien udregnes.} \end{aligned}$$

Da f er differentiabel i ethvert punkt af sin definitionsmængde er den afledede funktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ som ønsket. ■



— $f(x) = \sqrt{x}$
— $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
— Tangent i $x = 4$

På grafen ses, at hældningen af tangenten til f i punktet $x = 4$ er 0.25 og det svarer til værdien af f' i $x = 4$.

For at gøre det lettere at bestemme afledede funktioner, vises nogle regneregler for differentialkvotienter.

Sætning 23 Hvis funktionerne f og g er differentiable i x_0 , er deres sum - og differensfunktioner også differentiable i x_0 og differentialkvotienten er hhv. summen og differensen af differentialkvotienterne for f og g .

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$



Video med bevis for differentialkvotienten af $(f + g)(x)$

■ Bevis

$$(f + g)'(x_0)$$

definition 26 anvendes

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h}$$

definitionen af additionsfunktionen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h}$$

parentesen i tælleren ophæves

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

brøken opdeles i to

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right)$$

regneregler for grænseværdier

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Da f og g er differentiable funktioner, kan definition 26 anvendes

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

■

■ **Eksempel 73** Differentier funktionen $f(x) = x + \sqrt{x} + 4$. Ved at bruge det netop viste, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Sætning 23 betyder at funktionen kan differentieres ved at differentiere de tre led hver for sig. 4 er en konstant, og her giver sætning 19 at 4 differentieret giver 0. Sætning 20 giver at x diffe-

rentieret er 1 og sætning 22 giver at $\sqrt{x}$ er $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$. Samlet betyder det, at

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 0$$

Sætning 24 Hvis funktionerne f er differentiabel i x_0 og k er en konstant, er deres produkt også differentiabelt i x_0 og differentialkvotienten er produktet af konstanten og differentialkvotienten for f .

$$(k \cdot f(x_0))' = k \cdot f'(x_0)$$



Video med bevis for differentialkvotienten af $k \cdot f(x)$.

■ Bevis

$$\begin{aligned} & (k \cdot f(x_0))' \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x_0 + h) - k \cdot f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot (f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= k \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

definition 26 anvendes

k sættes udenfor parentes

brøkregnereglen $\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$

regneregler for grænseværdi

da f er differentiabel

■ **Eksempel 74** Differentier funktionen $f(x) = 3x + 2 \cdot \frac{1}{x}$. Ved at bruge det netop viste, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Sætning 23 betyder at funktionen kan differentieres ved at differentiere de to led hver for sig. Sætning 24 og sætning 20 giver at $3x$ differentieret bliver $3 \cdot 1$. Sætning 24 og sætning 21 giver at $2 \cdot \frac{1}{x}$ bliver $2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Samlet bliver det

$$f'(x) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Øvelse 114 Differentier funktionerne.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x$

b) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 3x$

c) $f(x) = \frac{2}{x} - 6\sqrt{x}$

d) $f(x) = 2 + \frac{1}{x} - 5x$

Sætning 25 Funktionen

$$f(x) = x^n$$

er differentiabel og differentialkvotienten er

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$



Video med forklaring af differentialkvotienten af et polynomium.

■ **Eksempel 75** Differentier polynomiet $f(x) = 2x^4 + 4x^3$. Ved at bruge ovenstående sætning, kan dette udregnes mere enkelt end ved brug af tre-trins-metoden.

Hvert led differentieres for sig, og når en konstant ganges med en funktion, skal kun funktionen differentieres. Det betyder at $2x^4$ differentieret bliver til $2 \cdot 4 \cdot x^{4-1}$, hvilket kan reduceres til $8x^3$. Tilsvarende bliver $4x^3$ til $12x^2$. Samlet bliver det

$$f'(x) = 8x^3 + 12x^2$$



Opgaver hvor differentialkvotienten for et polynomium skal beregnes.

Øvelse 115 Differentier funktionerne.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 5x^3 + 3x^{-2} - 2$

d) $f(x) = 3x^2 - 5x^0$

e) $f(x) = x^{-1} + x^1$

f) $f(x) = 2x^{0,5} + 6x^{1,5}$

Endnu et par regler skal nævnes.

Sætning 26 Funktionen $f(x) = e^x$ er differentiabel og $f'(x) = e^x$.

e^x er den eneste funktion der giver sig selv når den differentieres.

Sætning 27 Funktionen $f(x) = \ln(x)$ er differentiabel for $x > 0$ og $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Øvelse 116 Differentier funktionerne.

- a) $f(x) = e^x + 3x$ b) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} + 3e^x$
c) $f(x) = 5e^x - 5x^2$ d) $f(x) = -2e^x + x^{-0,5}$
e) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ f) $f(x) = 3x^2 - 3\ln(x)$
g) $f(x) = 3\sin(x) + 4x$ h) $f(x) = \cos(x) + x^2$

I Maple og GeoGebra kan en funktion differentieres ved at bruge

Maple

$f(x) := 3x^2$
 $f'(x)$

$6x$

GeoGebra

$f(x) = 3x^2$
 $f'(x) = f'(x)$
 $\rightarrow 6x$



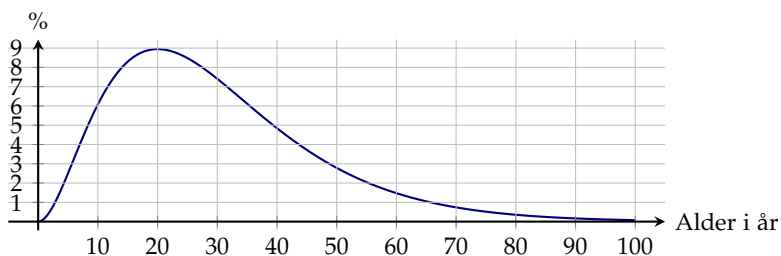
Opgaver hvor forskellige typer funktioner skal differentieres.

Tabel 5.1: Regneregler for differentialregning

f	f'
k	0
$ax + b$	a
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Virkeligheden er ofte mere kompliceret end disse funktioner. Grafen her viser risikoen for at blive involveret i vold som funktion af alder.

For at undersøge sådan en sammenhæng er det nødvendigt at bruge et IT-værktøj fordi funktionen ikke er simpel, men det er den samme forståelse af væksthastighed, tangent, ekstrema og monotoniforhold.



$$f(x) = \frac{x^2}{e^{0.1x+1.8}}$$



Video med introduktion til differentialregning i Maple.

5.3.1 Differentiation af produktfunktion

En produktfunktion er en funktion, som er et produkt af to funktioner. Det er fx de to funktioner $f(x) = x^2$ og funktionen $g(x) = \ln(x)$. Produktet af disse to funktioner er

$$x^2 \cdot \ln(x)$$

Denne type af funktioner, har deres egen regel for hvordan de skal differentieres.

Sætning 28 — Produktfunktion.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

■ **Eksempel 76** Givet en funktion $f(x) = 5x \cdot \sin(x)$. Så vil

$$f'(x) = 5 \cdot \sin(x) + 5x \cdot \cos(x)$$

■ **Eksempel 77** Givet en funktion $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^x$. Så vil

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x) \cdot e^x$$

■ **Eksempel 78** Givet en funktion $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$. Så vil

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$$



Video med bevis for produktreglen.



Video med anvendelse af produktreglen.

Øvelse 117 Differentier følgende funktioner.

a) $f(x) = 3x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = (3x + 2) \cdot \ln(x)$

c) $f(x) = (x + 1) \cdot \frac{1}{x}$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \ln(x) \cdot e^x$

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 4)$

g) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

h) $f(x) = -4x^3 \cdot \cos(x)$

Maple og GeoGebra differentiere funktioner på samme måde uafhængigt af hvilke regler der skal anvendes.

Maple

$$f(x) := (5x^2 + 3) \cdot \sin(x)$$

$$f'(x)$$

$$10x \sin(x) + (5x^2 + 3) \cos(x)$$

GeoGebra

$$f(x) = (5x^2 + 3) \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = f'(x)$$

$$\rightarrow 3 \cos(x) + 10x \sin(x) + 5x^2 \cos(x)$$

5.3.2 Differentiation af sammensat funktion

En sammensat funktion er en funktion, hvor der er en indre og en ydre funktion. Fx kan den ydre funktion være $f(x) = \sqrt{x}$ og den indre funktion være $g(x) = 2x + 3$. Da bliver den sammensatte funktion

$$f(g(x)) = \sqrt{2x + 3}$$

Regnereglen for at differentiere denne type af funktioner er

Sætning 29 — Sammensat funktion.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



Video med anvendelse af regnereglen for differentiation af sammensat funktion.

■ **Eksempel 79** Givet en funktion $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$. Så vil

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x}$$

■ **Eksempel 80** Givet en funktion $f(x) = \sqrt{3x+2}$. Så vil

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3$$

■ **Eksempel 81** Givet en funktion $f(x) = \sin(2x-4)$. Så vil

$$f'(x) = \cos(2x-4) \cdot 2$$

Øvelse 118 Differentier følgende funktioner.

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = \ln(-2x+1)$

c) $f(x) = \frac{1}{4x-2}$

d) $f(x) = \cos(x^2)$

e) $f(x) = (\cos(x))^2$

f) $f(x) = \sqrt{4x+1}$

g) $f(x) = (3x+1)^5$

h) $f(x) = e^{4x+2}$

I de følgende opgaver skal du bruge en blanding af reglerne.

Øvelse 119 Differentier følgende funktioner.

a) $f(x) = 4x^2 + 1$

b) $f(x) = \ln(x) + 3x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 - 4)$

d) $f(x) = \cos(3x+1)$

e) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{3x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

g) $f(x) = 3x^5 + \cos(2x)$

h) $f(x) = e^{4x \cdot \ln(x)}$

5.4 Væksthastighed

Væksthastighed er et udtryk for ændringen af en variabel over tid.

■ **Eksempel 82** Bestem væksthastigheden for funktionen $f(x) = 3x^2$ i punktet $x = 3$.

Først differentieres funktionen

$$f'(x) = 6x$$

Derefter udregnes

$$f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$$

Væksthastigheden i punktet $x = 3$ er derfor 18.

Dette kunne også være udregnet i Maple.

Maple

$f(x) := 3x^2$

$f'(3)$

18

GeoGebra

$f(x) = 3x^2$

$a = f'(3)$

→ 18



Video med bestemmelse af væksthastighed analytisk.



Video med bestemmelse af væksthastigheden i Maple.



Opgaver hvor væksthastigheden eller differentialkvotienten skal bestemmes analytisk.

■ **Eksempel 83 — Populationstilvækst.** I en population af dyr vokser antallet af individer med følgende sammenhæng efter år 2005.

$$f(x) = 500 \cdot e^{0.7 \cdot x}$$

Hvor $f(x)$ er antallet af individer i populationen og x er antallet af år efter 2005. Væksthastigheden i år 2010. År 2010 er 5 år efter 2005, derfor skal $f'(5)$ bestemmes for at finde væksthastigheden i 2010.

I både Maple og GeoGebra er eksponentialfunktionen e^x defineret som $\exp(x)$, det betyder at ***e*** ikke kan bruges som eksponentialfunktionen. Det vil give en fejl at skrive e^x .

Maple $f(x) := 500 \cdot \exp(0.7 \cdot x)$ $f'(5)$

11590.41

GeoGebra $f(x) := 500 \cdot \exp(0.7 \cdot x)$ $a = f'(5)$

→ 11590.41

Det betyder at i år 2010 vokser antallet af dyr i populationen med en hastighed af 11 590 dyr pr. år. ■

Øvelse 120 Løs disse opgaver, der er formuleret forskelligt, men det er den samme metode, der skal bruge til alle opgaverne.

- a) Bestem $f'(4)$ for funktionen $f(x) = x^2 - 5x + 3$.
- b) En funktion er givet ved $f(x) = 3x^3 - 5x$. Bestem $f'(2)$.
- c) Bestem vækstraten for funktionen $f(x) = 3x^4 - 10$ i punktet $x = 2$.
- d) Sammenhængen mellem antallet af hvide næsehorn og tiden i år efter 2010.

$$f(t) = -0.5 \cdot t^2 + 30$$

hvor x er antallet af år efter 2010 og f er antallet af næsehorn. Bestem væksthastigheden af næsehorn i 2015.

- e) I en model for udviklingen i antallet af husstande med solceller, er antallet af husstande med solceller proportional med kvadratet på tiden i år efter 2005, og proportionalitetsfaktoren er 0.5. Bestem vækstraten for husstande med solceller i 2009.

5.5 Tangentbestemmelse

Sætning 30 Ligningen for tangenten til grafen for funktionen $f(x)$ i punktet $(x_0, f(x_0))$ er

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Ligningen for tangenten til funktionen $f(x)$ i et punkt x_0 , kan findes på følgende måde.

■ **Eksempel 84** Funktionen $f(x) = 2x^2 - 4$ har i punktet $x_0 = 1$ en tangent, $y = ax + b$, og denne tangent findes ved følgende metode.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} = 4x$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 = -2$$

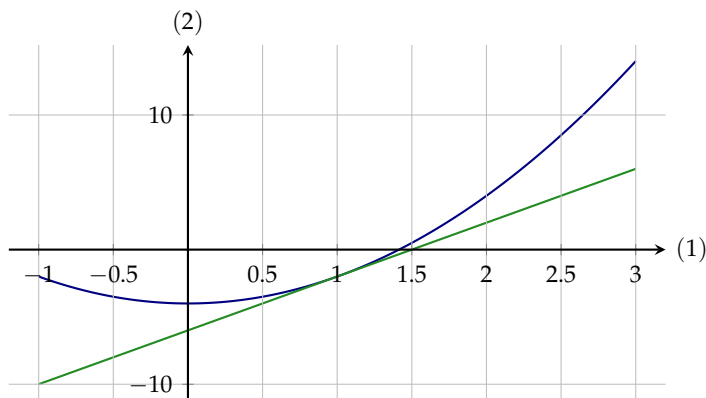
$$b = -2 - 4 \cdot 1 = -2 - 4 = -6$$

$$f'(x)$$

$$a = f'(x_0)$$

$$b = y_0 - a \cdot x_0$$

Ligningen for tangenten til $f(x) = 2x^2 - 4$ i punktet $x_0 = 1$ er så $y = 4x - 6$.



— $f(x) = 2x^2 - 4$
— Tangent i $x = 1$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion.

Det kan være en fordel at tegne tangenten og grafen i samme plot. Det giver en god mulighed for at undersøge om den løsning man har fundet frem til er rigtig.

Øvelse 121 Bestem tangenten til følgende funktioner i x_0 .

a) $f(x) = x^2 - 1$ i $x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^4 - 2x + 3$ i $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3$ i $x_0 = -2$

d) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ i $x_0 = -1$



Opgaver med bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion i et givet punkt.

■ **Eksempel 85** I Maple og GeoGebra kan tangenten til funktionen $f(x) = \frac{x^2}{e^{0.1x+1.8}}$ i punktet $x = 8$ bestemmes således

Maple

$$f(x) := \frac{x^2}{\exp(0.1x + 1.8)}$$
$$y = f'(8) \cdot (x - 8) + f(8)$$

$$y = 0.7130263506x - 0.950701801$$

GeoGebra

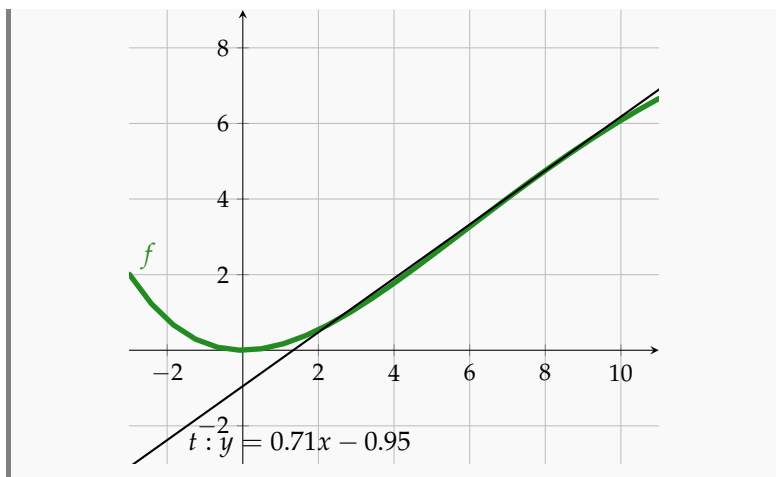
Først defineres funktionen.

$$f(x) := \frac{x^2}{\exp(0.1x + 1.8)}$$

Derefter konstrueres tangenten.

$$t: \text{Tangent}(8, f)$$

$$\rightarrow y = 0.71x - 0.95$$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangent til grafen for en funktion med en bestemt hældning.

■ **Eksempel 86 — Bestem en tangent med en bestemt hældning.** Bestem ligningen for den tangent til grafen for $f(x) = x^2 - 4x + 3$ der har hældningen 2.

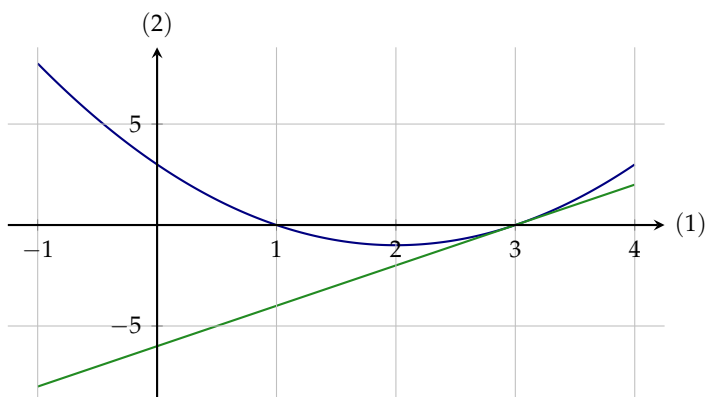
Først bestemmes $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - 4$$

Derefter løses ligningen $f'(x) = 2$, der var den ønskede hældning.

$$\begin{aligned} 2 &= 2x - 4 \\ 2 + 4 &= 2x \\ 6 &= 2x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Det betyder at den x -værdi som tangenten med hældningen 2 er tangent til grafen i er værdien 3.



— $f(x) = x^2 - 4x + 3$
 — Tangent i $x = 3$

For at bestemme ligningen for tangenten, mangler skæringen med y -aksen - b -værdien i ligningen $y = ax + b$. For at bestemme denne værdi udregnes $f(3)$.

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

Nu vides at punktet $(3, 0)$ er et punkt på tangenten, og dette punkt indsættes i tangentens ligning, sammen med hældningen på 2.

$$0 = 2 \cdot 3 + b$$

$$0 = 6 + b$$

$$-6 = b$$

Ligningen for tangenten bliver derfor $y = 2x - 6$. ■

I Maple ville ovenstående være udregnet således.

Maple

$$f(x) := x^2 - 4x + 3$$

$$\text{solve}(f'(x)=2)$$

3

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$$

$$y = 2x - 6$$



Video med eksempel på bestemmelse af ligningen af tangenten til grafen for en funktion i Maple.



Opgaver med bestemmelse af ligningen for en tangent til grafen for en funktion, hvor tangentens hældning er givet.

GeoGebra

Først defineres funktionen.

$$f(x) := x^2 - 4x + 3$$

Derefter løses ligningen $f'(x)$ lig hældningen af tangenten.

`l1:Løsninger(f'(x)=2)`

$\rightarrow 3$

Derefter konstrueres tangenten.

`t:Tangent(3,f)`

$\rightarrow y = 2x - 6$

Øvelse 122 Bestem ligningen for tangenten i følgende tilfælde.

- a) Grafen for $f(x) = -x^2 + 5$ har netop én tangent med hældningen -2 . Bestem ligningen for tangenten.
- b) Grafen for $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ har netop én tangent med hældningen 3 . Bestem ligningen for tangenten.
- c) Grafen for $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$ har netop to tangenter med hældningen 1 . Bestem ligningen for disse tangenter.

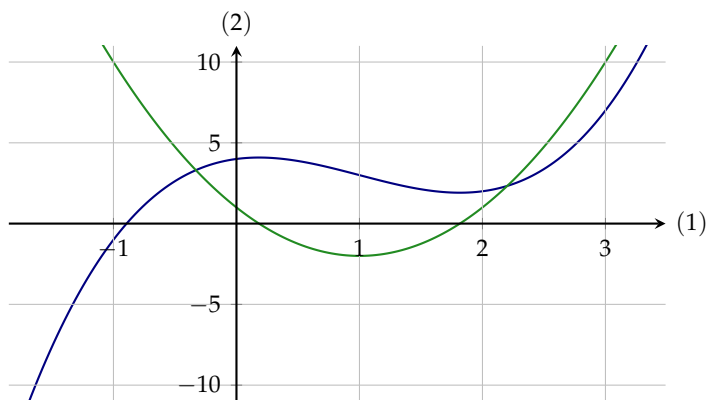


Opgaver med bestemmelse af ligningen for en tangent til grafen for en funktion, hvor tangentens hældning er givet.

5.6 Monotoniforhold

At bestemme en funktions monotoniforhold betyder at bestemme hvornår funktionen er voksende og aftagende. Med kendskabet til betydningen af differentialkvotienten, er dette lettere. Idet det udnyttes, at funktionen er voksende hvis differentialkvotienten er positiv, og funktionen er aftagende hvis differentialkvotienten er negativ.

På grafen ses, at $f'(x)$ er negativ når $f(x)$ er aftagende og, at $f'(x)$ er positiv når $f(x)$ er voksende.



Video med eksempel på bestemmelse af monotonifor-

— $f(x)$:
— $f'(x)$

For at bestemme monotoniforholdene skal de x -værdier, hvor $f'(x) = 0$ findes og fortegnet for $f'(x)$ på hver side af nulpunkterne skal bestemmes, og på baggrund af disse oplysninger kan monotoniforholdene for $f(x)$ bestemmes.

Det er altid en god idé også at tegne grafen og sammenligne den med resultatet. I den forbindelse er det vigtigt at tegne grafen så følgende er synligt.

- Nulpunkter - der hvor grafen skærer 1.aksen
- Der hvor grafen skærer 2.aksen
- Lokale ekstrema - der hvor f' er nul.
- Benyt altid intervallet, hvis det er indeholdt til opgaven, fx betyder $-2 < x < 4$ at grafen skal tegnes i intervallet -2 til 4 .

I Maple og GeoGebra kan grafen for de to funktioner $f(x) =$

$x^3 - 3x^2 + x + 4$ og $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ i intervallet -2 til 4 tegnes på følgende måde.

Maple : Tegn grafer.

```
plot([x^3 - 3x^2 + x + 4, 3x^2 - 6x + 1], x=-2..4)
```

GeoGebra : Tegn grafer.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$

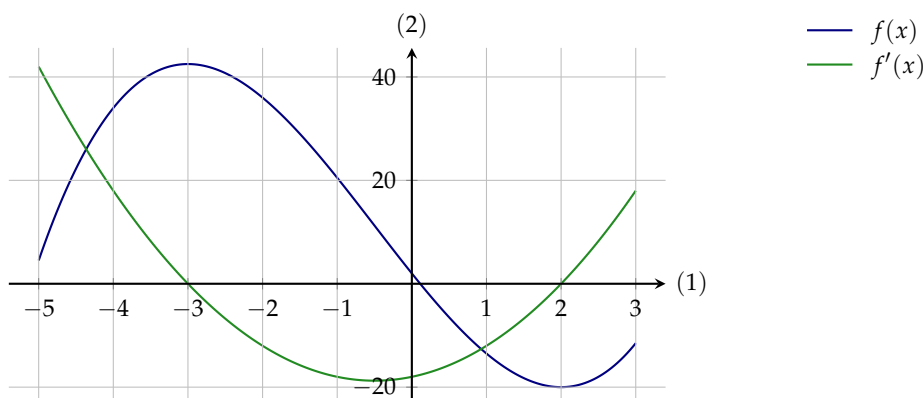
$g(x) = 3x^2 - 6x + 1$

■ **Eksempel 87** For at bestemme monotoniforholdene for funktionen

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$$

differentieres denne

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 18$$

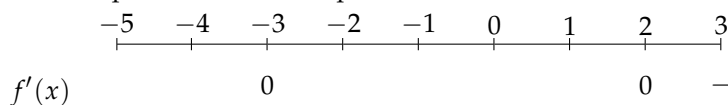


Nulpunkterne for $f'(x)$ kan findes ved at løse andengradslikningen

$$3x^2 + 3x - 18 = 0$$

Løsningen bestemmes med solve kommandoen i Maple eller løsningsformlen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ til $L = \{-3, 2\}$.

