

Matematik i grundforløbet

Algebra og lineære funktioner

- Ingenting er bedre end evig lykke; en pizza er bedre end ingenting - ergo er en pizza bedre end evig lykke.

Gefion Gymnasium

2017

Navn	:
Klasse	:
Skoleår	:

Algebra og lineære funktioner

© Kasper Rytter Falster Dethlefsen, Niels Peter Haals, Birgitte Erskov Halland, Kristoffer Martinsen og Dennis Pipenbring 2017

Tryk af LaserTryk A/S

1. udgave, 1. oplag

Udgivet af matX ApS

Bogens hjemmeside <http://matx.dk/intro.php>

ISBN 978-87-93632-00-4

Forord

I dette hæfte, der er tænkt som indledende til stx, vil der være fokus på

- regningsarternes hierarki og simpel symbol behandling
- regning med potenser og parenteser
- procentregning, absolut og relativ ændring
- lineære funktioner repræsenteret ved deres grafiske forløb, regneforskrift, tabeller og sproglig beskrivelse
- ligningsløsning af førstegradsligninger med algebraiske og grafiske metoder
- opstilling af lineære modeller og principielle egenskaber ved matematiske modeller

Materialet er udviklet til at kunne gennemføres uden brug af matematiske værktøjsprogrammer, så eleverne har mulighed for at forstå principperne i de metoder der gennemgås. Men eleverne kan selvfølgelig supplere deres papir og blyant med et matematisk værktøjsprogram undervejs eller efter hvert forløb.

Materialet indeholder links til videoer på youtube.com der gennemgår eksempler eller beviser. Links er repræsenteret ved QR-koder i margin. QR-koderne er links i den elektroniske version, der kan aktiveres ved at klikke på dem.

Hæftets hjemmeside <http://matx.dk/intro.php> indeholder ekstra materiale, interaktive øvelser, eTavlenoter og en eVersion af dette hæfte kan også hentes fra denne side. Det er også muligt at sende kommentarer til indholdet af hæftet fra siden.

Indhold

Forord	3
1 Tal	7
1.1 Procenter	8
1.2 Regning med matematiske udtryk	13
1.2.1 Regnearternes hierarki	14
1.2.2 Potenser	17
1.2.3 Parenteser	19
1.2.4 Kvadratsætninger	22
1.3 Brøker	24
2 Lineære funktioner	29
2.1 Sammenhænge og funktioner	29
2.2 Transformation mellem repræsentationer	30
2.2.1 Sproglig og symbolsk beskrivelse	30
2.2.2 Formel og tabel beskrivelse	32
2.2.3 Tabel og grafisk beskrivelse	35
2.2.4 Ikke lineære sammenhænge	39
2.3 Lineær regression	41
2.4 Teori om lineære funktioner	47
2.4.1 Sammenhæng mellem graf og a og b	48
2.4.2 Bestem forskrift ud fra to punkter	51
2.5 Proportionalitet	56
2.6 Stykkevis lineær	57
3 Ligninger	59
3.1 Algebraisk løsning af ligninger	60
3.2 Isolering af en ubekendt i en ligning	64
3.3 Ligninger med flere løsninger	65
3.4 Ligningsløsning med funktioner	66
3.5 Grafisk løsning af ligninger	67

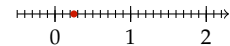
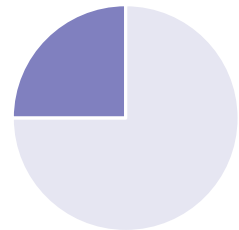
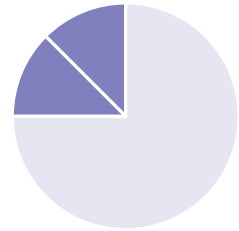
1

Tal

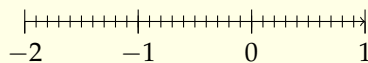
I forbindelse med behandling af matematiske problemer er det ofte en fordel at kunne udtrykke værdier på forskellige måder. Disse forskellige måder at udtrykke værdier på kaldes repræsentationer.