Disse nulpunkter afmærkes på en x -akse.



Så bestemmes fortegnet for $f'(x)$ inden og efter hvert af nulpunkterne.

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 18 = 3 \cdot 16 - 12 - 18 = 48 - 30 = 18$$

$$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (0) - 18 = 0 + 0 - 18 = -18$$

$$f'(4) = 3 \cdot (4)^2 + 3 \cdot (4) - 18 = 3 \cdot 16 + 12 - 18 = 48 + 12 - 18 = 42$$

Disse fortegn skrives ind på vores x -akse.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	-	0	+
$f(x)$									

Nu kan det afgøres hvor $f(x)$ er voksende, og hvor den er aftagende. Idet $f(x)$ er voksende når $f'(x)$ er positiv, og $f(x)$ er aftagende når $f'(x)$ er negativ. Dette markeres på vores x -aksen med pile.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	↗	→	↘	↘	↘	↘	→	↗

Resultatet skal skrives i følgende tekst. Bemærk at funktionen er både voksende og aftagende i -3 og 2 . Bemærk at ∞ og $-\infty$ **ikke** er indeholdt i intervallerne.

Funktionen $f(x)$ er voksende i intervallerne $]-\infty; -3]$ og $[2; \infty[$ og funktionen $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; 2]$.

Da funktionen er voksende frem til -3 og herefter aftagende er -3 et lokalt ekstremumssted - et lokalt maksimum. Den lokale maksimumsværdi er $f(-3) = 42,5$. Da funktionen er aftagende til 2 og herefter voksende, er 2 et lokalt ekstremumssted - et lokalt minimum. Den lokale minimumsværdi er $f(2) = -20$.

I Maple og GeoGebra vil opgaven kunne løses på følgende måde. Bemærk at Maple lader uendelig være en del af intervallet, det er der ikke tradition for i gymnasiet, så derfor skal dette ændres til $]-\infty, -3]$ i konklusionen i besvarelsen.



Video med eksempel på bestemmelse af monotoniforhold i Maple.

Maple

$$f(x) := x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$$

$$\text{solve}(f'(x) \geq 0)$$

$$[-\infty, -3], [2, \infty]$$

$$\text{solve}(f'(x) \leq 0)$$

$$[-3, 2]$$

GeoGebra

Først defineres funktionen.

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$$

Derefter beregnes de intervaller hvor f er voksende.

$$\text{l1: Løsninger}(f'(x) \geq 0)$$

$$\rightarrow \{x \leq -3, x \geq 2\}$$

Derefter beregnes de intervaller hvor f er aftagende.

$$\text{l2: Løsninger}(f'(x) \leq 0)$$

$$\rightarrow \{-3 \leq x \leq 2\}$$

Funktionen $f(x)$ er voksende i intervallerne $]-\infty; -3]$ og $[2; \infty[$ og funktionen $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; 2]$. ■



Opgaver hvor monotoniforholdene skal bestemmes analytisk.

Øvelse 123 Bestem monotoniforhold og ekstremumssteder og -værdier for følgende funktioner

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

c) $f(x) = 1/3 x^3 - 1/2 x^2 - 6x$

d) $f(x) = -4x^3 + 7$

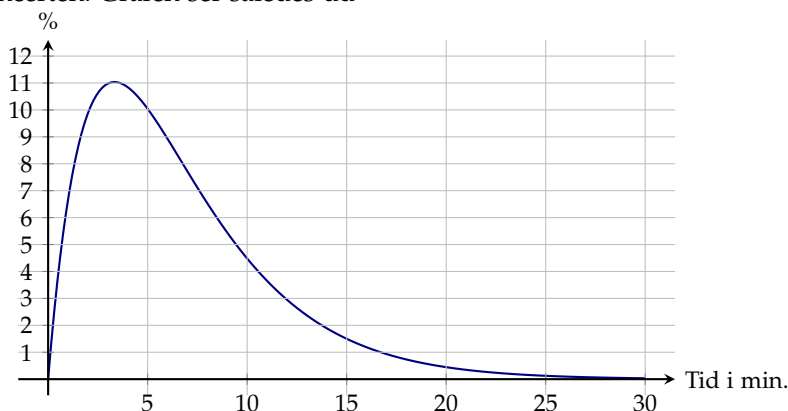
5.7 Ekstremum

Ekstremum handler om at bestemme maksimum- eller minimumssteder og værdier. Sådanne værdier kan bestemmes ved at lave en monotoniundersøgelse eller ved at løses ligningen $f'(x) = 0$ og sammenholde resultatet med en graf af funktionen i det relevante interval.

■ **Eksempel 88** Her ses på eksemplet: «Hvor hurtigt personer ønsker at forlade en koncert efter, at den er slut.»

$$f(x) = \frac{54,4 \cdot x}{e^{0,3 \cdot x + 1,8}}$$

Hvor x er tiden i minutter efter at koncerten er slut og f er hvor mange procent af koncertdeltagerne der ønsker at forlade koncerten. Grafen ser således ud



$$f(x) = \frac{54,4 \cdot x}{e^{0,3x+1,8}}$$

Til en koncert er der 250 personer. Hvor mange personer skal kunne komme ud samtidig for, at alle kan komme ud når de vil?

Først bestemmes efter hvor lang tid der er flest der vil ud, ved at løse ligningen $f'(x) = 0$.

Maple

$$f(x) := \frac{54.44682717x}{e^{0.3x+1.8}}$$

solve(f'(x)=0.)

3.33333334

Det betyder at efter 3.33 minutter er der flest der ønsker at



Video med eksempel på ekstrembestemmelse i Maple.

forlade koncerten. For at bestemme hvor mange procent det er udregnes $f(3.33)$.

Maple

$f(3.33)$

11.03638323

Det betyder, at der maksimalt er 11 % af koncertdeltagerne, der ønsker at forlade koncerten på samme tid. For at bestemme antallet af personer udregnes, 11 % af de 250 deltagere. Det er 27.5. Det betyder at der skal kunne komme 28 deltagere ud samtidig, for at alle kan komme ud når de vil. ■

Øvelse 124 Bestem ekstrema for følgende funktioner.

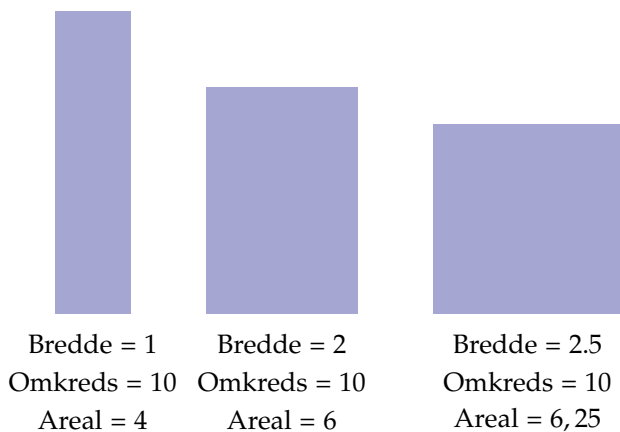
a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

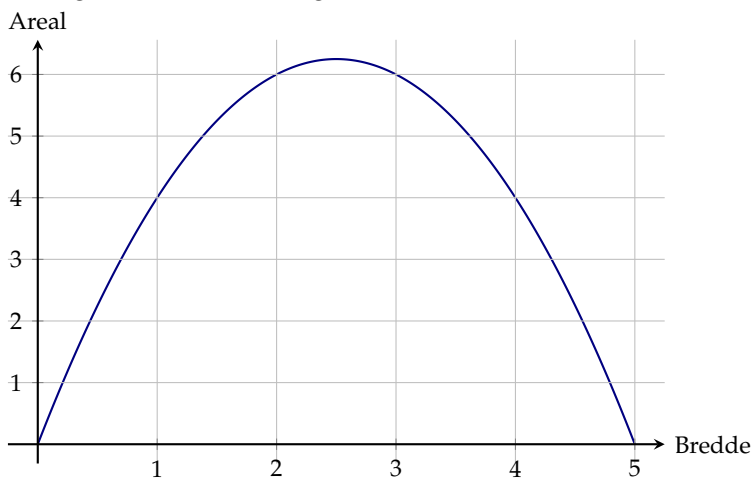
c) En kanonkugle skydes af sted og følger parablen med forskriften $p(x) = -0.5x^2 + 20x$, hvor x er i meter. Hvor højt kommer kanonkuglen op og hvor langt kommer den?

5.8 Optimering

Optimering handler om at bestemme maksimum- eller minimumssteder og værdier. Ved optimering er der to modsatrettede forhold, fx forholdet mellem areal og omkreds. Arealet af en rektangel vil, hvis den kun må have en givet omkreds, have et maksimalt areal.



Dette kan også vises grafisk. Da omkredsen er 10, vil bredden af rektangel være mellem 0 og 5.



Her ses på tre eksempler.

- optimering af profit med begrænsningen salgspris
- optimering af areal med begrænsningen omkreds

- optimering af volumen med begrænsningen overfladeareal

■ **Eksempel 89 — Optimering af profit.** En virksomhed har undersøgt sammenhængen mellem prisen og salget af en vare og er kommet frem til følgende model.

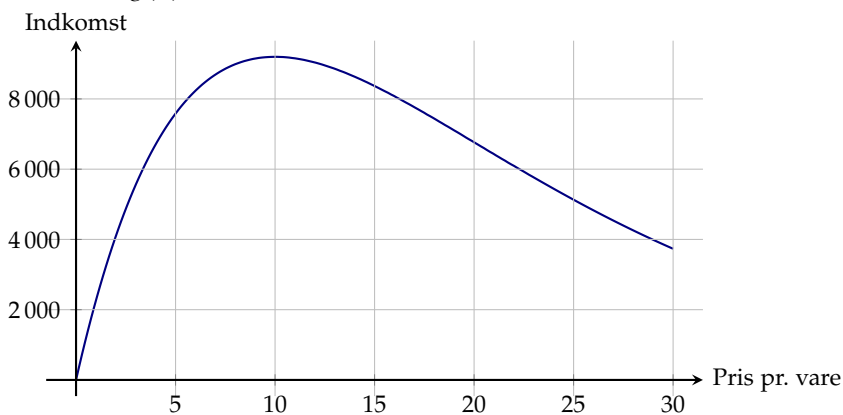
$$f(x) = 2500 \cdot e^{0.1x}$$

hvor $f(x)$ er antallet af solgte varer og x er prisen i kr. Prisen på lignende varer er maksimalt 30 kroner, og virksomheden ønsker ikke, at deres varer skal være dyrere. For at bestemme den pris, der giver den maksimale indkomst, bestemmes først en model for indkomsten.

$$g(x) = x \cdot f(x)$$

hvor $f(x)$ er antallet af solgte varer og x er prisen i kroner og $g(x)$ er den samlede indkomst.

Grafen for $g(x)$ er



Maple

```
f(x):=2500*exp(-0.1*x)
g(x):=x*f(x)
plot(g(x),x=0..30)
intervalsolve(g'(x)=0,x=5..30)
```

10

GeoGebra

Først defineres funktionerne f og g .

$$f(x) = 2500 \cdot \exp(-0.1 \cdot x)$$

$$g(x) = x \cdot f(x)$$

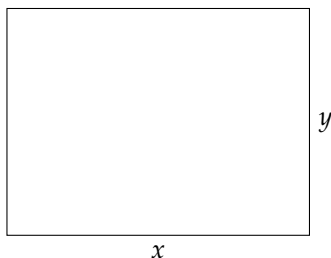
Derefter løses ligningen $g'(x) = 0$.

$$\text{L1: Løsninger}(g'(x)=0)$$

$$\rightarrow \{10\}$$

Ved løsning af ligningen $g'(x) = 0$ i intervallet 0 til 30 fås, at der er et ekstremumssted ved 10. På grafen ses at der er tale om et maksimum. Det betyder at den pris, der giver den største intjening til virksomheden, er 10 kr. ■

■ **Eksempel 90 — Optimering af areal.** I et rektangel er den samlede længde af de fire sider 24 cm



Bestem x så arealet af rektanglet er størst muligt.

Længde af de tre sider af rektanglet er

$$24 = 2x + 2y$$

Det betyder at y som funktion af x er

$$2y = 24 - 2x$$

Der kan reduceres til

$$y = 12 - x$$

Arealet er

$$A = x \cdot y$$

Ved at indsætte at $y = 12 - x$ fås formelen

$$A(x) = x \cdot (12 - x)$$



Video med eksempel på optimering i Maple.

Ved at gange x ind i parentesen fås at

$$A(x) = -x^2 + 12x$$

For at bestemme maksimum, differentieres denne funktion

$$A'(x) = -2x + 12$$

Nu løses ligningen $A'(x) = 0$

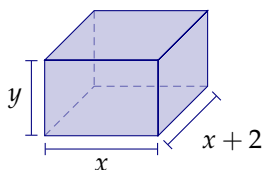
$$0 = -2x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Det størst mulige areal er når $x = 6$. ■

■ **Eksempel 91 — Optimering af volumen.** En kasse skal have overfladearealet 400 cm^2 , siderne har længderne x , $x + 2$ og y .



Bestem det størst mulige volumen.

Overfladearealet af kassen er

$$400 = 2 \cdot x \cdot (x + 2) + 2 \cdot y \cdot x + 2 \cdot y \cdot (x + 2)$$

I denne ligning isoleres y .

Maple

```
simplify(400 = 2*x*(x+2)+2*x*y+2*y*(x+2))
```

$$400 = 2x^2 + (4y + 4)x + 4y$$

```
isolate(400 = 2x^2 + (4y + 4)x + 4y, y)
```

$$y = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4}$$

Volumen er

$$V = y \cdot x \cdot (x + 2)$$

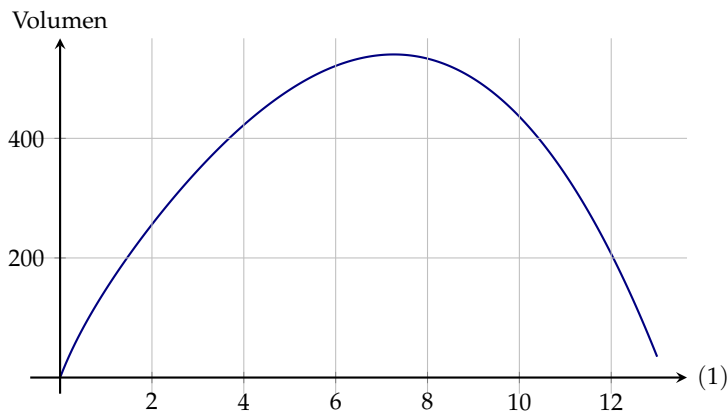
I denne ligning indsættes $y = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4}$

$$V(x) = \frac{2x^2 + 4x - 400}{-4x - 4} \cdot x \cdot (x + 2)$$

Ved at tegne grafen for V , ses at maksimum ligger mellem 0 og 13.

Maple

```
f(x):= (2*x^2+4*x-400)/(-4*x-4) * x * (x+2)
plot(V(x)=0, x=0..13)
```



For at bestemme det maksimale volumen løses ligningen $V'(x) = 0$.

Maple

```
fsolve(V'(x), x=0..13)
```

7.265234251

Det maksimale volumen er når x er 7.3 cm. Det størst muligt rumfang beregnes ved at bestemme værdien af $V(7.3)$.

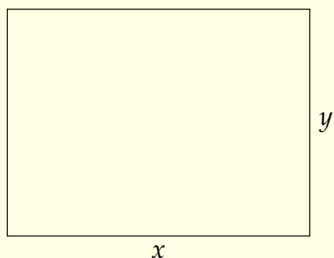
Maple

```
V(7.265234251)
```

540.3132864

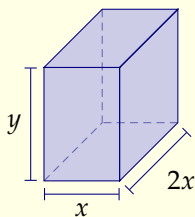
Det størst mulige volumen er 540 cm^3 . ■

Øvelse 125 I et rektangel er den samlede længde af de fire sider 16 cm



Bestem x så arealet af rektanglet er størst muligt.

Øvelse 126 En kasse skal have overfladearealet 500 cm^2 , siderne har længderne x , $2x$ og y .



Bestem det størst mulige volumen.

6

Opsparing og lån

Grunden til at det er en god idé at spare op, er at i nogle perioder er udgifterne er større end indtægten. Nogle udgifter betales fx kun hver tredje måned eller to gange om året mens indtægten typisk er hver måned. Den mest simple form for opsparing er penge, der ikke er blevet brugt.

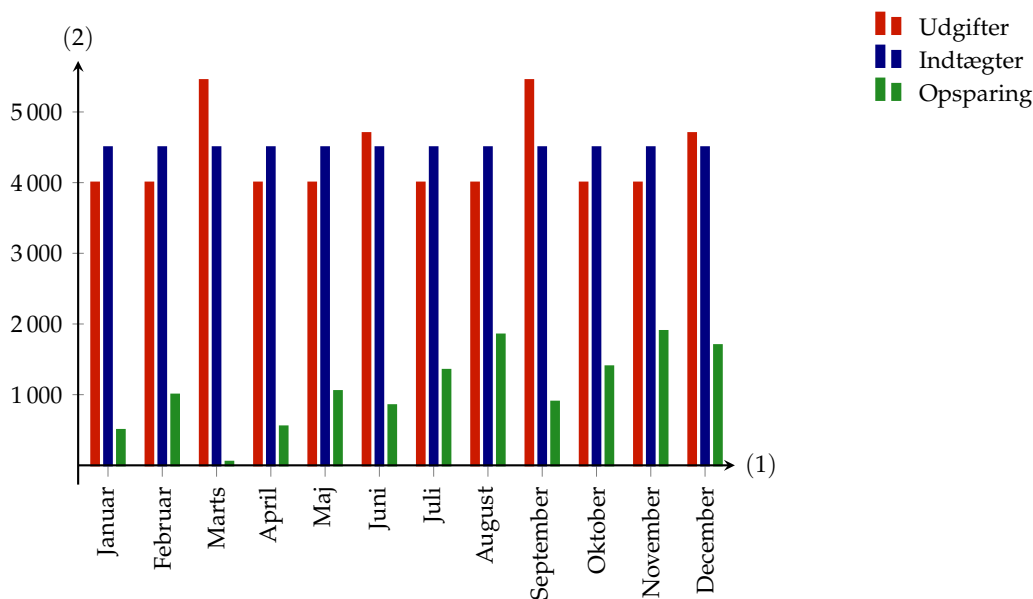
■ **Eksempel 92** I følgende eksempel ses på indtægter og udgifter for et år.

Måned	Mad	Husleje	Forskring	El	Udgifter	Indkomst	Akkumuleret opsparing
Januar	1000	3000			4000	4500	500
Februar	1000	3000			4000	4500	1000
Marts	1000	3000	750	700	5450	4500	50
April	1000	3000			4000	4500	550
Maj	1000	3000			4000	4500	1050
Juni	1000	3000		700	4700	4500	850
Juli	1000	3000			4000	4500	1350
August	1000	3000			4000	4500	1850
September	1000	3000	750	700	5450	4500	900
Oktober	1000	3000			4000	4500	1400
November	1000	3000			4000	4500	1900
December	1000	3000		700	4700	4500	1700

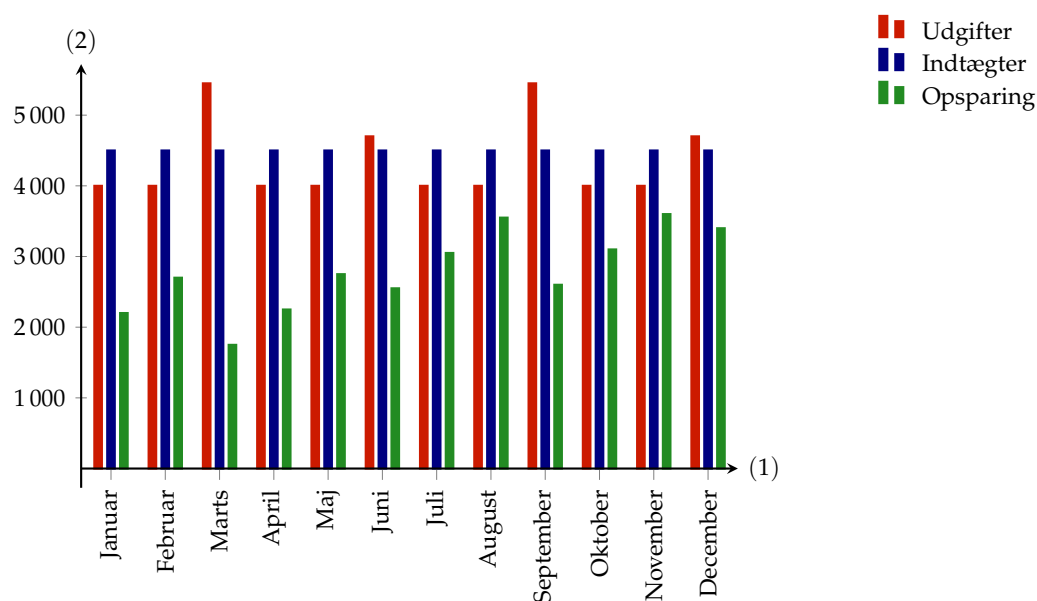
Det ses, at det er nødvendigt at spare op i januar og februar fordi i marts skal penge bruges til forsikring og el. Hvis pengene ikke var blevet sparet op, ville det være nødvendigt at låne penge

for at betale regningerne til el og forsikring. Lånet skulle så betales tilbage i de følgende måneder. Hvis de samlede udgifter over året var over 1700 større, ville der blive opbygget en gæld der ikke kunne betales tilbage.

Grafisk vil året se således ud.



Hvis opsparingen ikke bliver brugt, vil det følgende år se således ud. Selvom opsparingen ikke er særlig stor hver måned, er den allerede efter 2 år næste lige så stor om indkomsten i en enkelt måned.



Indtægter kan være løn, SU, dagpenge, renteindtægt, udbytte, lejeindtægt, overskud fra en virksomhed og lignende.

Udgifter kan være skat, renteudgifter, lejeudgifter, serviceydelser (transport, frisør, tandlæge, børnepasning, osv.), cykel, bil, ferierejser, mad osv.

Det er som sagt vigtigt, at indtægterne samlet set er større end udgifterne. Men hvorfor, hvad er meningen? En opsparing skal på lang sigt bruges til at gøre dig uafhængig af et lønnet arbejde og offentlig støtte. På kort sigt skal en opsparing hjælpe med uforudsete udgifter, så du ikke står i en situation hvor du kan blive tvunget til at optage et lån. Hvis du på sigt ikke bliver helt uafhængig, så i hvert fald mindre afhængig. Det betyder, at din indkomst kommer fra renteindtægt, udbytte, lejeindtægt, overskud fra en virksomhed og ligende. For at få denne type af indtægt skal der bruges penge til at købe aktiver som fast ejendom, aktier og obligationer. Eller du skal bruge tid på at skabe intellektuel ejendom (fx youtube video, kunst, litteratur, opfindelser) eller opbygge din egen virksomhed. Dette betyder også at du ikke skal have udgifter til fx gæld og at du generelt skal have så få udgifter som muligt. Hvis du vil være økonomisk uafhængig skal du have

aktiver. Hvor mange aktiver du skal have, for at være økonomisk uafhængig afhænger af hvor mange udgifter du har og afkastet af dine aktiver? Din opsparing skal altså bruges til at købe aktiver. Dine aktiver giver dig et afkast der afhænger af, hvor meget du har.

■ **Eksempel 93** Du har sparet 10 000 kr. op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget får du så pr. år?

$$10\,000 \cdot 0.03 = 300$$

Det giver dig 300 kr. om året. ■

300 kr. virker ikke af meget, men hvis du ikke bruger pengene med det samme, men sparer dem op sammen med de 10 000 kr. vil det blive til mange flere penge. For at regne ud hvor mange, bruges kapitalfremskrivningsformlen.

Sætning 31 — Kapitalfremskrivning.

$$K_n = K_0 \cdot (r + 1)^n$$

K_n er kapitalen K_0 vokset til efter n terminer til renten r .

■ **Eksempel 94** Du har sparet 10 000 kr. op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget har du så efter 20 år?

$$10\,000 \cdot (1 + 0.03)^{20} = 18\,061$$

Efter 20 år har du 18 061 kr. . ■

I Maple bruges den finansielle solve TVM. TVM har fem forskellige input og output. N står for antallet af terminer eller perioder. R% er renten i procent. NV er nutidsværdien af de penge du giver for aktivet eller får udbetalt som lån. Bemærk at NV er negativ fordi du giver penge for aktivet. FV er fremtidsværdien på de penge som indsættes nu. PMT er ydelsen som betales i begyndelsen af hver periode eller termin. Det er ikke alle oplysninger som skal indtastes. Hvis der fx ikke er en periodisk ydelse, skal denne ikke

indtastes som 0, det er den automatisk hvis den ikke indtastes. I dette tilfælde er $N = 20$, $R\% = 3$ og $NV = -10000$.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM($N = 20$, $R\% = 3$, $NV = -10000$)

$$FV = 18061.11235$$

I GeoGebra er der flere kommandoer, der gør det samme som TVM i Maple.

FremtidsVærdi(Rente,Perioder,Betaling,Nutidsværdi)

Rente(Perioder,Betaling,Nutidsværdi,Fremtidsværdi)

Nutidsværdi(Rente,Perioder,Betaling,Fremtidsværdi)

Betaling(Rente,Perioder,Nutidsværdi,Fremtidsværdi)

Perioder(Rente,Betaling,Nutidsværdi,Fremtidsværdi)

Her skal fremtidsværdien beregnes, derfor bruges kommandoen FremtidsVærdi.

GeoGebra

a=FremtidsVærdi(0.03,20,0,-10000)

→ 18061.11

■ **Eksempel 95** Du har købt et aktiv til 10 000 kr. og sælger det efter 20 år til 15 000 kr.

Hvad er aktivet årligt blevet forrentet med?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for r .

$$10\,000 \cdot (1 + r)^{20} = 15\,000$$

Din årlige rente har været 2.05 %.

I Maple bruges TVM.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM($N = 20$, $NV = -10000$, $FV = 15000$)

$$R\% = 2.048015365$$

Her skal renten beregnes, derfor bruges kommandoen Rente i

GeoGebra.

GeoGebra

```
a=Rente(20,0,-10000,15000)
→ 0.02048
```

■ **Eksempel 96** Det bedste aktiv du kan købe giver 10 % i årligt afkast, du skal om 5 år bruge 70 000 kr.

Hvor meget skal du købe af aktivet for at have 70 000 kr. om 5 år?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for K_0 .

$$K_0 \cdot (1 + 0.1)^5 = 70\,000$$

Du skal købe for 43 465 kr. ■

Maple : Finansiell solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 5, FV = 70000, R% = 10)
```

$$NV = -43464.49261$$

Her skal nutidsværdien beregnes, derfor bruges kommandoen Nutidsværdi i GeoGebra.

GeoGebra

```
a=Nutidsværdi(0.10,5,0,70000)
→ -43464.49
```

Øvelse 127 Line har indsat 3000 kr. på en opsparingskonto til 5 % i rente.

- Hvor meget vil der stå på kontoen efter 3 år?
- Hvor mange år går der inden der står mindst 5000 kr. på kontoen?

■ **Eksempel 97** Du har årlige udgifter for 250 000 kr. . Du kan investere i et aktiv der giver 7 % i afkast om året. Hvor meget skal du investere for at det dækker dine udgifter og du er økonomisk uafhængig og ikke behøver anden indkomst?

For at løse opgaven opstilles denne ligning.

$$250\,000 = x \cdot 0.07$$

Ligningen løses og det giver 3.6 mio. kr. . ■

For at have 3.6 mio. kr. at investere skal der spares meget op. Typisk vil det ikke være muligt at gøre dette på én gang, men løbene over flere år. For at regne dette ud anvendes opsparingsannuitet.

Sætning 32 — Opsparingsannuitet.

$$K = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

K kapital efter at der hver termin n er indbetalt y kr til en fast rente på r .

■ **Eksempel 98** Du spare 500 kr. op om måneden til 0.1 % i månedlig rente (1.2 % i årlig rente). Hvor mange penge vil du have efter 20 år?

De 20 år er 240 måneder.

$$500 \cdot \frac{(1 + 0.001)^{240} - 1}{0.001} = 135\,548$$

Efter 240 måneder hvor der samlet er opsparet 120 000 kr. , vil der på grund af renterne være 135 548 kr. . ■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette. Her er NV 0 fordi der ikke er sparet nogle penge op endnu og PMT er -500 fordi der hver måned skal betales 500 til opsparingen.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 240, R% = .1, PMT = -500, NV = 0)

$$FV = 135548.3555$$

Det er fremtidsværdien, som skal beregnes og derfor anvendes kommandoen FremtidsVærdi i GeoGebra.

GeoGebra

```
a=Fremtidsværdi(0.001,240,-500,0)
→ 135548.36
```

Grunden til at det er en stor fordel at blive økonomisk uafhængig er, at alle når til et tidspunkt hvor det ikke er muligt eller behageligt at arbejde fordi man er nedslidt mentalt eller fysisk, eller fordi ens arbejde er blevet automatiseret og man har ikke energi til at uddanne sig til et nyt arbejde. Et arbejdsliv er normalt mellem 25 og 65 år. I eksemplet er det 40 år. Dette giver 480 måneder.

■ **Eksempel 99** Hvor stor bliver en opsparing med en årlig rente på 5 %, og en månedlig opsparing på 2 500 kr.?

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0.05} - 1 = 0.00407$$

Nu kan den samlede opsparing udregnes

$$500 \cdot \frac{(1 + 0.00407)^{480} - 1}{0.00407} = 3.7 \text{ mio.}$$

■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette.

Maple : Finansiell solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 480, R% = 0.407, PMT = -2500, NV = 0)
```

$$FV = 3701550.265$$

Det gør ingen forskel om du bruger formlerne, Maple eller GeoGebra til at løse opgaverne. Resultaterne bliver det samme og det er lige rigtigt at bruge alle tre metoder. Du skal dog være opmærksom på at det til skriftlig eksamen kan præciseres i opgaven af formlen skal benyttes til løsning af en opgave og derfor anbefaler jeg at du prøver at bruge formlerne nogle gange.

Øvelse 128 Agnetes forældre lavede en børneopspring til hende da hun blev født. De indsætter 3 000 kr. hvert år og hun kan hæve pengene når hun bliver 18 år.

- a) Hvor mange penge kan Agnete hæve, hvis banken giver 3 % i rente?
- b) Hvor mange af pengene er renter?
- c) Efter 8 år beslutter Agnetes forældre, at de vil investere pengene i stede for at få 3 % i rente. Ved den nye investering får de 5 % i rente. Hvor meget kan Agnete hæve mere end hvis forældrene ikke havde investeret pengene i aktier?

En opsparing på 2500 kr. , kan virke meget stor, hvis indkomsten kun er 4500 kr. Derfor vil en typisk person opspare mere senere i livet, hvor indkomsten typisk er større, og mindre i starten hvor indkomsten er lille. Dette gør at beregningen ikke er helt så simpel.

Øvelse 129 Med baggrund i statistikbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en typisk person vil spare op og med udgangspunkt i en rente på 5 % udregne hvad den samlede opsparing vil blive.

- a) Find statistik på den gennemsnitlige indkomst i aldersgrupper i statistikbanken.
- b) Antag af personen kan opspare 15% af den del af indkomsten der er over 200 000 kr. . Bestem hvor stor opsparingen vil være i de forskellige aldersgrupper. Brug opsparingsannuitetsformlen med udgangspunkt på 0 i hver aldersgruppe. Antag at renten er 5 % om året.
- c) Antag at personen arbejder til hun er 65 år. Brug kapitalfremskrivning til at beregne hvad opsparingen i hver aldersgruppe er når personen er 65 år. Antag at renten er 5 % om året.

- d) Hvilken aldersgruppe har bidraget mest til den samlede opsparing?
- e) Hvad er den samlede opsparing?
- f) Lav en model i dit IT-værktøj, hvor du kan ændre på parametrene: Alder for økonomisk uafhængighed, årlig rente, den procentvise andel af indkomsten der spares op.
- g) Benyt modellen til at lave en opsparing der giver en alder for økonomisk uafhængighed på 50 år.

Ofte vil du i løbet af dit liv optage et større lån til et hus og bil. Sådan et lån vil du ikke kunne tilbagebetale på én gang, sådan som du ellers gør når du låner af dine venner eller familie. Realkreditforeningen eller instituttet vil også kræve renter og gebyrer i den periode, hvor du skylder dem penge. For at lave en udregning af, hvad du skal betale løbene, og hvor meget du endnu skylder bruges gældsannuitetsformlen.

Sætning 33 — Gældsannuitet.

$$H = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y (ydelsen) i kr. er hvor meget der skal indbetales hver termin, n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r .

■ **Eksempel 100** Du har lånt 1.5 mio. kr. til et hus til en rente på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlig afdrag.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0.03} - 1 = 0.002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen der skal løses for at svare

på spørgsmålet er altså

$$1\,500\,000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.002466)^{-360}}{0.002466}$$

Det giver et månedlig afdrag på 6292 kr. . Hertil kommer sikkert nogle forskellige gebyrer og bidrag. ■

I maple bruges den finansielle solve. Bemærk at ydelsen er negativ fordi det er penge du skal betale, mens hovedstolen er positiv fordi det er penge du «får».

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(N = 360, R% = 0.2466, NV = 1500000, FV = 0)

$$PMT = -6291.101719$$

I GeoGebra anvendes kommandoen Betaling, da det skal udregnes hvor meget der skal betales af på lånet, hver måned.

GeoGebra

Betaling(0.00247, 360, 1500000, 0)

→ -6291.10

Det er også muligt at vende problemstillingen.

Øvelse 130 Du har lånt 1.9 mio. kr. til et hus til en rente på 2.5 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlige afdrag.

■ **Eksempel 101** Du har i dit budget plads til at afdrage 5000 kr. til et hus og renten er på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0.03} - 1 = 0.002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$H = 5\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0.002466)^{-360}}{0.002466}$$

Det giver et samlet beløb på ca. 1.2 mio. kr. ■

Med Maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(PMT = -5000, R% = 0.2466, N = 360, FV = 0)

$$NV = 1192160.028$$

Øvelse 131 Du har i dit budget plads til at afdrage 8000 kr. til et hus og renten er på 4 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Eller du kan se på det efter du har lånt pengene og sidder med den månedlig regning.

■ **Eksempel 102** Du har lånt 2.5 mio. til dit hus og betaler 8500 kr. i afdrag hver måned og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem den månedlige effektive/faktiske rente.

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$2\,500\,000 = 8500 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-360}}{r}$$

Det giver en månedlig rente på 0.00116. Denne rente kan omregnes til en årlig rente med formlen

$$r_{\text{årlig}} = (r_{\text{månedlig}} + 1)^{12} - 1$$

$$r_{\text{årlig}} = (0.00116 + 1)^{12} - 1 = 0.014$$

Den årlige rente er 1.4 %. ■

Med Maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver. Den fremtidige værdi FV er 0 fordi lånet er betalt tilbage.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(NV = 2500000, N = 360, FV = 0, PMT = -8500)

R% = 0.1160672092

Øvelse 132 Du vil købe en bil til 300 000 kr. og får et tilbud på lån, hvor du skal betale 5000 kr. hver måned i 7 år.

- Hvad kommer bilen til at koste dig samlet over de 7 år?
- Hvad er dine månedlige omkostninger i procent?
- Din månedlige rente er 0.75 %. Hvad betaler du i gebyr pr. måned?
- Hvad er dine årlige omkostninger i procent (ÅOP)?

Fordi du er blevet fyret fra dit job kan det være, at banker bliver nød til at lave en ny tilbagebetalingplan på lånet til dit hus.

■ **Eksempel 103** Du har en restgæld (ny hovedstol) på 0.7 mio. og betaler 8500 kr. i afdrag hver måned til 5 % i rente. Efter at du er blevet fyret kan du nu kun betale 3500 kr.

Bestem hvor mange måneder du skal bruge på at betale .

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0.05} - 1 = 0.004074$$

Ligningen, der skal løses for at svare på spørgsmålet, er altså

$$700\,000 = 3500 \cdot \frac{1 - (1 + 0.004074)^{-n}}{0.004074}$$

Det giver 415 måneder. ■

Med Maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiell solver.

with(Gym):

TVM(PMT = -3500, R% = 0.4074, FV = 0, NV=700000)

$$N = 414.7647670$$

GeoGebra

Perioder(0.004074, -3500, 700000, 0)

→ 414.77

Men et lån kan også være afdragsfrit. Det betyder lidt forenklet at der kun betales renterne i en periode. Ved et lån på 700 000 kr. til en rente på 4 % betales der derfor

$$700\,000 \cdot 0,04 = 28\,000$$

Det giver en månedlig betaling på ca. 2334 kr. , men der er så heller ikke afdraget på gælden og hovedstolen er derfor 700 000 kr.

I eksemplet er restgælden kendt, og det er fordi det er muligt at udregne den løbende igennem afbetalingen af hele lånet. En sådan tabel kaldes en amortisationstabel. I tabellen er der fem kolonner. Den første kolonne viser hvilken termin der er tale om og den næste viser hvilken ydelse der er på lånet, det vil sige hvor meget låntager (dig) i alt betaler til långiver (banken). Den næste viser renterne der skal betales i denne termin. Den næste viser afdraget på hovedstolen og den sidste viser restgælden.

For at kunne udregne tallene i amortisationstabellen skal fire værdier være kendt: Hovedstolen, renten, ydelsen og antallet af terminer. Som det ses af formlen

$$H = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y (ydelsen) i kr. er hvor meget der skal indbetales hver termin, n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r . Det er kun nødvendigt at kende tre af disse for at kunne beregne den sidste. Ofte er det hovedstolen, renten og antallet af terminer der er kendt.

Hovedstol	1 700 000 kr.
Antal terminer	360
Årlig rente	2.5 %

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0.025} - 1 = 0.00206$$

Tallene kan nu indsættes i formlen og ydelsen beregnes.

$$1\,700\,000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.00206)^{-360}}{0.00206} = 6692.159691$$

Ydelsen bliver så 6 693, da det er mest praktisk af runde op. Det betyder, at den sidste termin bliver lidt mindre end de andre.

Renten udregnes ved at tage den månedlige rente af restgælden

$$\text{Rente} = 1\,700\,000 \cdot 0.00206 = 3502$$

Afdraget er ydelsen minus renten

$$\text{Afdrag} = \text{Ydelse} - \text{Rente}$$

$$\text{Afdrag} = 6693 - 3502 = 3191$$

Den nye restgæld er den gamle restgæld minus afdraget.

$$1\,700\,000 - 3191 = 1\,696\,809$$

Termin	Ydelse	Rente	Afdrag	Restgæld
0	-	-	-	1 700 000.00
1	6693	3502.00	3191.00	1 696 809.00
2	6693	3495.43	3197.57	1 693 611.42
3	6693	3488.84	3204.16	1 690 407.27
4	6693	3482.24	3210.76	1 687 196.51
5	6693	3475.62	3217.38	1 683 979.13
⋮				
356	6693	67.79	6625.21	26 282.33
357	6693	54.14	6638.86	19 643.47
358	6693	40.47	6652.53	12 990.94
359	6693	26.76	6666.24	6 324.70
360	6337.73	13.03	6324.70	0

I Maple kan amortisationstabellen skrives med brug af kommandoerne `renteAmort`, `afdragAmort` og `balanceAmort`. I alle kommandoerne skal hovedstolen, ydelsen, renten i % og terminnummeret bruges. For at vise alle terminer laves en sekvens, hvor alle terminer udregnes ved at lade n gå fra 1 til 360. Grunden til at `latex` er med, er for at få Maple til at lave en linje pr. linje i tabellen og n og 6693 er kun med for at de skal passe med tabellen ovenfor.

Maple : Amortisationstabel.

```
with(Gym):
seq(latex([n, 6693,
renteAmort(1700000, 6693, .206, n),
afdragAmort(1700000, 6693, .206, n),
balanceAmort(1700000, 6693, .206, n)
]), n = 1 .. 360)
```

Som du sikkert kan fornemme, er der ikke tale om en simpel situation, fordi der ofte i en 30-årig periode kan ske større ting i ens liv, der gør at sådanne lån ikke bliver afviklet efter bogen. Det kan være flytning, arbejdsløshed, skilsmisse, børn og lignende.

Derfor er det vigtigt hele tiden at kende den aktuelle restgæld, eller i det mindste at kunne beregne den.

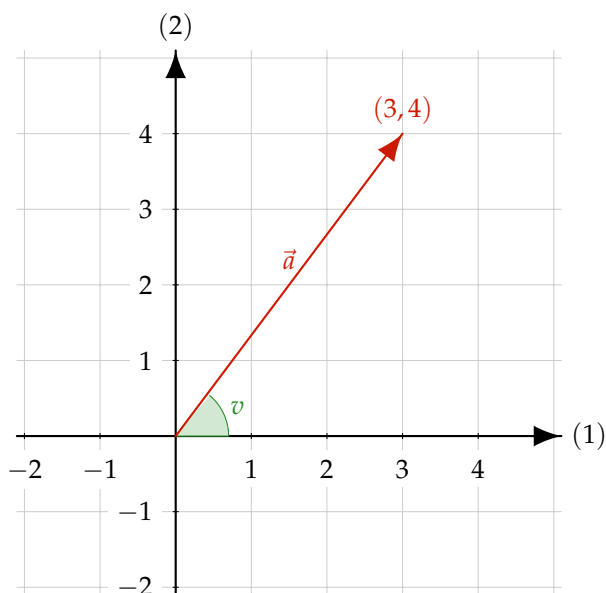
Øvelse 133 Med baggrund i statistikbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en gennemsnitsperson vil kunne låne med udgangspunkt i en rente på 5 %.

- a) Antag af personen kan bruge 30% af den del af indkomsten der er over 150 000 kr. . til afbetaling på et lån. Bestem hvor stor et lån der kan optages i de forskellige aldersgrupper.
- b) Hvordan vil afbetalingen af et lån på 3,5 mio. forløbe for en gennemsnitsperson?

7

Vektorer

En vektor er en størrelse med retning. Geometrisk angives vektorer som pile, hvor længden af pilen er størrelsen på vektoren og retningen er vektorens retning i et koordinatsystem i forhold til vinklen mellem vektoren og 1. akse.



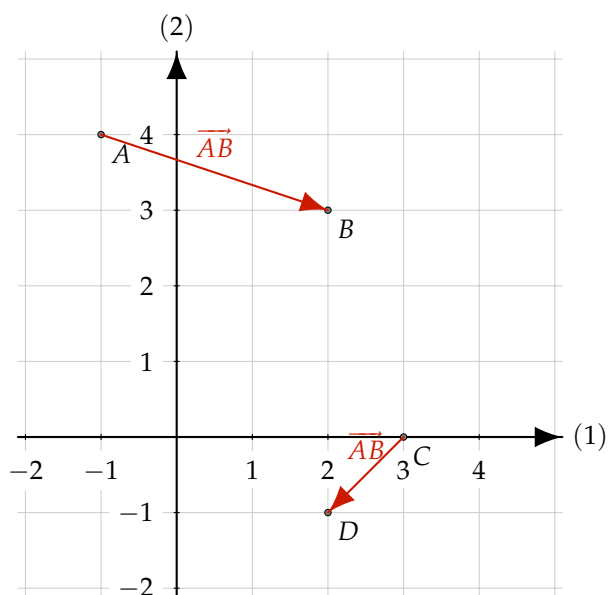
Aritmetisk angives de med koordinatsæt. En vektor består af lige så mange komponenter som der er dimensioner i det rum vektoren er i. Det betyder at der er to komponenter a_x og a_y for en vektor i to dimensioner. Vektoren og komponenterne i vektoren skrives ofte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ eller } \vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$ for, at det er muligt at se forskel på en vektor og et punkt, der angives som $(3,4)$.

Vektorer bruges især til to ting. For det første bruges vektorer til at repræsentere forskellige fysiske størrelser, fx trækraft eller tyngdekraft eller vind. Det væsentlige er, at det vektorer kan beskrive skal ikke 'bare' være en størrelse, som fx at det blæser med 2 m/sek. at der er 40 kr på min konto eller at der er en elektrisk strøm på 25 volt eller tyngdekraften er på 9.43 N osv. Udover at der skal være tale om en størrelse, skal der også være tale om en retning, så vinden blæser med 2 sek/m fra NNV (Nord-nord-vest) eller tyngdekraften trækker i retning mod Jorden også kaldet ned. De 40 kr. på min konto har ikke nogen retning, saldoen kan godt ændre sig, men i sig selv har saldoen ingen retning.

En vektor kan defineres ud fra to punkter. Punkterne A, B, C og D , kan bruges til at definere



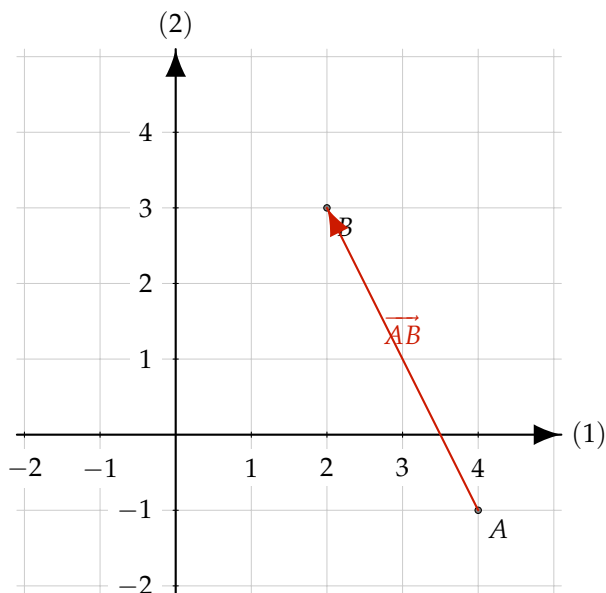
En vektor navngives med deres endepunkter fx $\vec{AB}, \vec{CD}$. En vektor er den korteste afstand mellem de to punkter.

En vektor kan defineres ud fra to punkter.

Definition 28 — Vektor mellem to punkter. En vektor fra $A(A_x, A_y)$ til $B(B_x, B_y)$ har følgende komponenter

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix}$$

■ **Eksempel 104** En vektor $\overrightarrow{AB}$ fra $A(4, -1)$ til $B(2, 3)$.



Vektor $\overrightarrow{AB}$ er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

Øvelse 134 Bestem en vektor fra punktet A til B .

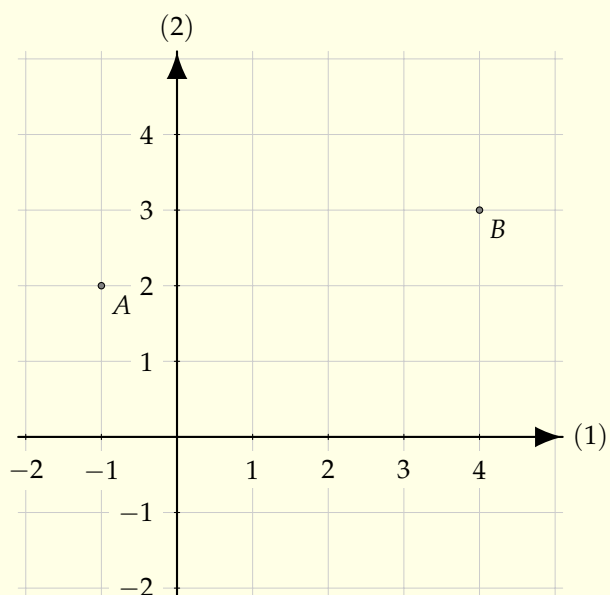
a) $A(2, 4)$ til $B(-3, 2)$

b) $A(-2, 2)$ til $B(3, -3)$

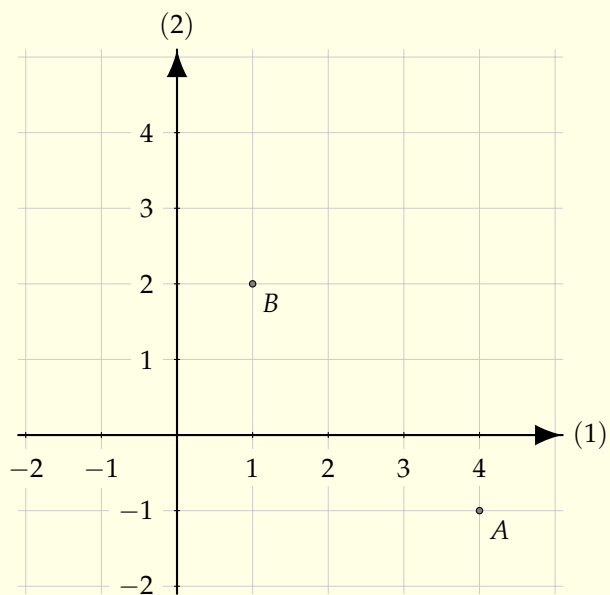
c) $A(0, 1)$ til $B(1, -5)$

d) $A(-3, 10)$ til $B(-4, 8)$

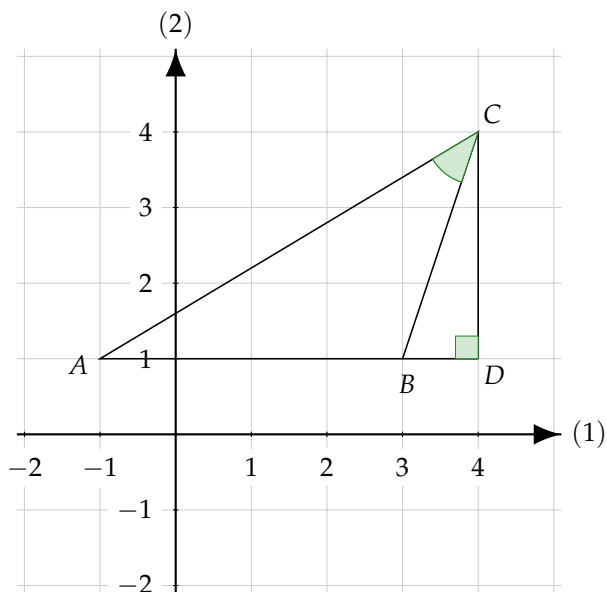
Øvelse 135 Bestem en vektor fra A til B .