■ **Eksempel 1** Værdien »en fjerdedel« kan angives på forskellige måder.

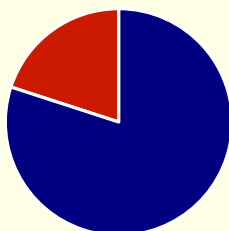
- En brøk $\frac{1}{4}$ hvor 1 kaldes tælleren og 4 kaldes nævneren.
- Brøken $\frac{2}{8}$ har naturligvis samme værdi.
- Brøker kan opfattes som en division mellem to tal 1 delt med 4 eller 1:4 (Undgå venligst at bruge kolon som tegn på division eftersom det i nogle sammenhænge kan misforstås)
- Decimaltal 0,25.
- Som en procentdel: 25%. Ordet procent kommer fra latin og betyder »per hundrede«. Så der er tale om brøken $\frac{25}{100}$.
- Som en del af et cirkeldiagram.
- Som et punkt ● på en tallinje.



Øvelse 1 Afsæt tallene $\frac{3}{7}$, 0,7 og $-1,2$ på tallinjen.



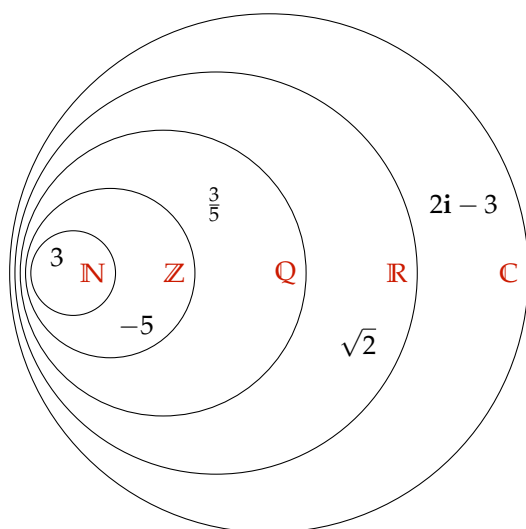
Øvelse 2 Hvor stor en del af figuren er rød?



Tal inddeles i typer. En type af tal er de ikke-negative heltal $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, disse tal kaldes for *de naturlige tal* og symbolet for disse tal er \mathbb{N} . Ud fra de naturlige tal kan fx -11 og -5 konstrueres ved at sætte $-$ (minus) foran tallet. På denne måde fås tallene $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Disse tal kaldes for *de hele tal* og symbolet for disse tal er \mathbb{Z} . Ud fra de hele tal kan fx $\frac{3}{6}$ og $\frac{7}{11}$ konstrueres. Tal af denne type hedder brøker og disse tal kaldes for *de rationelle tal* og symbolet for disse tal er \mathbb{Q} . Ud fra de rationelle tal kan *de reelle tal* konstrueres. Det er tal som fx $\sqrt{2}$ og π . Symbolet for de reelle tal er \mathbb{R} . Ud fra de reelle tal kan de komplekse tal konstrueres. Det er tal som $2 + 1i$. Symbolet for de komplekse tal er \mathbb{C} . I stx arbejdes ikke med komplekse tal undtagen evt. i særligt forløb eller projekter, men IT-værktøjer regner med komplekse tal og kan derfor også give komplekse tal som svar, derfor er det godt at kende deres udseende. Alle naturlige tal er også heltal og alle heltal er også rationelle tal og alle rationelle tal er også reelle tal og alle reelle tal er også komplekse tal.

1.1 Procenter

Procent bruges i mange forskellige sammenhænge. Det bruges, når skatten skal beregnes, når butikker laver tilbud og når banker udregner renter. Ved folketingsvalg udregnes procenterne af stemmerne for at finde ud af hvilke partier, der skal have pladserne i folketinget. Det bruges også når forskerne skal finde afvigelser fra teorien.



Figur 1.1: De forskellige tal-mængder, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} og \mathbb{C} .