Øvelse 136 Bestem en vektor fra A til B .



Vinklerne i en polygon navngives efter de punkter vinkelspidsen ligger i, her C. Hvis der er tvivl om hvilken der er tale om, navngives vinklen med de tre punkter der skaber vinklen med den aktuelle vinkel i midten, her vinkel ACB .



En vinkel er en brøkdelt af en cirkel, en vinkel måles i grader, en hel cirkel har 360° . Vinkler inddeles i fire typer.



Lige vinkel 180°



Ret vinkel 90°

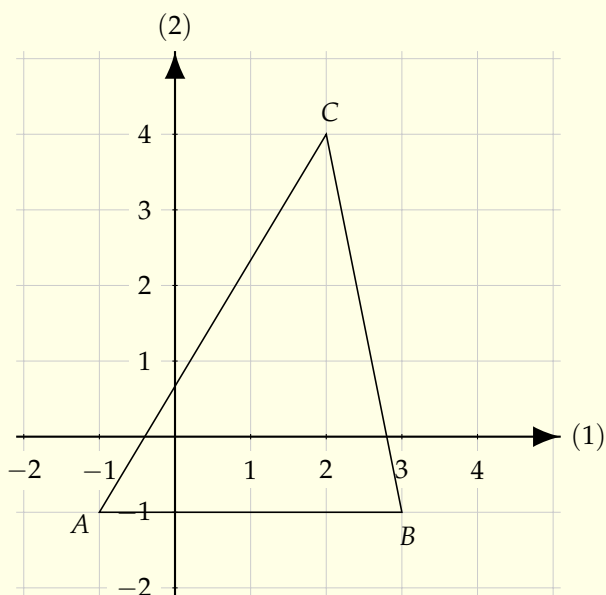


Spids vinkel $< 90^\circ$

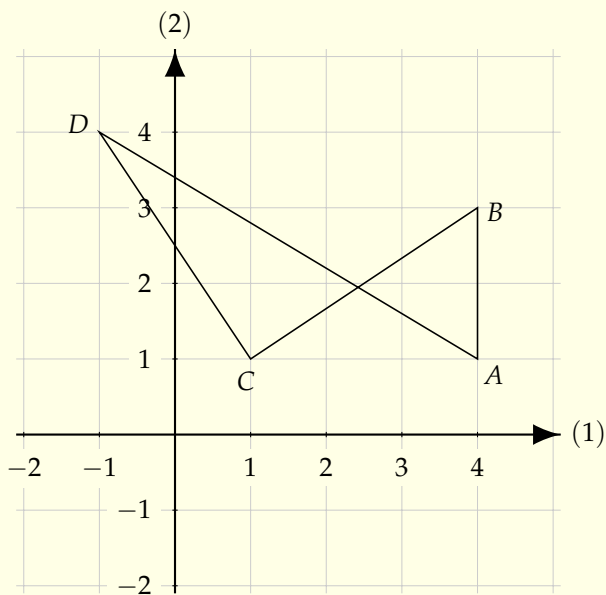


Stump vinkel $> 90^\circ$

Øvelse 137 Bestem de tre vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.



Øvelse 138 Bestem vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.

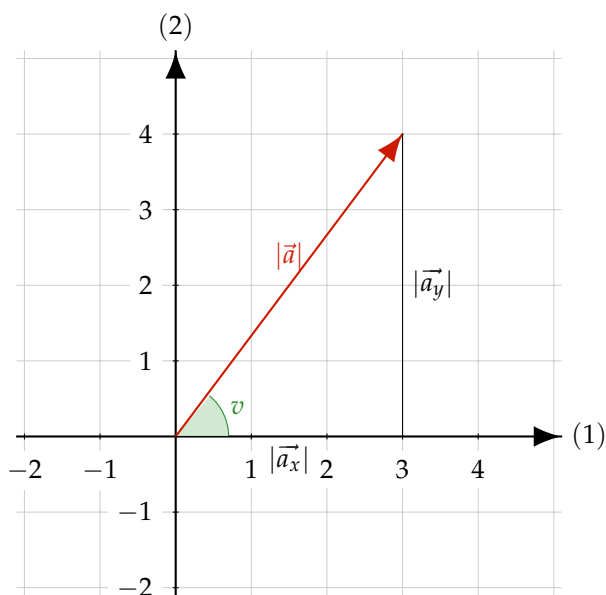


7.1 Længden af en vektor

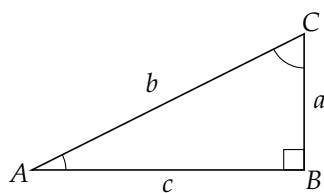
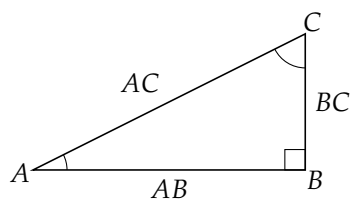
Længden af en vektor $\vec{AB}$ skrives $|\vec{AB}|$. Længden af en vektor kan bestemmes ved at se på den retvinklede trekant, hvor længden af vektoren er længden af hypotenusen. Længden af kateterne i den retvinklede trekant, er længden af vektorens x og y komponent $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$.



Video der gennemgår definition og længde af en vektor.



Den retvinklede trekant er en trekant med én ret vinkel. Den rette vinkel markeres med en $\square$ som markeringen af vinklen. Vinkler der ikke er rette, markeres med en cirkelbue. Trekanten navngives efter de tre punkter, fx trekant ABC eller $\triangle ABC$. Siderne i trekanten navngives efter endepunkterne på siderne eller efter det modstående punkt, men med lille bogstav så der ikke opstår forvirring om punkter og sider. Det lille bogstav kan betyde længden af siden eller være navnet på siden.



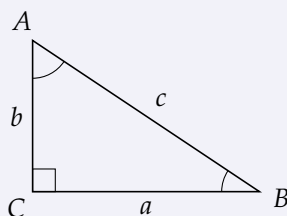
Nu ses der på nogle af reglerne for en retvinklet trekant. Vi skal se på Pythagoras' sætning, beregning af areal og forholds-
beregning. Til sidst defineres sinus og cosinus, som bruges til at
beregne vinkler og længden af sider i den retvinklede trekant. Den
retvinklede trekant er udgangspunktet for udregninger i vilkårlige
trekanter.



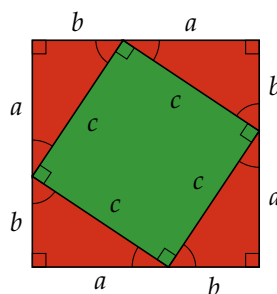
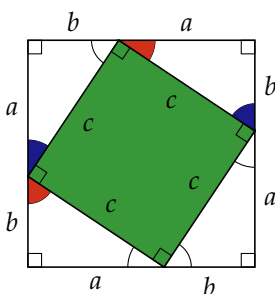
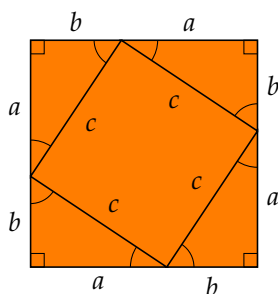
Bevis for Pythagoras' sætning

Sætning 34 — Pythagoras sætning. For en retvinklet trekant ABC
hvor vinkel C er ret vil

$$c^2 = a^2 + b^2$$



■ **Bevis** I beviset bruges følgende figurer.



Firkanten markeret med orange er et kvadrat, fordi det har fire

rette vinkler og de fire sider er lige lange $(a + b)$. Derfor vil arealet af dette kvadrat være

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

Fordi vinkelsummen i en trekant er 180° , og den rette vinkel er 90° , er summen af de to resterende vinkler i hver trekant 90° . Det betyder, at summen af to vinkler der ligger overfor hinanden også er 90° . Det betyder, at vinklen i den lille firkant er 90° . Den lille firkant markeret med grønt, er altså et kvadrat. Da sidelængden i det lille kvadrat c , er arealet

$$c^2$$

Summen af arealet af de **fire trekanter** og **det lille kvadrat** er

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2 = 2ab + c^2$$

Dette areal er det samme som arealet af det store kvadrat, derfor er

$$2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

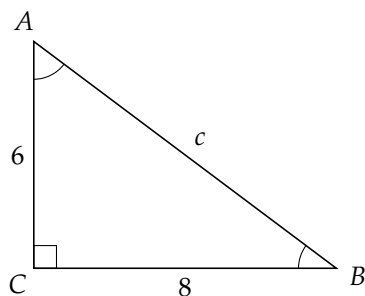
Det kan reduceres til

$$c^2 = a^2 + b^2$$

■

■ **Eksempel 105** I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af b er 6 og længden af a er 8.

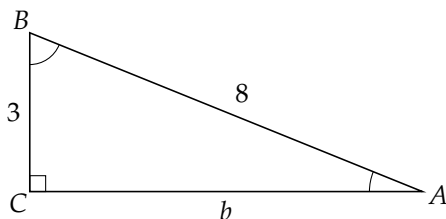
Bestem længden af c .



$$\begin{aligned}
 c^2 &= 6^2 + 8^2 \\
 c^2 &= 36 + 64 \\
 c^2 &= 100 \\
 c &= \pm 10
 \end{aligned}$$

Den negative løsning er ikke mulig, da længder er positive. Længden af c er derfor 10. ■

■ **Eksempel 106** I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af c er 8 og længden af a er 3.
Bestem længden af b .



Oplysninger fra opgaven indsættes i Pythagoras' sætning

$$\begin{aligned}
 8^2 &= 3^2 + b^2 \\
 64 &= 9 + b^2 \\
 64 - 9 &= b^2 \\
 55 &= b^2 \\
 b &= \pm\sqrt{55}
 \end{aligned}$$

Da den negative løsning ikke er mulig, da længder er positive, er $b = \sqrt{55}$. ■

Nu kan størrelsen af en vektor bestemmes, ved Pythagoras' sætning.

Sætning 35 Størrelsen eller længden af en vektor kan beregnes med formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne i $\vec{a}$.



Video med eksempler på anvendelse af Pythagoras sætning.

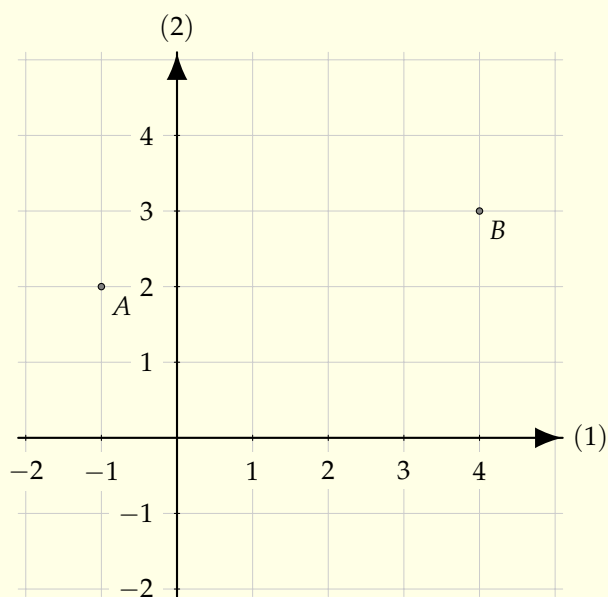


Opgaver hvor Pythagoras sætning skal anvendes.

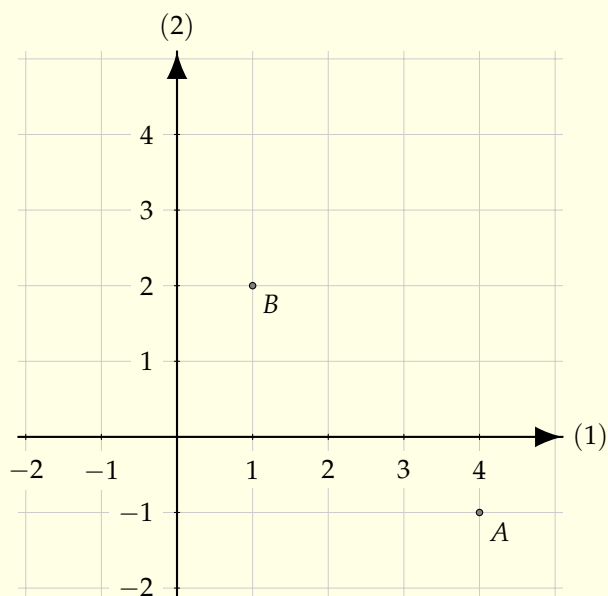


Video med eksempel på beregning af længden af en vektor og bestemmelse af en parameter i en vektor så længden af vektoren har en given længde.

Øvelse 139 Bestem længden af en vektor fra A til B .



Øvelse 140 Bestem længden af en vektor fra A til B .



Øvelse 141 Bestem længden af en vektor fra punktet A til B .

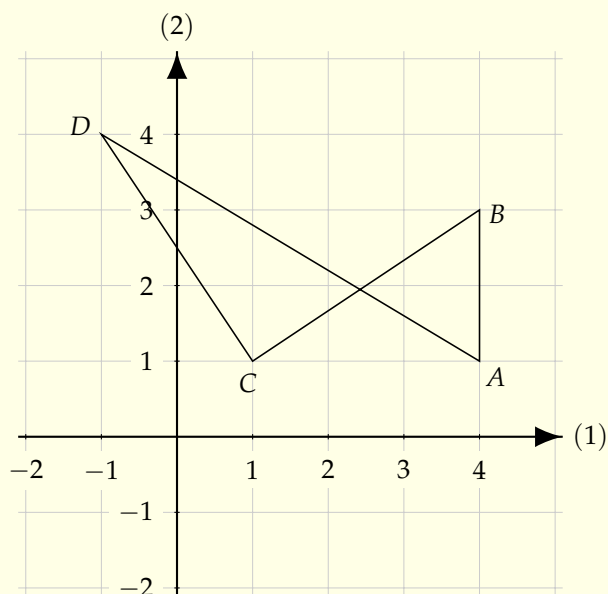
a) $A(2, 4)$ til $B(-3, 2)$

b) $A(-2, 2)$ til $B(3, -3)$

c) $A(0, 1)$ til $B(1, -5)$

d) $A(-3, 10)$ til $B(-4, 8)$

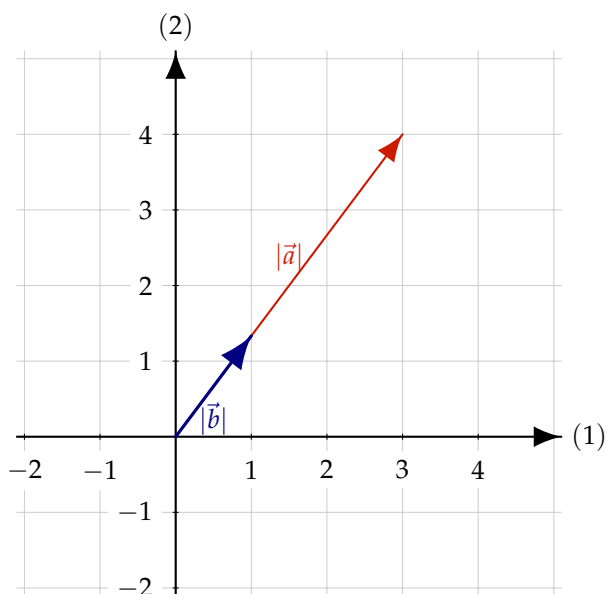
Øvelse 142 Bestem længden af vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.



7.2 Vektor aritmetik

En størrelse som ikke har en retning og derved er repræsenteret ved et enkelt tal kaldes en skalar. To vektorer der har samme retning¹ men ikke samme længde, er proportionale og proportionalitetsfaktoren er en skalar.

¹ parallelle vektorer

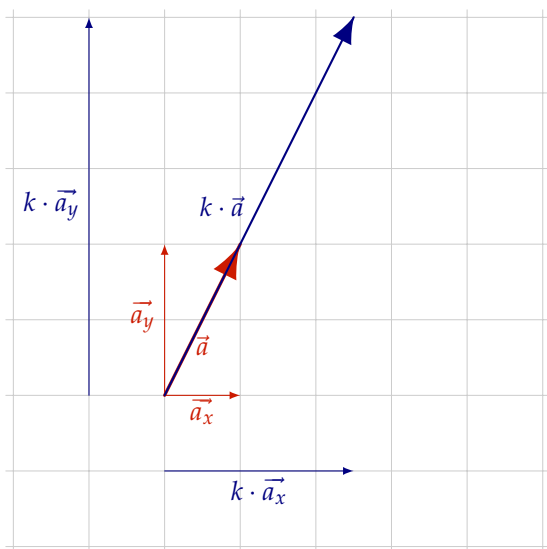


Definition 29 — Skalar multiplikation. En skalar multipliceres på en vektor på følgende måde.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$



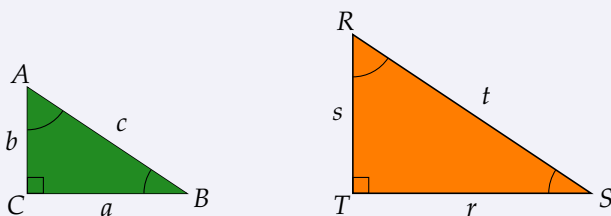
Video hvor skalarmultiplikation, vektor addition, subtraktion og determinant gennemgås.



Det er derfor muligt at beregne en vektors x og y komponenter, hvis en vektor med samme retning er kendt. For at undersøge dette ses igen på retvinklede trekanter.

Definition 30 To trekanter kaldes ensvinklede, hvis alle deres vinkler er parvis ens.

Sætning 36 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede retvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F .



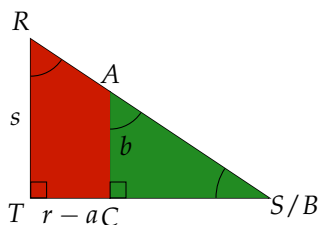
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

■ **Bevis** Arealet af trekant ABC er

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

og arealet af trekant RST er

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r$$



Arealet af trapezen $ACTR$ er

$$\frac{s+b}{2} \cdot (r-a)$$

Arealet af trekant RST er også summen af den lille trekant (grøn) og trapezen (rød) $ACTR$.

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r = \frac{s+b}{2} \cdot (r-a) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Ved at gange med 2, kan det reduceres til

$$s \cdot r = (s+b) \cdot (r-a) + a \cdot b$$

Ved at gange de to parenteser ud, kan det omskrives til

$$s \cdot r = s \cdot r - s \cdot a + b \cdot r - a \cdot b + a \cdot b$$

Her går $a \cdot b$ og $s \cdot r$ ud

$$0 = -s \cdot a + b \cdot r$$

$s \cdot a$ lægges til

$$s \cdot a = b \cdot r$$

Der divideres med $s \cdot r$

$$\frac{s \cdot a}{s \cdot r} = \frac{b \cdot r}{s \cdot r}$$

Brøkerne forkortes

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$$

Dette beviser den første del af sætningen. For at vise den anden del anvendes Pythagoras' sætning. For trekant ABC gælder at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ved at gange med s^2 , bliver det til

$$a^2 \cdot s^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

Vi har lige vist at $s \cdot a = b \cdot r$ og så vil $a^2 \cdot s^2 = b^2 \cdot r^2$.

$$b^2 \cdot r^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

b^2 kan sættes udenfor parentes på venstre side.

$$b^2 \cdot (r^2 + s^2) = c^2 \cdot s^2$$

Det følger af Pythagoras' sætning, at $r^2 + s^2 = t^2$.

$$b^2 \cdot t^2 = c^2 \cdot s^2$$

Da alle størrelser er positive, kan dette omskrives til

$$b \cdot t = c \cdot s$$

Der divideres med $t \cdot s$

$$\frac{b \cdot t}{t \cdot s} = \frac{c \cdot s}{t \cdot s}$$

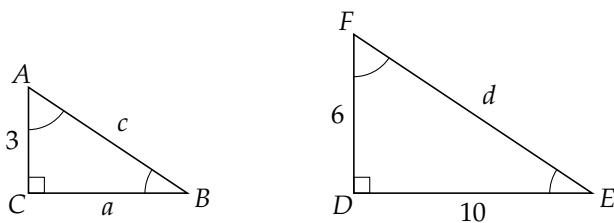
Brøkerne forkortes

$$\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$$

Dette beviser den anden del af sætningen. ■

■ **Eksempel 107** De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem længden af a .



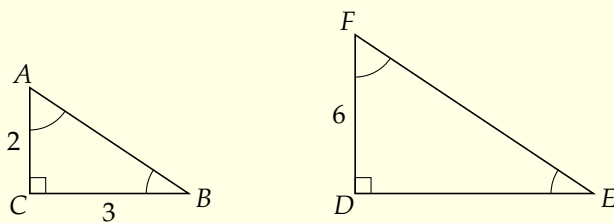
Forholdet mellem de to trekanter er $\frac{3}{6}$, det betyder at

$$a = \frac{3}{6} \cdot 10 = 5$$

■

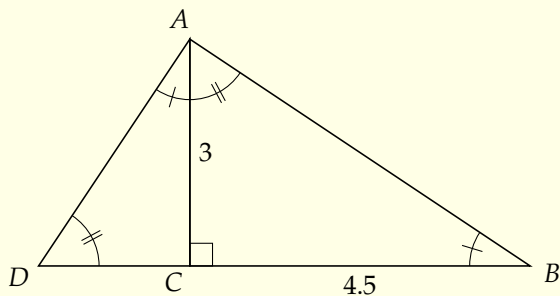
Øvelse 143 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|DE|$.



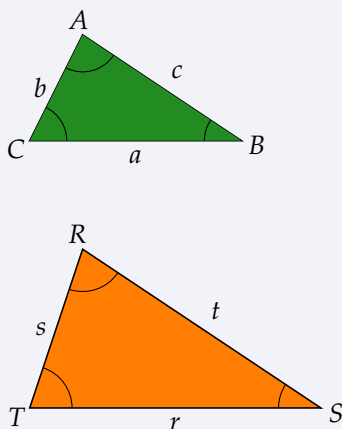
Øvelse 144 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|CD|$.



Størrelsesforhold er ikke kun konstant for retvinklede trekanter, det gælder også for trekanter der ikke er retvinklede.

Sætning 37 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F .



$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

Definition 31 — Determinant. Determinanten $\det(\vec{a}, \vec{b})$ mellem to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ er

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$



Video med eksempel på afgørelse af om to vektorer er parallelle og bestemmelse af en parameter så to vektorer bliver parallelle.

Sætning 38 To vektorer er parallelle hvis og kun hvis deres determinant er 0.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

■ **Bevis** To vektorer, der er forskellige fra nul-vektoren $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$, er parallelle hvis og kun hvis $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}) &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \\ &= a_x \cdot k \cdot a_y - a_y \cdot k \cdot a_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definition 31

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

■

■ **Eksempel 108** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle -3, 5 \rangle$$

Bestem determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22$$

■

■ **Eksempel 109** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, t \rangle \quad \vec{b} = \langle 1, 5 \rangle$$

Bestem værdien af t der gør $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

Først bestemmes determinanten

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - t \cdot 1 = 10 - t$$

Hvis de to vektorer skal være parallelle skal determinanten være 0.

$$0 = 10 - t$$

$$t = 10$$

Når $t = 10$ er de to vektorer parallelle.

■

Øvelse 145 Bestem determinanten for de to vektorer.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 0, 5 \rangle$.

Øvelse 146 Bestem værdien af t så de to vektorer er parallelle.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, t \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle t, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 5 \rangle$.

For at undersøge vinklen mellem 1. aksen og en vektor bruges sinus og cosinus

Sinus og cosinus er defineret ud fra enhedscirklen. Enhedscirklen er en cirkel med radius 1 og med centrum i $(0, 0)$.

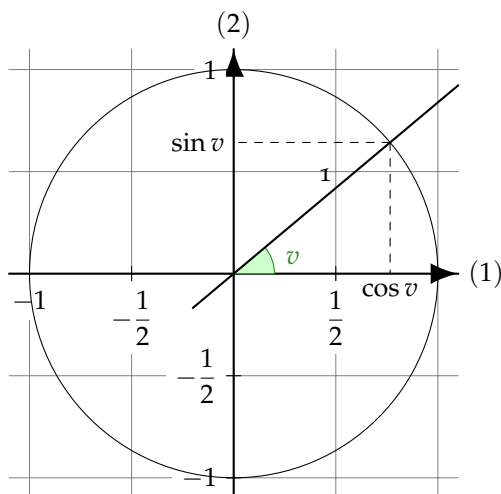


Opgaver hvor værdien af t skal bestemmes så de to vektorer er parallelle.

Definition 32 Sinus til en vinkel, v , er defineret som y -koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linje som skærer x -aksen i $(0,0)$ og danner vinklen v med x -aksen.



Definition af sinus og cosinus



Definition 33 Cosinus til en vinkel, v , er defineret som x -koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linje som skærer x -aksen i $(0,0)$ og danner vinklen v med x -aksen.

Sætning 39 For alle vinkler v gælder at

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

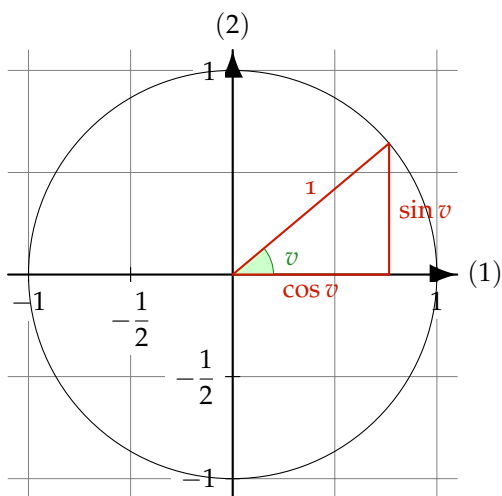
■ **Bevis** Ved at bruge Pythagoras sætning på trekanten markeret med rødt fås

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1^2$$

Da $1^2 = 1$

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

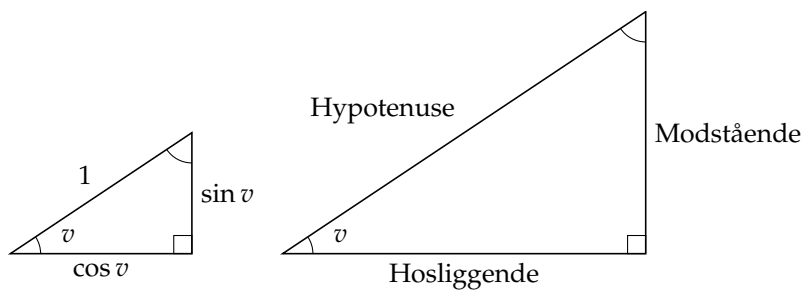
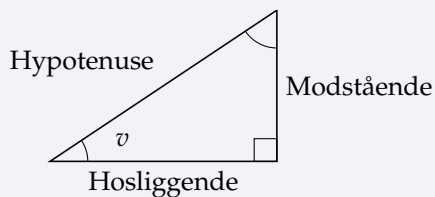
■



Definitionen af sinus og cosinus kan udvides til alle retvinklede trekanter ved at bruge forholdsregning.

Sætning 40 For den retvinklede trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



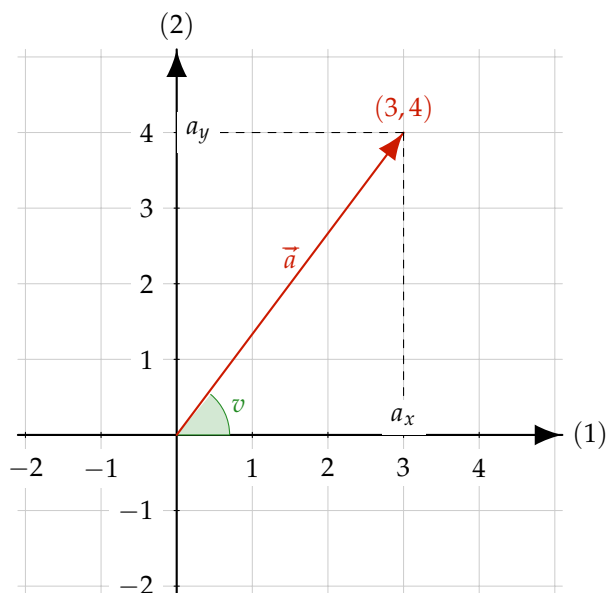
Forholdet mellem siderne i de to trekanter er

$$\frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

Ved at se på forholdene to og to kommer følgende ligninger hvor sin og cos kan isoleres.

$$\text{Hypotenuse} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} \text{ og } \text{Hypotenuse} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

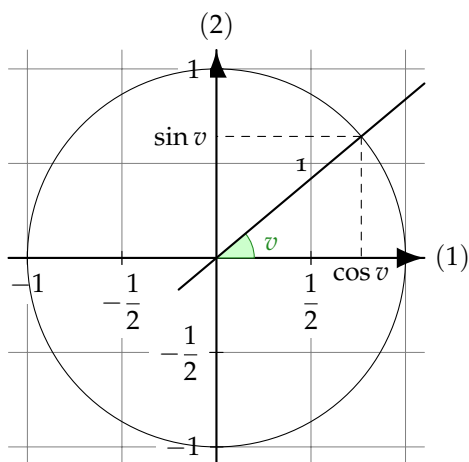
$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



Forholdet mellem vinklen v , og størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$, ses på enhedscirklen

$$\vec{a}_x = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$$

$$\vec{a}_y = |\vec{a}| \cdot \sin(v)$$



■ **Eksempel 110** Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle$ og 1. akse.

Først bestemmes længden af vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Nu kan vinklen bestemmes med ligningen $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$, hvor v isoleres.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53.13^\circ$$

Maple

```
with(Gym):  
invCos(3/5)
```

53.13010235

GeoGebra

```
cos-1(3/5) Det er en knap i f(x)  
→ 53.13°
```

■ **Eksempel 111** Vinklen mellem en vektor $\vec{a} = \langle t, 4 \rangle$ og 1. akse er 30° .

Bestem værdien af t .

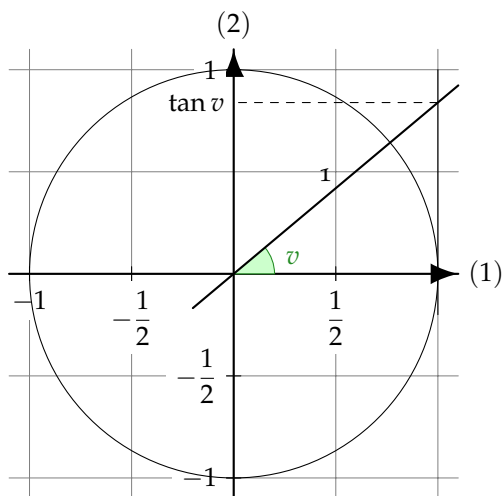
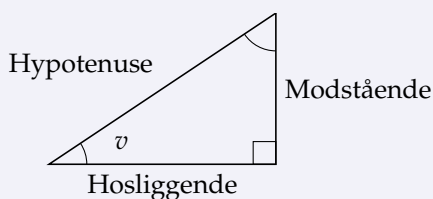
Først anvendes ligningen $a_y = |\vec{a}| \cdot \sin(v)$. Ved at indsætte de værdier der er kendt fremkommer følgende ligning.

$$4 = \sqrt{4^2 + t^2} \cdot \sin(30^\circ)$$

Denne ligning løses i et værktøjsprogram og løsningerne til ligningen er $t = 6.928$ og $t = -6.928$. ■

Sætning 41 — Tangens. For den retvinklede trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\tan v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hosliggende}}$$



Dette kan bruges til at bestemme vinklen mellem en vektor $\vec{a}$ og 1.aksen. Den første komponent i vektoren er den hosliggende side og andenkomponenten er den modstående side.

$$\tan v = \frac{a_y}{a_x}$$

■ **Eksempel 112** Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og 1. akse.

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^\circ$$

Maple

```
with(Gym):  
invTan(2/3)
```

33.69006752

GeoGebra

```
tan-1(2/3) Det er en knap i f(x)  
→ 33.69°
```

■
Øvelse 147 Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1. akse.

a) $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, 4 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 0, 1 \rangle$.

d) $\vec{a} = \langle 3, 0 \rangle$.

e) $\vec{a} = \langle -4, 2 \rangle$.

f) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$.

Øvelse 148 Bestem t så vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1. akse er 40° .

a) $\vec{a} = \langle t, 2 \rangle$.

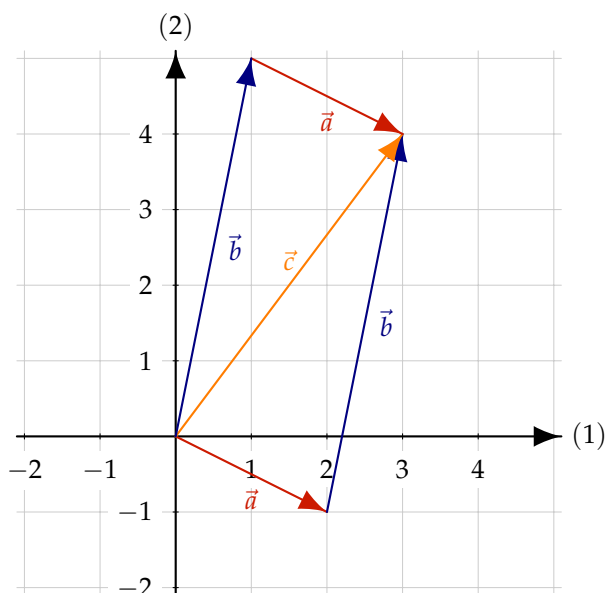
b) $\vec{a} = \langle -1, t \rangle$.

7.2.1 Vektoraddition

To vektorer kan lægges sammen og resultatet, kaldes den resulterende vektor.

De to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ lægges sammen og den resulterende vektor bliver $\vec{c}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

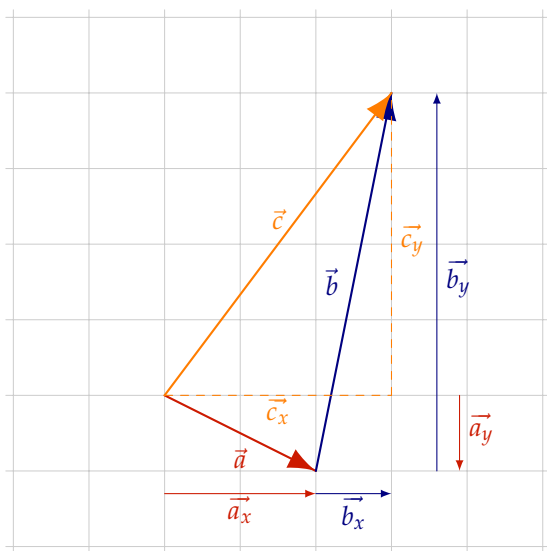


Bemærk at det giver samme resultat, om det er $\vec{a} + \vec{b}$ eller $\vec{b} + \vec{a}$.

Definition 34 — Vektor addition. Summen af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ er summen af størrelsen af hhv. x - og y -komponenterne.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$



Bemærk at $\vec{a}_y$ og $\vec{b}_y$ har modsat fortegn i eksemplet, og derfor peger pilene i hver sin retning.

■ **Eksempel 113** Bestem summen af $\vec{a} = \langle 1, -3 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -5, 7 \rangle$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -3 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

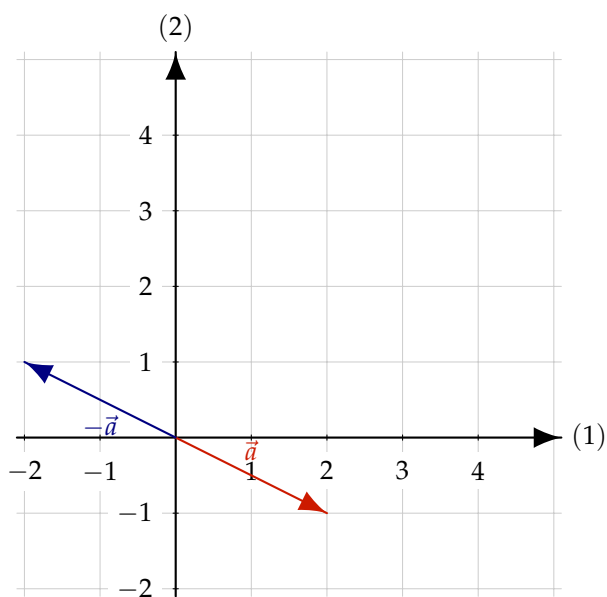
■

Øvelse 149 Bestem summen af de to vektorer.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle -3, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 3, 2 \rangle$.

En vektor som har samme størrelse som $\vec{a}$, men modsat retning betegnes $-\vec{a}$.



Definition 35 — Vektor subtraktion. Ved beregning af $\vec{a} - \vec{b}$ forstås

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$

■ **Eksempel 114** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestem $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 \\ -2 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Øvelse 150 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

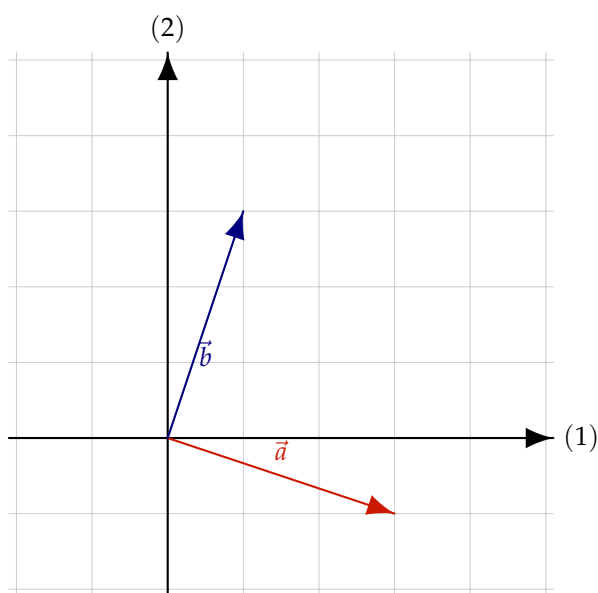
Bestem $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Øvelse 151 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestem $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} - \vec{b}$.

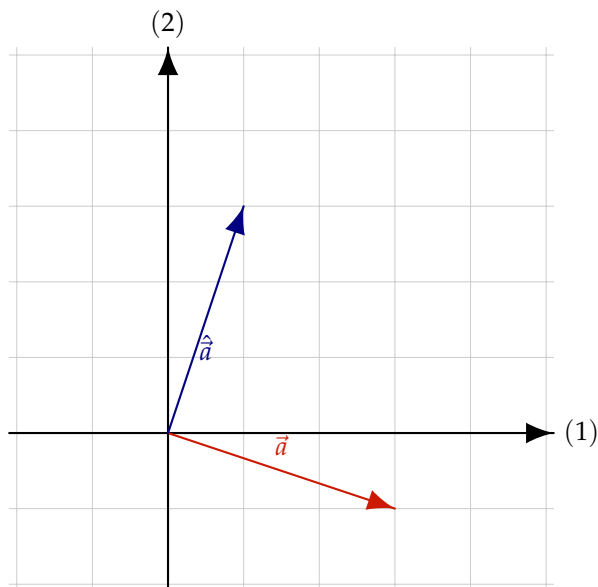
Definition 36 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis vinklen mellem dem er 90° .



En vektor har flere vektorer der er ortogonale til dem, men fælles for dem er, at de alle er proportionale. Det vil sige, at hvis $\vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$, så vil alle ortogonale vektorer til $\vec{a}$ kunne skrives som $k \cdot \vec{b}$ hvor k er en skalar.

Definition 37 En **tværvektor** til en vektor $\vec{a}$ er en vektor som står vinkelret på $\vec{a}$ drejet i mod uret retning. En tværvektor kaldes $\hat{a}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$



Definition 38 — Skalarprodukt. Skalarproduktet mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Sætning 42 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis og kun hvis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

■ **Bevis** To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale hvis og kun hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Deres skalarprodukt er derfor

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot k \cdot (-a_y) + a_y \cdot k \cdot a_x$$



Video med bevis for formler til beregning af vinklen mellem to vektorer.

Ved reduktion fås at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -k \cdot a_x \cdot a_y + k \cdot a_x \cdot a_y$$

Det ses nu tydeligt at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

■ **Eksempel 115** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -t \\ 12 \end{pmatrix}$$

Bestem t så de to vektorer er ortogonale.

Først beregnes deres skalarprodukt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t \cdot (-t) + 3 \cdot 12$$

Skalarproduktet skal være 0 for at vektorerne er ortogonale og derfor er det følgende ligning der skal løses.

$$0 = -2t^2 + 36$$

$t = \sqrt{18}$ og $t = -\sqrt{18}$ er begge løsninger til ligningen. ■

Sætning 43 Vinklen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som ikke er 0, opfylder at

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

■ **Bevis** I følge definitionen af skalarproduktet er

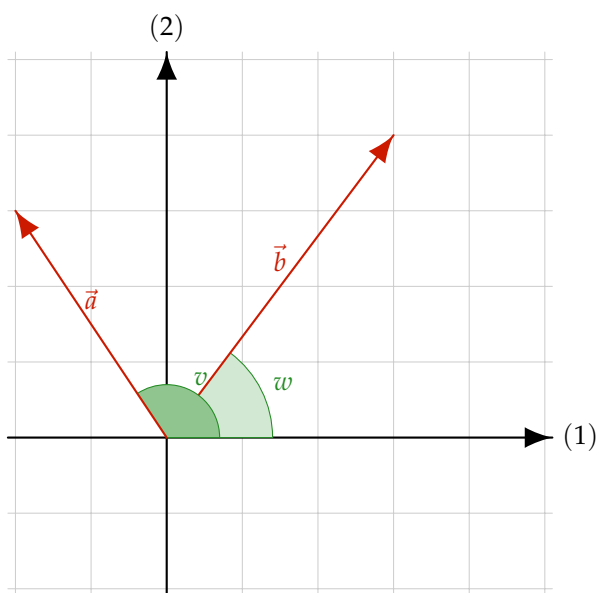
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v \rangle$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

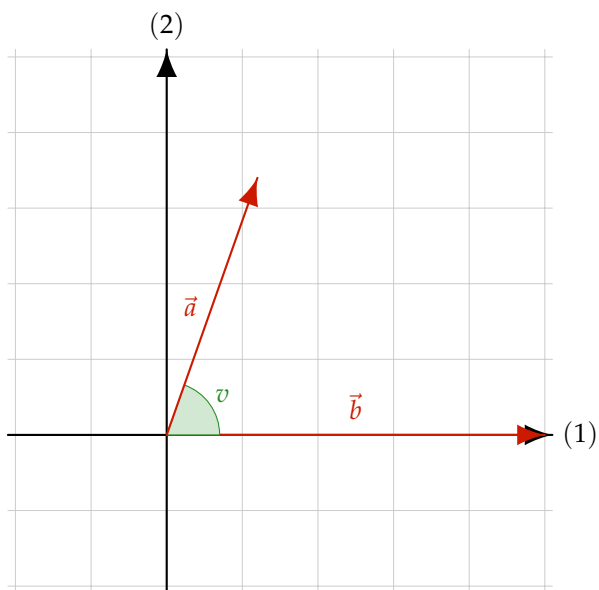
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w$$



Opgaver hvor t skal bestemmes så to vektorer er ortogonale.



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. akse.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0$$

Ved at se på enhedscirklen indses, at $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

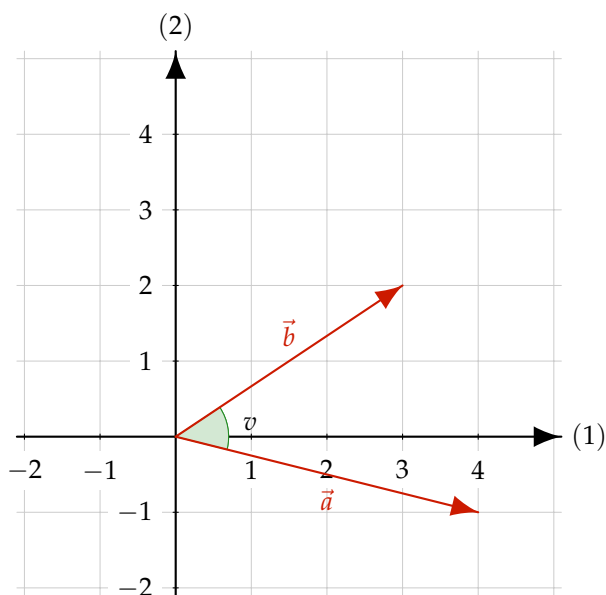
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

■ **Eksempel 116** Bestem vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



For at udregne vinklen bruges formelen

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

Tallene fra de to vektorer indsættes.

$$\frac{4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot |\sqrt{3^2 + 2^2}|} = \cos v$$

Efter udregning giver det

$$\frac{10}{\sqrt{17} \cdot |\sqrt{13}|} = \cos v$$

Ved omregning til decimaltal

$$0.6726727940 = \cos v$$

Det giver en vinkel på 47.7° . ■

I Maple vil udregningen af vinklen kunne gøres med kommandoen vinkel.

Maple

```
with(Gym):  
vinkel(<4, -1>, <3, 2>)
```

47.72631098

I GeoGebra ville udregningen af vinklen kunne gøres med kommandoen vinkel.

GeoGebra

Først defineres de to vektorer.

```
a=Vektor((4, -1))
```

```
b=Vektor((3, 2))
```

Nu kan vinklen beregnes.

```
Vinkel(a, b)
```

```
→ 47.73°
```

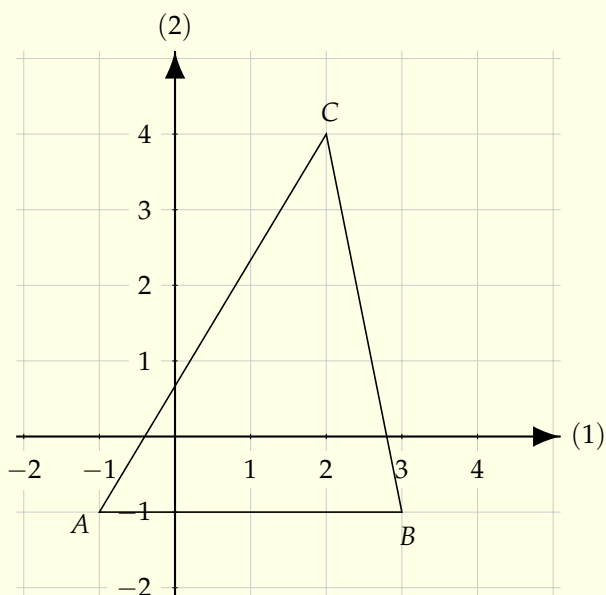
Øvelse 152 Bestem vinklen mellem de to vektorer.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$.