■ **Eksempel 2** Karen og Viktoria betaler begge 40% i skat, men Karens indkomst er 300 000 kr og Viktorias er 400 000 kr. Karens skat er 40% af 300 000 kr, som er

$$\frac{40}{100} \cdot 300\,000 \text{ kr} = 120\,000 \text{ kr}$$

mens Viktorias skat er 40% af 400 000 kr., som er

$$\frac{40}{100} \cdot 400\,000 \text{ kr} = 160\,000 \text{ kr}$$

Viktoria betaler mere i skat end Karen men de betale begge 40% af deres indkomst. ■

Øvelse 3 Beregn procentdelen.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) Bestem 15% af 100. | b) Bestem 15% af 400. |
| c) Bestem 20% af 200. | d) Bestem 25% af 60. |
| e) Bestem 35% af 150. | f) Bestem 75% af 300. |



Video der viser hvordan procentandel af et tal beregnes.



Opgaver med bestemmelse af procentandel af tal.

Øvelse 4 Ved telefoninterview er 1 200 personer blevet spurgt hvilket af tre telefonabonnementer de ville vælge

Abonnement	Pris	Procent
Fri tale + fri sms/mms	120 kr/md	25%
Fri tale + fri sms/mms + 10 G data	150 kr/md	10%
Fri tale + fri sms/mms + fri data	210 kr/md	65%

Bestem hvor mange der valgte hvert af de tre typer abonnementer.

Øvelse 5 Hvad er størst? 60% af 25 eller 25% af 60? Gælder dette forhold for alle procenttal og tal?

Når et tal tillægges eller fratrækkes en given procent, som de to eksempler herunder, er der tale om en relativ ændring.

■ **Eksempel 3 — Relativ ændring.** Momsen på en vare er 25%. Det betyder at sælgeren skal lægge 25% til den pris hun tager for varen når hun sælger den. En bluse som hun vil sælge til 500 kr, skal der lægges 25% til. Først beregnes 25% af 500 kr.

$$\frac{25}{100} \cdot 500 \text{ kr} = 125 \text{ kr}$$

Dette beløb skal lægges til blusens pris når den sælges.

$$\frac{25}{100} \cdot 500 \text{ kr} + 500 \text{ kr} = 125 \text{ kr} + 500 \text{ kr} = 625 \text{ kr}$$

Blusens pris med moms er derfor 625 kr. Momsen skal sælgeren give til staten. En anden måde at skrive det samme op på er:

$$500 \text{ kr} \cdot (1 + 0,25) = 500 \text{ kr} \cdot 1,25 = 625 \text{ kr}$$

■

Øvelse 6 Beregn den nye pris. En vare til ...

- a) 200 kr stiger med 25%. b) 20 kr stiger med 20%.



Video der forklarer beregning af en relativ ændring

Øvelse 7 Et par jeans er sat ned fra 1 200 kr med 10 %, hvad koster jeans'ene nu?

■ **Eksempel 4 — Relativ ændring.** En mobiltelefon til 2 500 kr bliver sat ned med 10 %. Den nye pris beregnes ved først at beregne 10 % af 2 500 kr.

$$\frac{10}{100} \cdot 2\,500 \text{ kr} = 250 \text{ kr}$$

Dette beløb trækkes fra den oprindelige pris på 2 500 kr.

$$-\frac{10}{100} \cdot 2\,500 \text{ kr} + 2\,500 \text{ kr} = -250 \text{ kr} + 2\,500 \text{ kr} = 2\,250 \text{ kr}$$

En anden måde at skrive det samme op på

$$2\,500 \text{ kr} \cdot (1 - 0,1) = 2\,500 \text{ kr} \cdot 0,9 = 2\,250 \text{ kr}$$



Opgaver med beregning af relativ ændring

Øvelse 8 Beregn den nye pris. En vare til ...

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) 25 kr falder med 10 %. | b) 300 kr falder med 5 %. |
| c) 200 kr falder med 20 %. | d) 65 kr falder med 25 %. |
| e) 75 kr falder med 15 %. | f) 850 kr falder med 40 %. |

■ **Eksempel 5 — Absolut ændring.** En bluse sættes fra 600 kr ned med 200 kr. Den absolutte ændring er 200 kr. Den relative ændring er

$$\frac{200}{600} = 0,333\dots \approx 33 \%$$



Video der forklarer hvordan en procentdel beregnes.