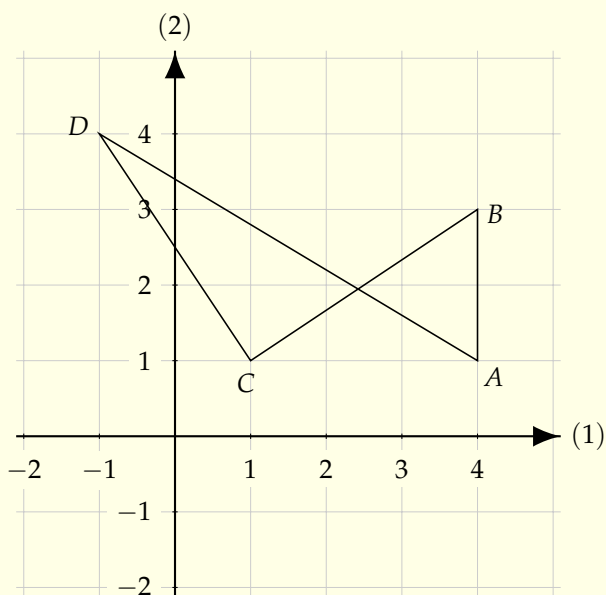
b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$.

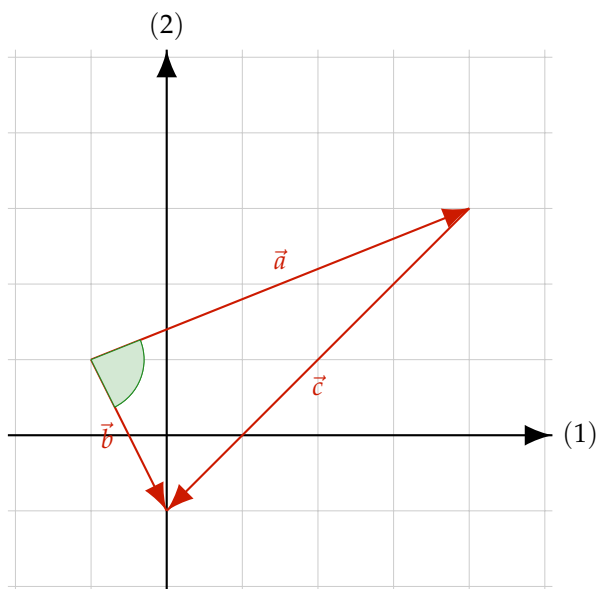
Øvelse 153 Bestem de tre vinkler i figuren.



Øvelse 154 Bestem de seks indre vinkler i figuren.



I nogle tilfælde kendes kun længden af vektorerne. Når sådanne problemstillinger kommer, kan ovenstående formel ikke bruges. Det er nødvendigt med en formel der kun gør brug af længderne af vektorerne. Se på følgende problemstilling. Tre vektorer udgør siderne i en trekant ABC .



Bemærk at

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Ved at kvadrere begge sider fås at

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{c}^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}^2$$

Fra den tidligere sætning haves at $|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{a} \cdot \vec{b}$, dette indsættes i ligningen.

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{c}^2$$

Bemærk at $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Dette kan formuleres i følgende sætning.

Sætning 44 — Cosinusrelationerne. I trekanten ABC hvor a , b og c er længden af de tre sider og A , B og C er de tre vinkler i trekanten, gælder følgende

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

■ **Eksempel 117** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 5$, $|BC| = 7$ og $|AC| = 9$, bestem vinklen mellem siderne AB og BC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos v = 9^2$$

Ved at løse denne ligning fås vinklen til 95.7° . ■

■ **Eksempel 118** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ og vinklen mellem dem er 40° .

Bestem længden af siden AC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 40^\circ = |AC|^2$$

Ved at udregne dette fås $|AC|$ til 3.9. ■

I Maple kan denne type problemstillinger løses med kommandoen `trekantsolve`

Maple

```
with(Gym):
```

```
trekantsolve(c = 6, a = 4, B = 40, "ABC")
```

```
{A = 41.21140419, C = 98.78859577, b = 3.902546187}
```

For at løse problemstillinger hvor to vinkler og én side er kendt som dette



Opgaver hvor vinkler i en trekant, hvor tre sider er kendt, skal bestemmes.



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant, hvor to sider og en mellemliggende vinkel er kendt.

Maple

```
with(Gym):
trekantsolve(c = 7, A = 25, B = 40, "ABC");

{C = 115.0000000, a = 3.264153603, b = 4.964663589}
```

bruger Maple følgende sætning.

Sætning 45 For to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ gælder at

$$\frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

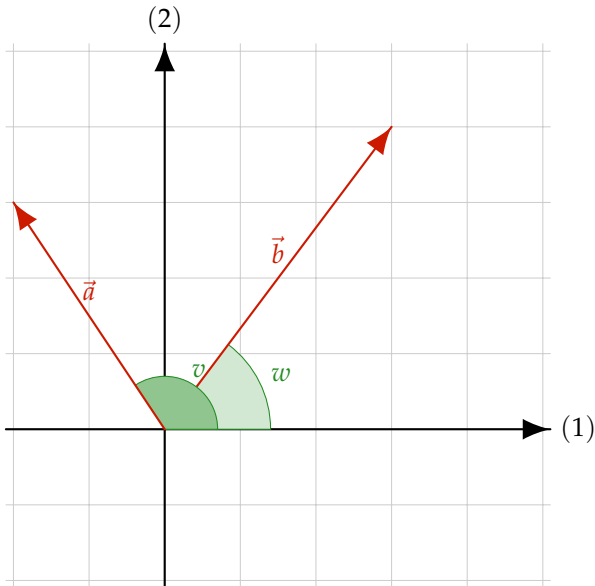
hvor v er vinklen mellem de to vektorer.

■ **Bevis** Ifølge definitionen af determinanten er

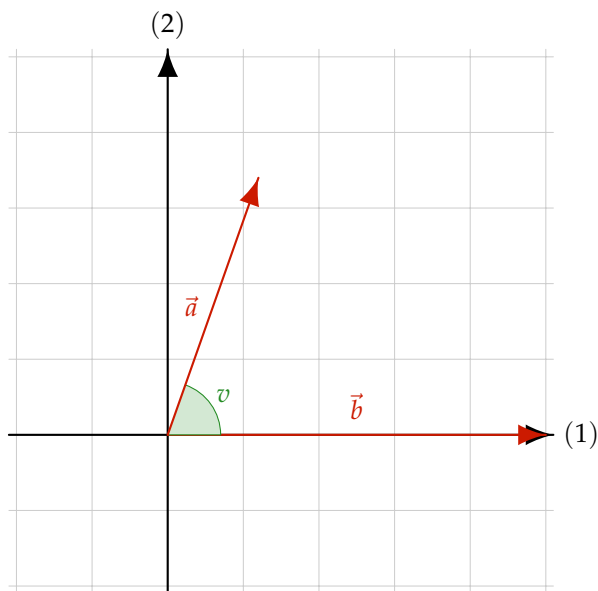
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v \rangle$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w$$



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. akse.



$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0$$

Ved at se på enhedscirklen ses, at $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

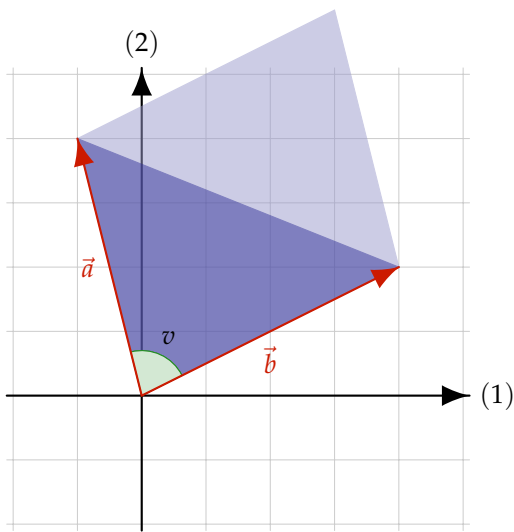
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$$

Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

■

To vektorer vil 'udspænde' et areal, som enten kan være en trekant eller et parallelogram. Arealet af parallelogrammet er dobbelt så stort som arealet af trekanten.

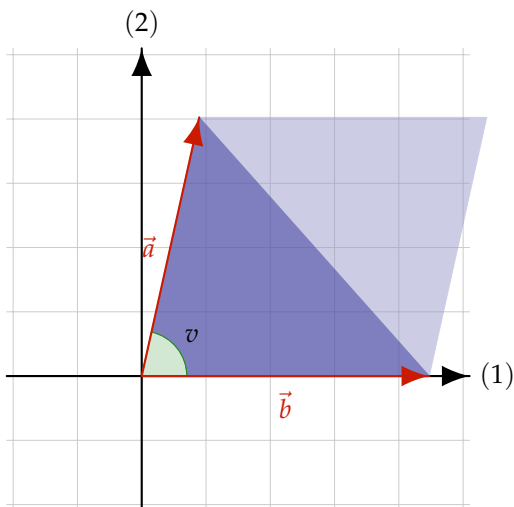


Sætning 46 For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder at

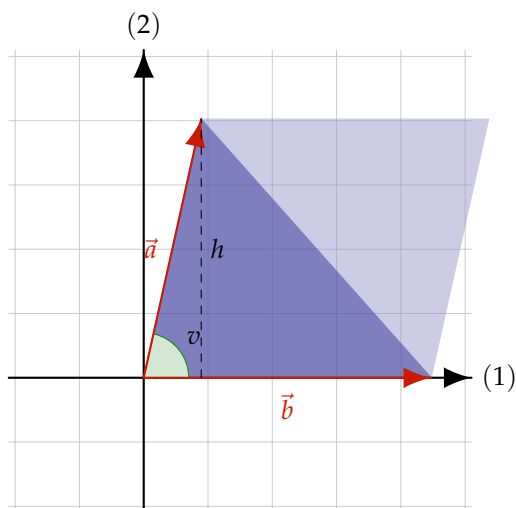
$$P_{\text{Areal}} = |\det(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Hvor P_{Areal} er arealet af det parallelogram de to vektorer udspænder.

■ **Bevis** Som det tidligere er set drejes koordinatsystemet således, at en af vektorerne er parallel med 1.aksen.



Derefter bestemmes højden i parallelogrammet.



Arealet af parallelogrammet er højden gange længden af grundlinjen. Højden er y -komponenten af $\vec{a}$ der er $|\vec{a}| \cdot \sin v$ og længden grundlinjen er $|\vec{b}|$. Derfor bliver arealet af parallelogrammet

$$P_{\text{Areal}} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$$

Denne sætning kan blandt andet bruges til at regne følgende problemstilling.

■ **Eksempel 119 — To sider og et areal.** En stumpvinklet trekant har to sider med længderne 4 og 9, og arealet af trekanten er 15.

Bestem vinklen mellem de to sider?

Tallene fra opgaven sætte ind i formlen $P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$.

$$15 = 1/2 \cdot 4 \cdot 9 \sin v$$

Dette giver en vinkel på 56.44° , men da trekanten er stumpvinklet er vinklen $180 - v$. Så vinklen er 123.56° .

I Maple vil ligninger kunne løses med følgende kommandoer



Opgaver hvor areal af parallelogram skal bestemmes



Opgaver hvor arealet udspændt af to vektorer er kendt og en parameter t skal bestemmes.

Maple

```
with(Gym):  
solve(15 = 9*(1/2*4)*Sin(v))  
  
56.44269024  
  
180-56.44269024  
  
123.5573098
```

Sætningen kan også bruges til at beregne arealet af det parallellogram som to vektorer udspænder.

■ **Eksempel 120 — Areal udspændt af to vektorer.** Lad to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestem arealet af det parallellogram som vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder.

$$|\det(\vec{a}, \vec{b})| = |4 \cdot 5 - 2 \cdot 1| = 20 - 2 = 18$$

I Maple kan kommandoen `arealP` bruges til at beregne arealet af parallellogrammet. Hvis det er arealet af trekanten, der skal bestemmes, skal dette areal deles med 2.

Maple

```
with(Gym):  
arealP(<4, 1>, <2, 5>)  
  
18
```

I GeoGebra skal de to vektorer skrive i en matrix. Det betyder at

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

skal skrive på formen

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

I GeoGebra gøres dette på følgende måde



Video hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.



Opgaver hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.



Opgaver hvor arealer udspændt af to vektorer skal bestemmes.



Video hvor jeg forklarer hvordan arealet udspændt mellem to vektorer beregnes.

GeoGebra
 $M = \{\{4, 2\}, \{1, 5\}\}$

Determinant (M)

 $\rightarrow 18$

Arealet af parallellogrammet er 18. ■

Sætning 46 kan bruges til at vise følgende

Sætning 47 — Sinusrelationerne. For en trekant ABC gælder der, at

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

■ **Bevis** Fra ovenstående sætning haves, at arealet af en trekant kan udregnes som produktet af to sidelængder og sinus til deres mellemliggende vinkel delt med 2. Dette er fordi der er tre hjørner, der beregnes på tre måder, der alle er lig hinanden - fordi det er arealet af den samme trekant, der beregnes.

$$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A$$

Ligningerne kan reduceres ved at dele med en halv gange produktet af alle tre sidelængder.

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A}{1/2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}$$

Efter redueringen fås udtrykket

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{\sin C}{|\vec{c}|} = \frac{\sin B}{|\vec{b}|} = \frac{\sin A}{|\vec{a}|}$$

Denne sætning giver mulighed for at beregne problemstillinger hvor to eller tre vinkler er kendt. ■

■ **Eksempel 121 — To vinkler og en side.** En trekant har en side AB med længden 28 og to tilstødende vinkler på $A = 50^\circ$ og $B = 60^\circ$.

Bestem længden af siden BC .

Først bestemmes den modstående vinkel til siden AB , det er vinkel C .

$$\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant hvor to sider og en ikke mellemliggende vinkel er kendt.

Nu kan længden af $BC = a$ bestemmes med formelen $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$.

$$\frac{\sin 70^\circ}{28} = \frac{\sin 50^\circ}{a}$$

Det giver en sidelængde af BC på 22.8. ■

■ **Eksempel 122 — Tre vinkler og arealet.** I en trekant er de tre vinkler $A = 50^\circ$, $B = 100^\circ$ og $C = 30^\circ$. Arealet af trekanten er 25.

Bestem længden af de tre sider.

Tallene sættes ind i de tre ligninger

$$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin C = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin B = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin A$$

Det giver

$$25 = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 30^\circ = 1/2 |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 100^\circ = 1/2 |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin 50^\circ$$

Løsningen til dette ligningssystem er $a = 8.8$, $b = 11.3$ og $c = 5.8$.

■

I Maple kan dette ligningssystem løses med kommandoen solve. Bemærk at der også er en løsning hvor a , b og c er negative, men dette giver ikke mening geometrisk og derfor ses bort fra denne løsning.

Maple

with(Gym):

```
solve([25 = (1/2)*a*b*Sin(30), 25 = (1/2)*a*c*Sin(100),
25 = (1/2)*b*c*Sin(50)])
```

$\{a = 8.819648028, b = 11.33832095, c = 5.756616412\},$

$\{a = -8.819648028, b = -11.33832095, c = -5.756616412\}$



Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant, hvor én side og to vinkler er kendt.

Sætning 48 Vektor $\vec{a}$ projiceret på vektor $\vec{b}$ giver projektionsvek-

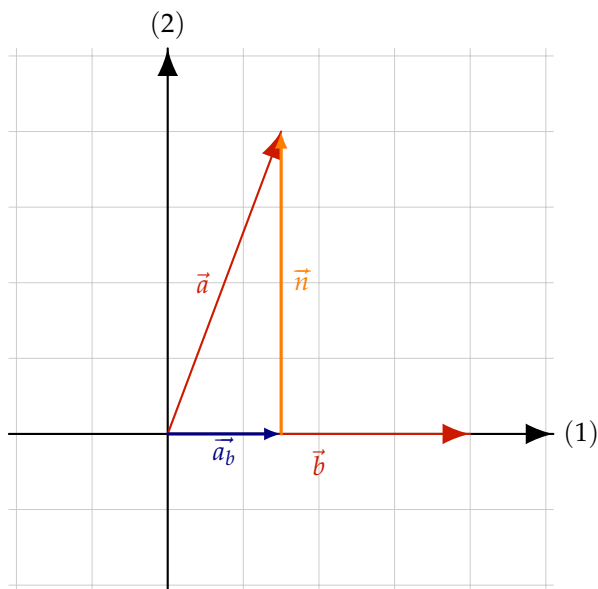
toren $\vec{a}_b$, som er givet ved formlen

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$



Video med bevis for formlen for projektion af en vektor på en anden vektor.

■ **Bevis** Først bemærkes at $\vec{a}_b = k \cdot \vec{b}$. Som tidligere anbringes den ene vektor for syns skyld parallelt med 1. akse.



Af tegningen ses det, at

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{n}$$

Ved at gange med $\vec{b}$ fås, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b} + \vec{n} \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{b}$ og $\vec{n}$ er ortogonale, er deres skalarprodukt 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{a}_b = k \cdot \vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot |\vec{b}|^2$$

Herefter divideres med $|\vec{b}|^2$.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = k$$

Deraf følger at

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

■

■ **Eksempel 123** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Tallene indsættes i formelen $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a}_b = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot (-3)}{4^2 + (-3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{20 - 3}{16 + 9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{17}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det giver en projektionsvektor $\vec{a}_b = \langle 2.72, -2.04 \rangle$.

■

I Maple kan problemstillingen løses med kommandoen proj.

Maple : Projektionsvektor.

with(Gym):

proj(<5,1>,<4, -3.>)

$$\begin{pmatrix} 2.72 \\ -2.04 \end{pmatrix}$$

I GeoGebra er det lidt mere besværligt.

GeoGebra : Projektion.

Først defineres det punkt (vektor) som skal projekteres.

A=(5,1)

Derefter defineres den vektor som der skal projekteres på.

b=Vektor((4,-3))

Derefter konstrueres en linje, der går gennem (0,0) og har vektor $\vec{b}$

som retningsvektor.

$g: \text{Linje}((0,0), b)$

$$\rightarrow 3x + 4y = 0$$

Derefter konstrueres en linje, der går gennem A og står vinkelret på $\vec{b}$.

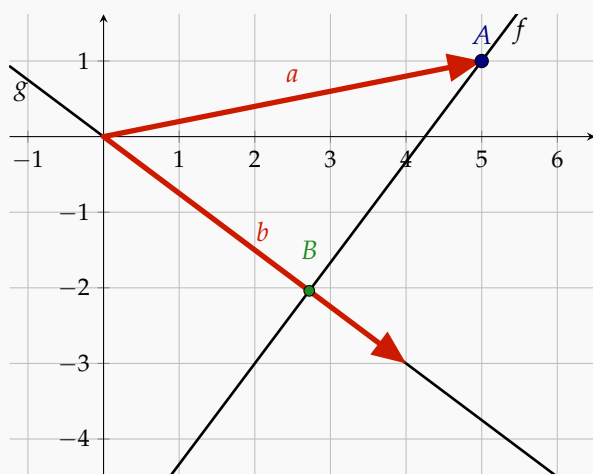
$f: \text{Vinkelret}(A, b)$

$$\rightarrow -4x + 3y = -17$$

Projektion af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$ er skæringspunktet mellem linjerne f og g .

$B = \text{Skæring}(f, g)$

$$\rightarrow (2.72, -2.04)$$



Øvelse 155 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Beregn længden af $\vec{a}$.
- Beregn længden af $\vec{b}$.
- Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$.
- Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$.
- Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Øvelse 156 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Beregn længden af $\vec{b}$ når $t = 4$.
- b) Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når $t = 3$.
- c) Beregn værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.
- d) Beregn arealet af det parallelogram som $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder når $t = 2$.
- e) Beregn værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lige lange.
- f) Beregn værdierne af t , så $\vec{a}$ er tre gang så lang som $\vec{b}$.
- g) Bestem værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.
- h) Beregn værdien af t , så arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 42.

8

Analytisk geometri

I analytisk geometri gennemfører vi en række analyser af forskellige geometriske problemstillinger. De geometriske problemstillinger tager udgangspunkt i nogle generelle problemer som man søger en løsning på fordi de opstår i mange situationer. I dette kapitel behandles tre typer af geometriske objekter. Punkter, rette linjer og cirkler.

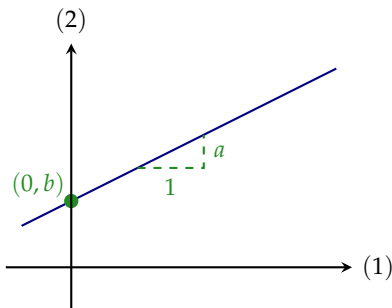
8.1 Punkter og rette linjer

Definition 39 Et punkt i planen er defineret som det der ikke kan deles, i modsætning til linjestykker som kan deles. Et punkt er givet ved dets koordinater (x, y) .

I modsætningen til en linje som har uendelig udstrækning, så er et linjestykke en linje med en endelig udstrækning eller længde.

Sætning 49 — Regneforskrift for ret linje. Ligningen for en ret linje l gennem punktet $P(0, b)$ med hældningskoefficient a har regneforskriften

$$l : y = a \cdot x + b$$



Bemærk, at der ikke er tale om en definition men en sætning. Prøv om du kan vise, at det er rigtigt. Husk på at der er to veje at vise.

Som repetition af en sætning til at bestemme a og b i den rette linje, når to punkter er kendt.

Sætning 50 — Hældningskoefficient og skæring med 2.aksen for ret linje.

Hældningskoefficienten a for linjen l gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ kan beregnes med formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

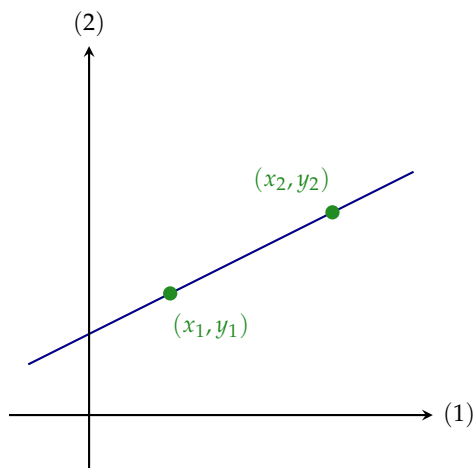
Skæringen med y -aksen $(0, b)$ kan beregnes med formlen

$$b = y_i - a \cdot x_i$$

hvor $i = 1, 2$

Ligningen for linjen l gennem punktet $P(x_1, y_1)$ med hældningskoefficienten a kan beregnes med formlen

$$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$$



Den sidste del af sætningen er meget brugbar i nogle typer af opgaver.

■ **Eksempel 124** En ret linje l går gennem punkter $(3, 4)$ og har hældningen 2.

a) Bestem en ligning for den rette linje l .

Tallene indsættes i formlen.

$$y = 2(x - 3) + 4$$

Parentesen ganges ud.

$$y = 2x - 6 + 4$$

Ligningen reduceres.

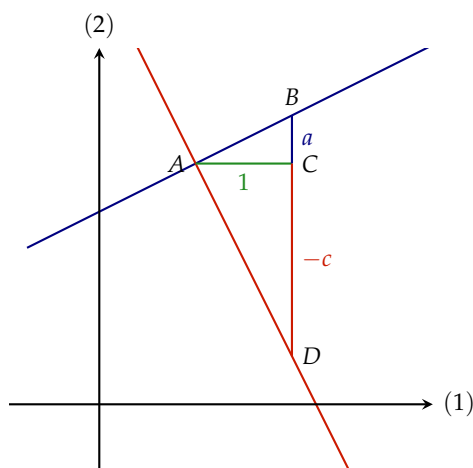
$$y = 2x - 2$$

■

Sætning 51 — Ortogonale linjer. To linjer er ortogonale / står vinkelret på hinanden, hvis produktet af deres hældningskoefficienter er -1 .



Bevis for sætningen for ortogonale linjer.



■ **Bevis** De to trekanter ABC og ACD er ensvinklede da

$$\angle CAB + \angle B = 90^\circ$$

og

$$\angle CAB + \angle CAD = 90^\circ$$

fordi så vil

$$\angle CAB + \angle B = \angle CAB + \angle CAD$$

og ved at trække $\angle CAB$ fra på begge sider fås at

$$\angle B = \angle CAD$$

Og da $\angle C$ i begge trekanter er ret, så er alle vinklerne i de to trekanter ens. Vi har nu vist at trekanterne ABC og ACD er ensvinklede. Da de to trekanter er ens vil

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{-c}$$

og ved at gange med c på begge sider af lighedstegnet fås at

$$c \cdot \frac{a}{1} = c \cdot \frac{1}{-c}$$

hvilket kan reduceres til

$$a \cdot c = -1$$

som ønsket. ■

Sætningen kan bruges i to tilfælde. 1) Når en ortogonal linje skal bestemmes. 2) Når det skal afgøres om til linjer er ortogonale.

■ **Eksempel 125** En linje er givet ved

$$l : y = \frac{1}{3}x + 4$$

- a) Bestem en ligning for en ret linje m , der er ortogonal på l og går gennem punktet $(5, -2)$

Da m er ortogonal på l , er hældningen på m -3 fordi

$$-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

og da m skal gå gennem punktet $(5, -2)$ bliver ligningen

$$y = -3(x - 5) - 2$$

Ved at gange parentesens ud fås, at

$$y = -3x + 15 - 2$$

Ved at reducerer.

$$y = -3x + 13$$

■

■ **Eksempel 126** To linjer er givet ved

$$l: 3x + y - 2 = 0$$

$$m: x - 2y + 4 = 0$$

a) Afgør om l og m er ortogonale.

Først omskrives l og m til formen $y = ax + b$.

$$l: 3x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 2$$

$$m: x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow -2y = -x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

Da

$$-3 \cdot \frac{1}{2} \neq -1$$

er de to linjer ikke ortogonale. ■

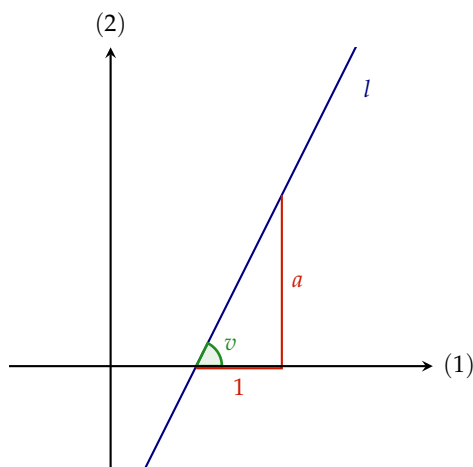
Sætning 52 — Lodret linje. Ligning for en lodret linje gennem punktet $P(k, 0)$ er

$$x = k$$

I modsætning til funktioner kan linjer godt være lodrette. En lodret linje er parallel med 2.aksen og står vinkelret på 1.aksen.

Sætning 53 — Hældningsvinklen med 1.aksen. Hældningsvinklen v er vinklen fra x -aksen til l i positiv omløbsretning er

$$v = \tan^{-1}(a) = \text{invTan}(a)$$



■ **Bevis** Der er en retvinklet trekant med de tre sider l , 1.aksen og den lodrette linje, som er én længere ude af 1.aksen end skæringspunktet mellem l og 1.aksen. Højden i den retvinklede trekant er a . Derfor bliver vinklen $\tan(v) = \frac{a}{1} = a$. ■

■ **Eksempel 127 — Hældningskoefficient og vinkel.** En ret linje går gennem punktet $(4, 8)$ og har hældningsvinklen 50° .

a) Bestem en ligning for linjen.

Maple

with(Gym):

Tan(50)

1.191753593

Linjen har hældningskoefficienten 1.19. Ligningen for linjen bliver

$$y = 1.191753593(x - 4) + 8$$

GeoGebra

Først defineres punktet

$P = (4, 8)$

Hældningen af linje beregnes.

$a = \tan(50^\circ)$

$\rightarrow a = 1.19$

Forskriften for l opstilles

$l : y = a \cdot (x - 4) + 8$

$\rightarrow y = 1.19x + 3.23$

■ **Eksempel 128 — Hældningskoefficient og vinkel.** En ret linje er givet ved forskriften $y = -2x + 4$.

a) Bestem hældningsvinklen for linjen.

Maple

```
with(Gym):  
invTan(-2)
```

-63.43494883

Linjen har hældningsvinklen $180^\circ - 63.44^\circ = 116.56^\circ$.

GeoGebra

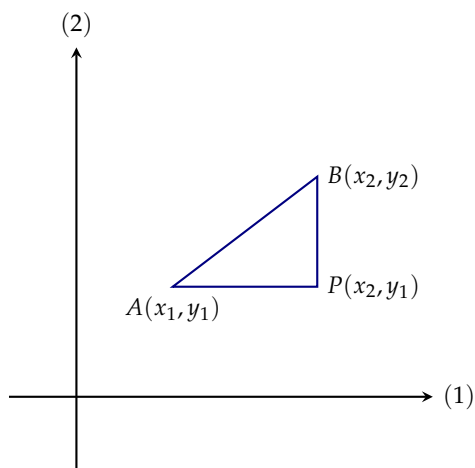
Hældningen omregnes til en vinkel med $\tan^{-1}$

$a = \tan^{-1}(-2)$

$\rightarrow -63.43^\circ$

■ **Sætning 54 — Afstand mellem to punkter.** Afstanden mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan beregnes med formlen

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



■ **Bevis** Da liniestykkerne AP , PB og AB udgør en retvinklet tre-

kant, er det muligt at bruge Pythagoras sætning på denne trekant. Gør man de får man følgende

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$$

Som det ses på tegningen er $|AP| = x_2 - x_1$ og $|PB| = y_2 - y_1$, ved at indsætte dette i ovenstående ligning fås følgende resultat

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

■ **Eksempel 129** Bestem afstanden mellem de to punkter $A(-2,5)$ og $B(4,3)$.

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(4 - (-2))^2 + (3 - 5)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \\ &\approx 6.32 \end{aligned}$$

GeoGebra : Afstand mellem to punkter.

$A = (-2, 5)$

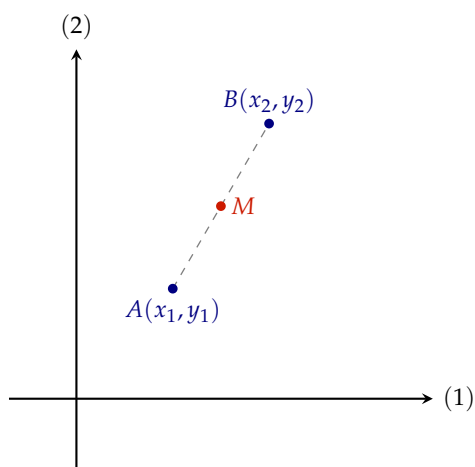
$B = (4, 3)$

Afstand(A,B)

→ 6.32

Sætning 55 — Midtpunkt mellem to punkter. Midtpunktet M mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan beregnes med formlen

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



■ **Eksempel 130** Bestem midtpunktet mellem de to punkter $A(-2,5)$ og $B(4,3)$.

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+3}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{8}{2} \right) \\ &= (1,4) \end{aligned}$$

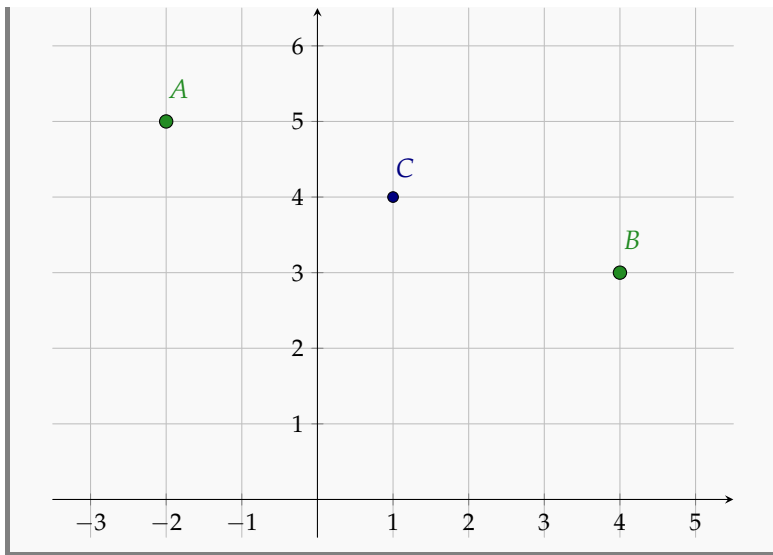
GeoGebra : Midtpunkt mellem to punkter.

$A=(-2,5)$

$B=(4,3)$

$C=\text{Midtpunkt}(A,B)$

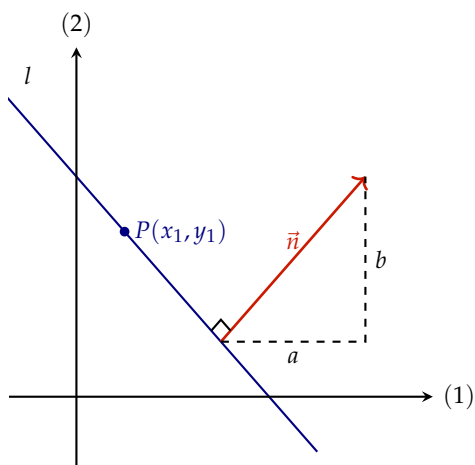
$\rightarrow (1,4)$



Definition 40 — Normalvektor. En normalvektor er en vektor som står vinkelret på det, som den er normal til.

Sætning 56 — Ret linje ud fra normalvektor og punkt. Ligningen for linjen l gennem punktet $P(x_1, y_1)$ med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ har regneforskriften

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) = 0$$



■ **Eksempel 131** En ret linje l er givet ved

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem en ligning for den rette linje, som står vinkelret på l og går gennem punktet $P(-5, 7)$.

Da retningsvektoren for l er normalvektor for den rette linje, som står vinkelret på l , bliver ligningen for den rette linje

$$4 \cdot (x - (-5)) + (-2)(y - 7) = 0$$

Ved at gange parenteserne ud fås at

$$4x + 20 - 2y + 14 = 0$$

Ved at reducere fås at

$$4x - 2y + 34 = 0$$

■

Sætning 57 — Parameterfremstillingen for ret linje ud fra retningsvektor og punkt. Parameterfremstillingen for linjen l gennem punktet

$P(p_1, p_2)$ med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ har regneforskriften

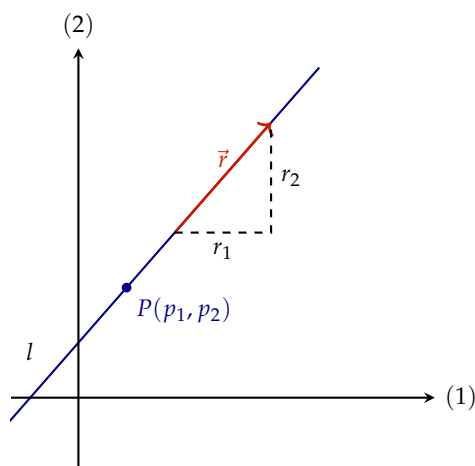
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

linjen l vil have ligningen

$$y = \frac{r_2}{r_1}x + p_2 - \frac{r_2}{r_1} \cdot p_1$$

Parameterfremstillingen for en linje med ligningen $y = ax + b$ kan være

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$



■ **Eksempel 132 — Omskrivning af formler for ret linje.** Linjen med ligningen

$$6x - 3y + 9 = 0$$

kan omskrives til en linje på formen $y = ax + b$ ved at isolerer y .

$$6x - 3y + 9 = 0 \xRightarrow{+3y} 3y = 6x + 9 \xRightarrow{/3} y = 2x + 3$$

Parameterfremstillingen for en linje med ligningen $y = ax + b$ kan være

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

I dette tilfælde så giver det parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

■

■ **Eksempel 133 — Linje gennem to punkter.** To punkter er givet ved $A(-1,4)$ og $B(1,3)$. Linjen gennem A og B kaldes l . En anden linje m er givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestem en parameterfremstilling for l og bestem skæringspunktet mellem l og m .

GeoGebra

Først defineres de to punkter.

A = (-1,4)

B = (1,3)

Så konstrueres l

Linje(A,B)

→ $X = (-1,4) + \lambda(2,-1)$

Så defineres m.

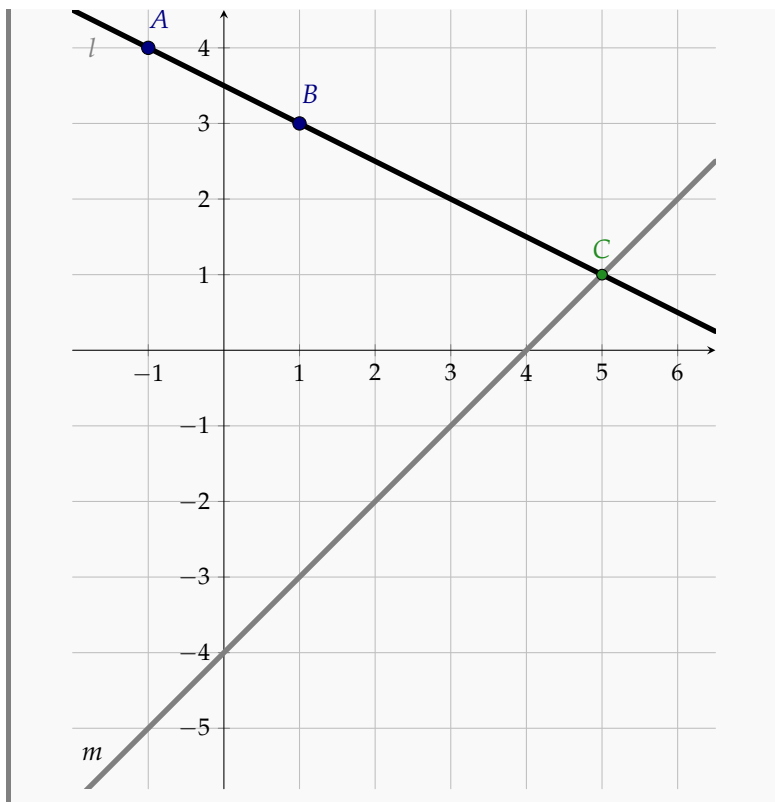
m: $X = (2,-2) + \lambda \cdot (1,1)$

→ $X = (0,-4) + \lambda(1,1)$

Så konstrueres skæringspunktet mellem l og m.

C = Skæring(l,m)

→ (5,1)



En parameterfremstilling for l er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og skæringspunktet mellem l og m er $(5, 1)$.

■

Øvelse 157 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.
- Bestem koordinatsættet for punktet på linjen l , når parameterværdien er $t = 2$.

c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 158 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem hældningskoefficienten for l .

Øvelse 159 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en linje m er givet ved ligningen

$$3x - y + 3 = 0$$

a) Afgør om de to linjer er parallelle.

b) Afgør om de to linjer er ortogonale.

Øvelse 160 En linje l er givet ved et punktet $P(3,1)$ og en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

b) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 161 En linje l er givet ved et punktet $P(3,1)$ og en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

b) Opskriv en ligning for linjen l .

c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 162 En linje l er givet ved et punkterne $P(3, 1)$ og $Q(6, 9)$.

a) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

Øvelse 163 En linje l er givet ved et punkterne $P(-3, 2)$ og $Q(1, 3)$.

a) Bestem en ligning for linjen l på formen $ax + by + c = 0$.

b) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 164 En linje l har hældningskoefficient -1 og går gennem punktet $(3, 5)$.

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 165 En linje l er givet ved ligningen

$$x - 3y - 2 = 0$$

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 166 En linje l er givet ved ligningen

$$y = 3 \cdot (x - 2) + 3$$

a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.

b) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .

- c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 167 En linje l er givet ved ligningen

$$3 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y + 5) = 0$$

- a) Beskriv linjen l ved et punkt og en retningsvektor.
- b) Opskriv en parameterfremstilling for linjen l .
- c) Tegn linjen l i et koordinatsystem.

Øvelse 168 En linje l er givet ved ligningen

$$y = x + 2$$

- a) Bestem en ligning for den linje, der går gennem punktet $(4, 1)$ og er parallel med l .
- b) Bestem en ligning for den linje, der går gennem punktet $(4, 1)$ og er vinkelret på l .

Øvelse 169 To linjer er givet ved

$$l : y = 3x + 1$$

$$m : x - 3y = 2$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m .

Øvelse 170 To linjer er givet ved

$$l : y = 3x + 1$$

$$m : x - 3y = 2$$

- a) Bestem vinklen mellem l og m .

Øvelse 171 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

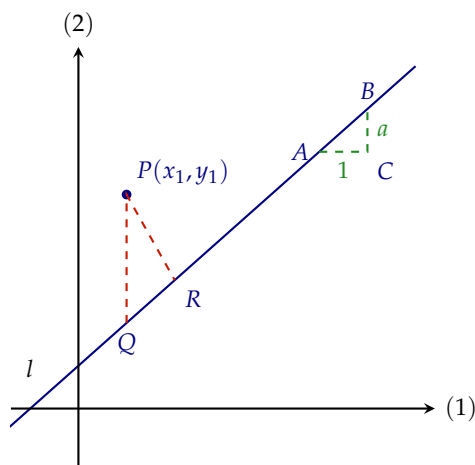
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Bestem en ligning for den linje m , der går gennem punktet $(0,1)$ og er ortogonal på l .
- Bestem skæringspunktet mellem l og m .

Sætning 58 — Afstand mellem punkt og linje med forskriften $y = ax + b$.

Afstanden fra punkt $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen $y = a \cdot x + b$ er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



■ **Bevis** Da liniestykkerne PQ og CB er parallelle er $\angle Q$ og $\angle B$ ens. Og da både $\angle C$ og $\angle R$ er rette vinkler betyder det at trekanterne PQR og ABC er ensvinklede.

Da de to trekanter er ensvinklede er forholdet mellem ensliggende sider konstant. Deraf følger at

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{1}{|AB|} \quad (8.1)$$

$|PR|$ er den afstand vi ønsker at bestemme, så den vil vi kalde $\text{dist}(P, l)$ fordi der er afstanden mellem punktet P og linien l .

$|PQ|$ er den lodrette afstand mellem punktet P og linien l . Det betyder at afstanden kun afhænger af y-koordinaterne for punktet og linien når x-koordinaten er x_1 . Y-koordinaten for punktet er y_1 . Y-koordinaten for linien er $ax_1 + b$, fordi det er når x-koordinaten er x_1 og linien har forskriften $y = ax + b$ og hvis så x-koordinaten er x_1 så bliver y-koordinaten $ax_1 + b$. Derfor bliver

$$|PQ| = y_1 - (ax_1 + b) \quad (8.2)$$

Afstanden $|AB|$ er hypotenusen i en retvinklet trekant så derfor vil $|AB|^2 = 1^2 + a^2$. Derfor bliver

$$|AB| = \sqrt{a^2 + 1^2} \quad (8.3)$$

Ven nu at indsætte ligning 8.2 og 8.3 i ligning 8.1 fås at

$$\frac{\text{dist}(P, l)}{|y_1 - (ax_1 + b)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1^2}}$$

Nu ganger vi med $|y_1 - (ax_1 + b)|$ på begge sider af lighedstegnet.

$$|y_1 - (ax_1 + b)| \cdot \frac{\text{dist}(P, l)}{|y_1 - (ax_1 + b)|} = |y_1 - (ax_1 + b)| \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1^2}}$$

Og dette kan reduceres til

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|y_1 - ax_1 - b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

som ønsket. ■

■ **Eksempel 134 — Afstand fra punkt til linje.** En linje l er givet ved

$$l : y = 3x + 1$$

a) Bestem afstanden fra l til $P(2, 4)$.

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, l) &= \frac{|3 \cdot 2 + 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1}} \\ &= \frac{|6 - 3|}{\sqrt{9 + 1}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \\ &\approx 0.95 \end{aligned}$$

I GeoGebra kan opgaven løses med kommandoen Afstand.

GeoGebra

Først defineres l og P .

$$P = (2, 4)$$

$$l: y = 3x + 1$$

Derefter bestemmes afstanden mellem dem.

$$a = \text{Afstand}(P, l)$$

$$\rightarrow 0.95$$

■

Sætning 59 — Afstand mellem parallelle linjer. Afstanden mellem to parallelle rette linjer med forskriften

$$l: y = ax + b$$

$$m: y = ax + c$$

kan beregnes med formlen

$$\text{dist}(l, m) = \frac{|c - b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

■ **Bevis** Et punkt på den ene linje vælges hvor $x = 0$, her er $y = b$. Herefter bruges afstanden mellem punkt og linje

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|a \cdot 0 + c - b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|c - b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

■

Sætning 60 — Afstand mellem punkt og linje på formen $ax + by + c = 0$.

Afstanden fra punkt $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Øvelse 172 En linje l er givet ved ligningen

$$3x - 4y - 15 = 0$$

a) Bestem afstanden til punktet $(2, 1)$.

Øvelse 173 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestem afstanden til punktet $(0, 1)$.

■ **Eksempel 135 — Projektion af punkt på linje.** En ret linje l er givet ved

$$y = 2x - 3$$

a) Bestem projektionen af punktet $P(-1, 5)$ på linjen l .

GeoGebra

Først defineres linjen l og punktet P .

$$l: y = 2x - 3$$

$$P = (-1, 5)$$

Så bestemmes den vinkelrette linje på l som går gennem P .

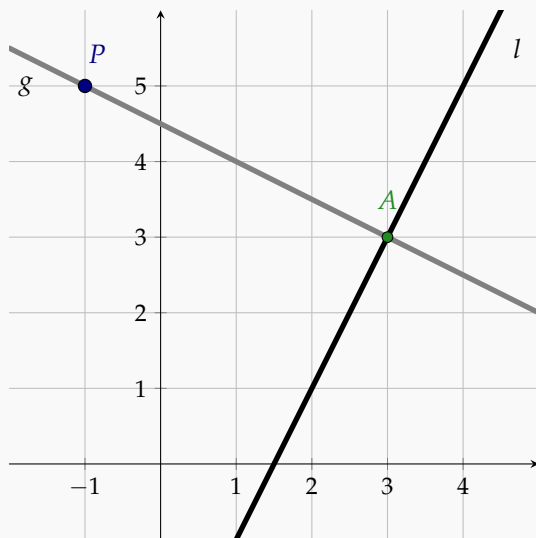
$$g: \text{Vinkelret}(P, l)$$

$$\rightarrow -0.5x + 4.5$$

Projektionen af P på l er skæringen mellem l og g .

$$A: \text{Skæring}(l, g)$$

$$\rightarrow (3, 3)$$



Projektionen af P på l er $(3, 3)$. ■

■ **Eksempel 136 — Projektion af punkt på linje.** En ret linje l er givet ved

$$y = 4x - 7$$

Bestem projektionen af punktet $P(3, 15)$ på l

Projektionen af et punkt P på en linje l er skæringspunktet

mellem linjen l og den rette linje der går gennem P og står vinkelret på l .

Den linje der står vinkelret på l har hældningen $-\frac{1}{4}$, så ligningen for linjen er

$$y = -\frac{1}{4}(x - 3) + 15$$

Maple

```
solve([y = -1/4*(x - 3) + 15, y = 4x - 7])
```

$$\{x = -1, y = -6\}$$

Projektionen af P på l er $(-1, -6)$.

■

■ **Eksempel 137 — Vinkel mellem linjer i Maple.** To linjer l og m er givet ved

$$l : y = 3x + 2$$

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestem den spidse vinkel mellem de to linjer.

Vinklen mellem linjerne er den samme som vinklen mellem deres retningsvektorer.

Maple

```
with(Gym):
```

```
vinkel(<4, -2>, <1, 3>)
```

98.13010237

Den spidse vinkel er så $180^\circ - 98.13^\circ = 81.87^\circ$.

■

■ **Eksempel 138 — Vinkel mellem linjer i GeoGebra.** To linjer l og m er givet ved

$$l: -2x - y + 5 = 0$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem den spidse vinkel mellem l og m .