Øvelse 9 Et par pink jeans er sat ned fra 1 100 kr med 200 kr. Et par sorte jeans er sat ned fra 1 500 kr med 15 %. Hvilket par jeans er sat mest ned?

■ **Eksempel 6 — Procentdel.** Ved valget til elevrådet stemte 60 af 400 elever på Dennis P. Dette omregnes til procent ved

$$\frac{60}{400} \cdot 100 \% = 15 \%$$

Dennis P. fik 15% af stemmerne.

Øvelse 10 Bestem 15 af 150 i procent.

Definition 1 — Procent ændring eller afvigelse. En slutværdi eller målt værdi afviger fra en startværdi eller tabelværdi med en procentværdi, der kan beregnes med formlen

$$\frac{\text{målt værdi} - \text{tabelværdi}}{\text{tabelværdi}} \cdot 100\%$$

eller

$$\frac{\text{slutværdi} - \text{startværdi}}{\text{startværdi}} \cdot 100\%$$

■ **Eksempel 7 — Procentafvigelse.** Carl har i et eksperiment bestemt at densiteten af en væske er 1,2 g/mL. I en tabel kan Carl se, at væsken har en densitet på 1,5 g/mL. For at udregne afvigelsen i procent gør Carl dette

$$\frac{1,2 - 1,5}{1,5} \cdot 100\% = \frac{-0,3}{1,5} \cdot 100\% = -20\%$$

Carl fik en afvigelse på -20%. Det negative fortegn viser, at Carls resultat er 20% under tabelværdien. ■

Øvelse 11 Beregn den procentvise afvigelse.

- | | |
|---|---|
| <p>a) I et forsøg er værdien 64 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 40. Bestem den procentvise afvigelse.</p> | <p>b) I et forsøg er værdien 248 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 155. Bestem den procentvise afvigelse.</p> |
| <p>c) et forsøg er værdien 450 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 375. Bestem den procentvise afvigelse.</p> | <p>d) I et forsøg er værdien 413 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 350. Bestem den procentvise afvigelse.</p> |



Opgaver hvor procentdel skal beregnes.



Video der forklarer hvordan en procentafvigelse beregnes.



Opgaver hvor procentafvigelse skal beregnes.

1.2 Regning med matematiske udtryk

En af matematikhistoriens store opfindelser er at opskrive regneoperationer med symboler og bogstaver. Grunden til at regne med bogstaver, er for at komme frem til nogle generelle regler, som er rigtige for alle tal. På denne måde kan en masse udregninger undgås.

Eksempelvist kan Pythagoras' sætning for en retvinklet trekant beskrives med ord.

Sproglig beskrivelse: »Kvadratet af længden af hypotenusen, er lig med summen af kvadraterne af længderne af kateterne.«

Dette matematiske udsagn kan skrives kortere med symboler.

Symbolsk beskrivelse:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

hvor c er hypotenusen i en retvinklet trekant og a og b er kateterne.

Fordelen ved at indføre ny notation i form af specielle symboler er, at det er muligt at nedskrive komplicerede matematiske udtryk på en meget kompakt måde. Omkostningen er at det ser mere abstrakt ud og de forskellige symboler skal være kendt for at det matematiske udtryk kan forstås.

■ **Eksempel 8** Følgende sproglige beskrivelse: »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y .« Kan oversættes til symboler

Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y

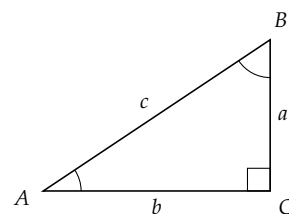
$$\underbrace{\frac{x}{y}}_{\frac{x}{y}} = \underbrace{k}_{k \cdot} \underbrace{(x-y)}_{(x-y)}$$

I symboler bliver det

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

Øvelse 12 Omskriv følgende til matematiske symboler:

- y er proportional med summen af x og z .
- Summen af y og x er proportional med forholdet mellem x og y .