GeoGebra

Først defineres de to linjer

$$l: -2x - y + 5 = 0$$

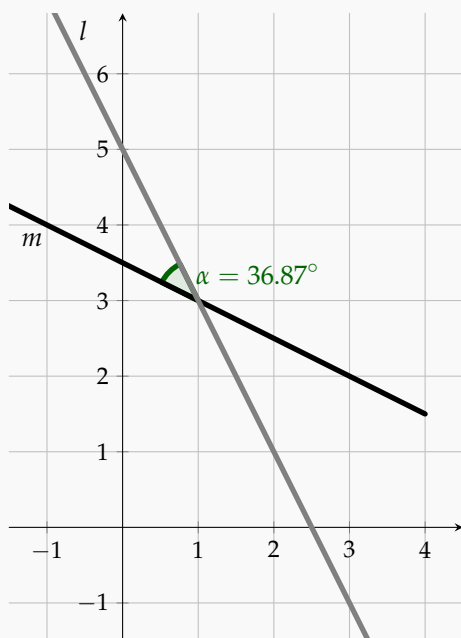
$$m: X = (5, 1) + \lambda(-2, 1)$$

$$\rightarrow X = (0, 3.5) + \lambda(-2, 1)$$

Så bestemmes vinklen mellem de to linjer.

Vinkel(l, m)

$$\rightarrow 36.87^\circ$$



Den spidse vinkel mellem l og m er 36.87° . ■

■ **Eksempel 139 — Skæringspunkt mellem linjer.** To linjer l og m er givet ved

$$l: y = 3x + 2$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

Maple

```
solve([y=3x+2, y=-2/4*x+9-2/4*1])
```

$$\left\{ x = \frac{15}{7}, y = \frac{59}{7} \right\}$$

Skæringspunktet mellem de to linjer er $\left(\frac{15}{7}, \frac{59}{7}\right)$.

GeoGebra

Først defineres de to linjer.

$$l: y=3x+2$$

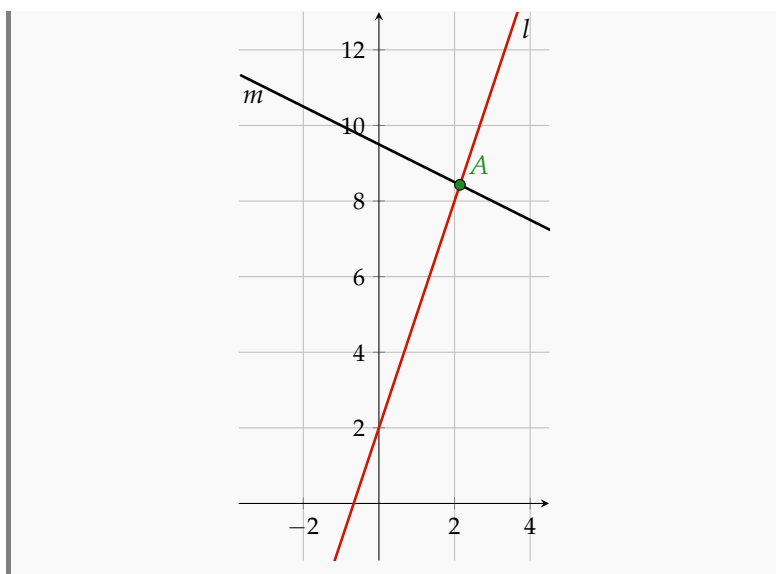
$$m: X = (1, 9) + \lambda \cdot (4, -2)$$

$$\rightarrow X = (0, 9.5) + \lambda(4, -2)$$

Så konstrueres skæringspunktet.

$$A = \text{Skæring}(l, m)$$

$$\rightarrow (2.14, 8.43)$$



Skæringspunktet er $(2.14, 8.43)$. ■

Øvelse 174 En linje l er givet ved ligningen

$$y = 3x + 2$$

a) Bestem afstanden til punktet $(2, 1)$.

■ **Eksempel 140 — Areal af trekant.** Tre linjer l , m og n er givet ved

$$l: 4x + 3y - 11 = 0$$

$$m: x + 4y - 19 = 0$$

$$n: 3x - y - 5 = 0$$

a) Bestem de tre skæringspunkter mellem de tre linjer.

b) Bestem arealet af trekanten som de tre linjer danner.

GeoGebra

Først defineres de tre linjer.

$$l: 4x + 3y - 11 = 0$$

$$m: x + 4y - 19 = 0$$

$$n: 3x - y - 5 = 0$$

Derefter konstrueres deres tre skæringspunkter.

$$A = \text{Skæring}(l, m)$$

$$\rightarrow (-1, 5)$$

$$B = \text{Skæring}(n, m)$$

$$\rightarrow (3, 4)$$

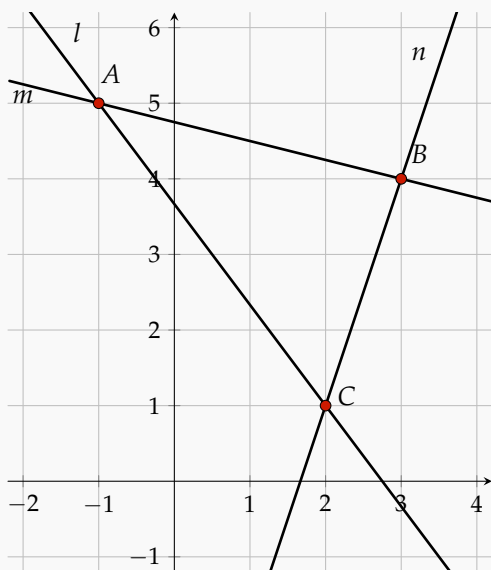
$$C = \text{Skæring}(l, n)$$

$$\rightarrow (2, 1)$$

Til sidst beregnes arealet af trekant ABC.

$$a = \text{Areal}(A, B, C)$$

$$\rightarrow 6.5$$



8.2 Cirkler

Definition 41 En cirkel er defineret som en mængde af punkter, der alle har samme afstand til et andet punkt. Dette andet punkt kaldes for cirkelns centrum. Mængden af punkter kaldes for periferien. Afstanden mellem centrum og et punkt i periferien kaldes for cirkelns radius.

For at beskrive denne cirkel er der to ting, vi skal vide, det ene er cirkelns radius r , det andet er cirkelns centrum C . Centrum for denne cirkel er $(2, -1)$ og radius er 5. Spørgsmålet er så hvordan vi kan beskrive alle punkterne i periferien. Alle punkterne i periferien skal have afstanden 5 til centrum, ved at bruge afstandsformlen for afstanden mellem to punkter får vi at

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$$

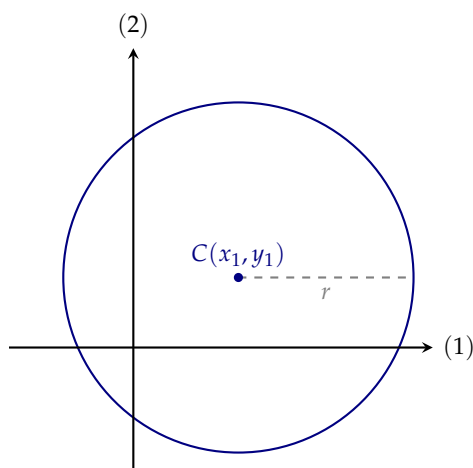
hvor x og y er koordinatsættet til punkterne i periferien.

Sætning 61 Ligningen for cirklen med centrum i $C(x_1, y_1)$ og radius r er

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$



Bevis for cirkelns ligning.



■ **Eksempel 141 — Bestem centrum og radius.** Ligningen for en cirkel er givet ved

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

Bestem centrum og radius.

For at bestemme centrum og radius omskrives ligningen for cirklen til formen

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

Ved at bruge kvadratsætningen $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ fås.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9} (x-3)^2 - 9 + y^2 + 4y - 12 = 0$$

Ved at bruge kvadratsætningen $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ fås.

$$(x-3)^2 - 9 + y^2 + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4} (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 12 = 0$$

Til sidst lægges 25 til.

$$(x-3)^2 - 9 + y^2 + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{+25} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Nu ses det at centrum er $(3, -2)$ og radius er 5. ■



Eksempel for bestemmelse af centrum og radius for en cirkel.

Sætning 62 Et punkt $P(x_2, y_2)$ ligger udenfor cirklen med centrum i $C(x_1, y_1)$ og radius r hvis

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 > r^2$$

Et punkt $P(x_2, y_2)$ ligger indenfor cirklen med centrum i $C(x_1, y_1)$ og radius r hvis

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < r^2$$

Definition 42 Tangenten til en cirkel står vinkelret på linjen der går gennem røringspunktet og centrum af cirklen og rører cirklen i netop ét punkt.

■ **Eksempel 142 — Skæring mellem linje og cirkel i Maple.** En ret linje er givet ved forskriften

$$y = 2x + 15$$

og en cirkel er givet ved forskriften

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

- a) Afgør hvor mange skæringspunkter cirklen og linjen har og brug dette til at afgøre om linjen er tangent til cirklen.
- b) Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne.

Maple

```
solve([(x+3)^2+(y-4)^2=25, y=2x+15])
```

$$\{x = -7, y = 1\}, \{x = -3, y = 9\}$$

- a) Linjen har to skæringspunkter med cirklen og er derfor ikke tangent til cirklen.
- b) Skæringspunkterne har koordinatsættene $(-7, 1)$ og $(-3, 9)$.



Opgaver hvor skæringspunkt mellem cirkel og linje skal bestemmes.



Eksempel på bestemmelse af skæringspunkt mellem cirkel og linje.

■ **Eksempel 143 — Skæring mellem linje og cirkel i GeoGebra.** En ret linje l er givet ved forskriften

$$-x + 3y + 3 = 0$$

og en cirkel C er givet ved forskriften

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$$

- a) Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem l og C .

GeoGebra

Først defineres linjen og cirklen.

$$l : -x + 3y + 3 = 0$$

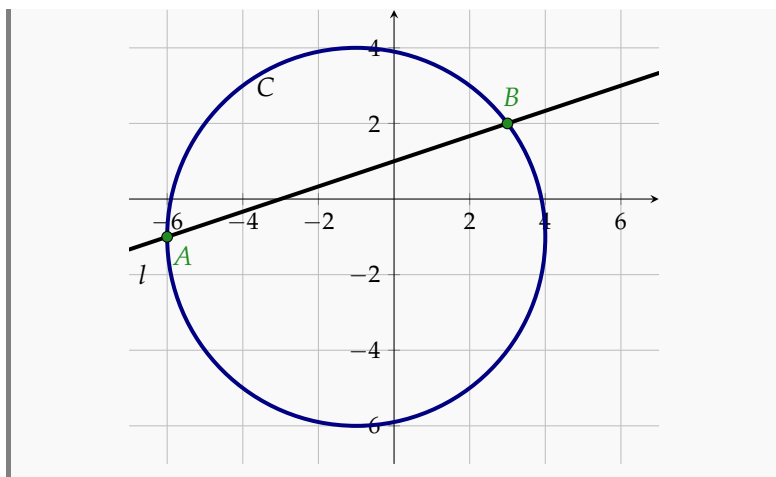
$$C : x^2 + 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$$

Derefter bestemmes skæringspunkterne.

Skæring(C, l)

$$\rightarrow A = (-6, -1)$$

$$\rightarrow B = (3, 2)$$



■ **Eksempel 144 — Tangent til cirkel.** En cirkel er givet ved forskriften

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

a) Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet $P(-7, 1)$.

Maple

Hældningen på linjen der går fra centrum af cirkel og til P er

$$\frac{4 - 1}{-3 - (-7)}$$

$$\frac{3}{4}$$

Tangenten er ortogonal til denne linje, derfor har tangenten hældning $-\frac{4}{3}$

Ligningen for tangenten er så

$$y = -\frac{4}{3}(x - (-7)) + 1$$



Eksempel for bestemmelse af tangent til cirkel.

GeoGebra

Først defineres punktet og cirklen.

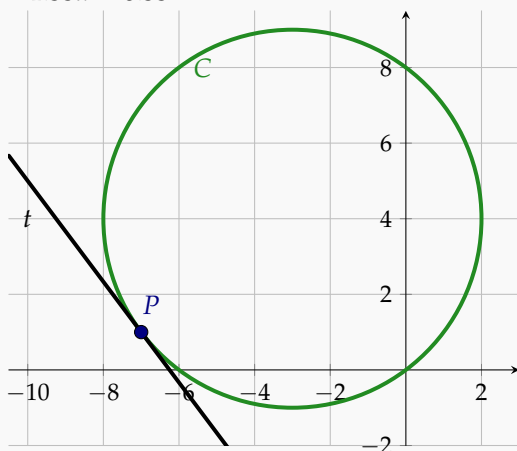
$$P = (-7, 1)$$

$$C : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Derefter bestemmes ligningen for tangenten.

Tangent (P, C)

$$\rightarrow t : y = -1.33x - 8.33$$



Ligningen for tangenten er $y = -1.33x - 8.33$. ■

■ **Eksempel 145 — Hvordan ligger punktet i forhold til cirklen.** Ligningen for en cirkel er givet ved

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$

Afgør hvordan punktet $P(-8, 9)$ ligger i forhold til cirklen.

$$(-8 + 4)^2 + (9 - 5)^2 = (-4)^2 + (4)^2 = 16 + 16 = 32$$

Da $32 < 49$ ligger punktet indenfor cirklen. ■

■ **Eksempel 146 — Tangent med bestemt hældning.** En cirkel har centrum i $C(3, 2)$ og $P(3, 2)$ er et punkt på cirklen.

Bestem røringsspunkterne til de to tangenter til cirklen som har hældning -2 .

GeoGebra

Først defineres de to punkter C og P.

$$C = (2, 3)$$

$$P = (3, 2)$$

Derefter konstrueres cirklen.

$$c : \text{Cirkel}(C, P)$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$$

Da tangenterne skal have hældningen -2 , skal de være vinkelrette på

linjen l som går gennem centrum af cirklen og har hældning $\frac{1}{2}$, derfor konstrueres l 's retningsvektor.

$r = \text{Vektor}((2, 1))$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Linjen l konstrueres.

$l: \text{Linje}(C, r)$

$\rightarrow -x + 2y = 4$

Røringspunkterne er skæringspunkterne mellem l og c

$\text{Skæring}(C, l)$

$\rightarrow A = (0.74, 2.37)$

$\rightarrow B = (3.26, 3.63)$

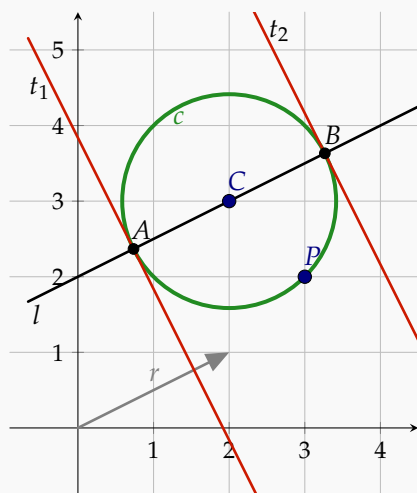
For at se om tangenterne i A og B har hældning -2 , konstrueres de.

$t_1: \text{Tangent}(A, c)$

$\rightarrow t_1: y = -2x + 3.84$

$t_2: \text{Tangent}(B, c)$

$\rightarrow t_2: y = -2x + 10.16$



Øvelse 175 En cirkel er givet ved centrum $(3, 2)$ og radius 4.

- Opskriv ligningen for cirklen.
- Bestem om punktet $(6, 4)$ ligger inden eller udenfor cirklen.

Øvelse 176 En cirkel er givet ved ligningen

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

- a) Bestem centrum og radius for cirklen.
- b) Bestem om punktet $(6, -4)$ ligger inden eller udenfor cirklen.

Øvelse 177 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

- a) Bestem centrum og radius for cirklen.
- b) Bestem om punktet $(3, 3)$ ligger inden eller udenfor cirklen.

Øvelse 178 En cirkel er givet ved ligningen

$$C : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

og en linje er givet ved

$$l : x + 3y = 10$$

- a) Bestem skæringspunkterne mellem C og l

Øvelse 179 En cirkel er givet ved ligningen

$$C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

- a) Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet $(-1, 5)$.

Øvelse 180 En cirkel er givet ved ligningen

$$C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

- a) Afgør om linjen l med ligningen $4x + 3y = 43$ er tangent til cirklen C .

Øvelse 181 En cirkel er givet ved ligningen

$$C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

- a) Bestem ligningen for de tangenter til cirklen som har hældning 3.

A

Mundtlig eksamen

Der afholdes en todelt mundtlig prøve.

Første del af prøven er en problemorienteret prøve med fokus på matematikkens anvendelser, hvor op til 10 eksaminander arbejder i ca. 120 minutter i grupper på højst tre med en ukendt problemstilling. Eksaminator og censor samtaler med den enkelte eksaminand om den konkrete problemstilling, den tilhørende teori og de anvendte matematiske løsningsstrategier. De ukendte problemstillinger skal til sammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof. Problemstillingerne skal udformes med en overskrift, der angiver de(t) overordnede emne(r) for eksaminationen, og med konkrete delspørgsmål.

Anden del af prøven er en individuel prøve med fokus på simple matematiske ræsonnementer og simpel bevisførelse. Prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål samt en uddybende samtale med udgangspunkt i det overordnede emne. De enkelte spørgsmål skal udformes med en overskrift, der angiver de(t) overordnede emne(r) for eksaminationen, og med konkrete delspørgsmål. Eksaminationstiden for den individuelle delprøve er ca. 24 minutter pr. eksaminand. Der gives ca. 24 minutters forberedelsestid. De endelige spørgsmål til den individuelle delprøve skal offentliggøres i god tid inden prøven og skal tilsammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof.

I vurderingen lægges der vægt på, om eleven demonstrerer indsigt i matematisk teori samt:

- 1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder:
 - kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber

- har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt
 - kan anvende IT til at understøtte forklaring af begreber
- 2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder:
- kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde
 - kan redegøre for foreliggende matematiske modeller/teorier og diskutere deres rækkevidde/anvendelsesområde.
- 3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder:
- har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag
 - kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling
 - demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.

A.1 Problemstillinger til gruppedel

- Data fra Danmarks Statistik i form af antalstabeller, der skal illustreres ved relevante statistisk deskriptorer. Som beskrevet i kapitlet Deskriptiv statistik.
- Simulering og efterfølgende behandling af data. Som i eksempel Simulering af kast med to tresidede terninger i kapitlet Sandsynlighed.
- Opstillingen af et chancespil som beskrevet i afsnittet Chancespil i kapitlet Sandsynlighed.
- Opstillingen af binomialmodel som beskrevet i afsnittet Binomialfordelingen og Binomialtest i kapitlet Statistik
- Regression og modelkontrol med konfunderende variabel / bias som beskrevet i afsnittet Modelkontrol i kapitlet Statistik.

- Lineær model
- Eksponentiel model
- Potens model
- Andengradspolynomiums model
- Harmonisk svingning
- Sammenhæng mellem sted, hastighed og acceleration som i indledningen til kapitlet Differentialregning, men med konkret funktion/situation.
- Optimering som eksempel Optimering af profit i kapitlet Differentialregning.
- Låne- og opsparingsscenarie.
- Vektor som retnings og afstands bestemmelse fx Mysteriet på indlandsisen eller Tonkin-bugten

A.2 *Spørgsmål til individueldel*

1. Deskriptiv statistik

Med udgangspunkt i et selvvalgt datasæt skal du illustrere væsentlige statistiske deskriptorer for grupperede data.

Videoer

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| a) Frekvens | b) Middeltal |
| c) Kumuleret frekvens | d) Sumkurve |
| e) Kvartilsæt | f) Boksplot |

2. Deskriptiv statistik

Med udgangspunkt i et selvvalgt datasæt skal du illustrere væsentlige statistiske deskriptorer for ugrupperede data.

Videoer

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| a) Frekvens | b) Middeltal |
| c) Kumuleret frekvens | d) Trappediagram |
| e) Kvartilsæt | f) Boksplot |

3. Binomialfordelingen

Bevis formen for binomialkoefficienten og forklar udregningen af binomialsandsynligheder.

Videoer

- a) [Binomialkoefficienten](#) b) [Binomialsandsynligheder](#)

4. Regression

Forklar hvad et residual og residualplot er og vis at den hældningskoefficient hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linjen og Y-værdierne fra data er mindst mulig, kan bestemmes med formlen

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n 2x_i^2}$$

Når der tages udgangspunkt i modellen

$$Y = \alpha X$$

er arealet af et kvadrat $(y_i - \alpha x_i)^2$, hvor (x_i, y_i) er datapar.

Video

- a) [Regression til ligefrem proportionalitet](#) b) [Residualplot](#)
c) [Regression og modelkontrol i Maple.](#) d) [Regression og modelkontrol kan laves i Maple i et eksempel hvor modellen ikke er god.](#)

5. Geometri

Bevis Pythagoras sætning og viser nogle eksempler på anvendelse af sætningen.

Videoer

- a) [Bevis for Pythagoras sætning](#) b) [Anvendelse af Pythagoras sætning](#)

6. Trigonometri

Gennemgå definitionen af sinus og cosinus og bevis at

$$\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} \quad \cos(v) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}}$$

for vinkler og sider i en retvinklet trekant.

Videoer

- a) Definition af sinus og cosinus i en retvinklet trekant

7. Funktioner

Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + b$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt.

Videoer

- a) Betydningen af konstanter for grafens forløb
- b) Bevis for to-punkts formel og eksempel
- c) Eksempler på ligefremproportionalitet
- d) Fortolkning af konstanter i modeller
- e) Opstilling af formel ud fra en sproglig beskrivelse

8. Funktioner

Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for eksponentialfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt.

Videoer

- a) Betydningen af konstanter for grafens forløb
- b) Bevis for to-punkts formel og eksempel
- c) Beregning af a og b ud fra to punkter
- d) Fortolkning af konstanter i modeller
- e) Beregning af vækstrate
- f) Opstilling af formel ud fra en sproglig beskrivelse

9. Funktioner

Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for eksponentialfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Bevis formelen til beregning af fordoblingskonstanten.

Videoer

- a) Betydningen af konstanter for grafens forløb
- b) Bevis for formel til beregning af fordoblingstid
- c) Beregning af fordoblingskonstanten
- d) Fortolkning af konstanter i modeller
- e) Beregning af vækstrate
- f) Opstilling af formel udfra en sproglig beskrivelse

10. Funktioner

Gennemgå betydningen af konstanterne a, b og c for grafens forløb for andengradspolynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$. Bevis at formelen til beregning af rødderne er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

hvor $d = b^2 - 4ac$.

Videoer

- a) Betydningen af konstanter for grafens forløb
- b) Bevis for formelen til beregning af rødderne
- c) Eksempel 1: Bestemmelse af rødderne
- d) Eksempel 2: Bestemmelse af rødderne
- e) Eksempel 3: Bestemmelse af rødderne

11. Vektorer

Vis at længden af krydsproduktet af to vektorer a og b er arealet A af det parallelogram de to vektorer udspænder.

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$$

hvor v er vinklen mellem de to vektorer.

Videoer

- a) Definition af vektor
- b) Vinklen mellem vektorer

12. Vektorer

Vis at vinklen v mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan bestemmes med formelen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Videoer

a) Definition af vektor

b) Vinklen mellem vektorer

13. Vektorer

Vis at projektionen af en vektor på en anden vektor kan bestemmes med formlen

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Videoer

a) Definition af vektor

b) Projektion af vektorer

14. Differentialregning

Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotient af $\sqrt{x}$

Videoer

a) Definition af differentialkvotient

b) Tretrinsmetoden

c) Bestemmelse af differentialkvotient af $\sqrt{x}$

d) Eksempel på ligning for tangent

e) Eksempel på monotoniforhold

15. Differentialregning

Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotient af $(f + g)(x)$

Videoer

a) Definition af differentialkvotient

b) Tretrinsmetoden

c) Bestemmelse af differentialkvotient af $(f + g)(x)$

d) Eksempel på ligning for tangent

e) Eksempel på monotoniforhold

16. Differentialregning

Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og vis at differentialkvotienten af $f(x) = \frac{1}{x}$ er $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Du kan inddrage andre væsentlige resultater fra differentialregningen.

Videoer

- a) Introduktion til differentialalregning
- b) Tretrinsmetoden
- c) Differentialkvotient af $\frac{1}{x}$
- d) Ekstremumssteder
- e) Monotoniforhold
- f) Tangent

17. Analytisk geometri

Bevis at afstanden fra punkt $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen $y = a \cdot x + b$ kan bestemmes med formlen

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

18. Analytisk geometri

Bevis at to linjer er ortogonale / står vinkelret på hinanden, hvis og kun hvis produktet af deres hældningskoefficienter er -1.

- a) Bevis for at produktet af hældningskoefficienterne for to ortogonale linjer er -1.
- b) Eksempel på undersøgelse af om to vektorer er ortogonale og på bestemmelse af parameter så to vektorer er ortogonale.

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispienbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