Figur 1.2: Retvinklet trekant

Sprog	Tekst
proportional med	$k \cdot$
summen af	$x + y$
produktet af	$x \cdot y$
differencen mellem	$x - y$
forholdet mellem	$\frac{x}{y}$
er (ligmed)	$=$
kvadratet af	x^2
kvadratroden af	\sqrt{x}
i tredje	x^3
kubikroden af	$\sqrt[3]{x}$

Tabel 1.1: Sproglig beskrivelse og matematisk udtryk

- c) Differencen mellem x og y er proportional men kubikroden af y .
- d) Forholdet mellem x og y er proportional med kvadratroden af produktet af x og y .

Øvelse 13 Giv en sproglig beskrivelse af følgende:

- a) $x = k \cdot \sqrt{x}$. b) $x^2 + y^2 = k \cdot y^2$.
- c) $x = k \cdot \sqrt[3]{y}$. d) $(x + y)^2 = k \cdot \sqrt[3]{x}$.
- e) $x^2 + y^2 = k \cdot (x - y)$. f) $\frac{x}{y} = k \cdot \sqrt{x + y}$.
- g) $\frac{x}{y} = k \cdot x \cdot y$. h) $y^2 = k \cdot y$.

x og y kan efterfølgende erstattes af virkelige størrelser fx vindhastighed og effekt. Så kommer »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y .« til at lyde »Forholdet mellem vindhastigheden og effekten er proportional med differencen mellem vindhastigheden og effekten.« Størrelserne skal derfor først identificeres og derefter kan modellen opstilles.

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

hvor x er vindhastigheden (i m/s) og y er effekten (i kW).

1.2.1 Regnearternes hierarki

Udtrykkes matematik sprogligt, kan det give anledning til misforståelser, medmindre det udtrykkes præcist.

Hvad menes der eksempelvis med udsagnet:

Udregn 2 plus 3 gange 4.

Dette udsagn kan betyde:

Udregn først 2 plus 3 og gang derefter resultatet med 4, hvilket giver 20.

men det kan også betyde:

Udregn først 3 gange 4 og læg derefter dette tal til 2, hvilket giver 14.

Det giver to forskellige resultater hvorfor det er vigtigt, at vide hvordan det skal udregnes. For at vide, hvordan det skal udregnes, benyttes parenteser til at markere, hvad der skal udregnes først. Udtrykkene ovenfor bliver henholdsvis:

$$(2 + 3) \cdot 4 \text{ og } 2 + (3 \cdot 4)$$

Imidlertid er det vedtaget at multiplikation udføres før addition, sådan at $2 + 3 \cdot 4$ betyder $2 + (3 \cdot 4)$. Først udføres potenser og kvadratrødder, dernæst gange og dividere. Til sidst kommer plus og minus. Man kalder dette for regnearternes hierarki.

1. Parenteser
2. Eksponenter
3. Potenser og rødder
4. Multiplikation og division
5. Addition og subtraktion

■ **Eksempel 9** I udtrykket $2^{3+2} \cdot 4$ skal eksponenten $3 + 2 = 5$ udregnes først og derefter skal potensen $2^5 = 32$ udregnes og til sidst multiplikationen $32 \cdot 4 = 128$. Udregningen kommer til at se således ud:

$$2^{3+2} \cdot 4 = 2^5 \cdot 4 = 32 \cdot 4 = 128$$



Video med eksempler på beregninger med fokus på regnearternes hierarki.



Opgaver hvor der er fokus på regnearternes hierarki.

Øvelse 14 Udregn følgende udtryk

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a) $5 - 4 \cdot 3$ | b) $3 + 11 \cdot 2$ |
| c) $4 + 3^2$ | d) $6 - 3 \cdot 2^3$ |
| e) $(3 - 2) \cdot 4$ | f) $(4 + 1)^2 \cdot 3$ |
| g) $(9 + 2) \cdot (3 - 4)$ | h) $\frac{3}{4} + 5 \cdot 8$ |

Operationen at lægge to tal sammen kaldes addition. Symbolet for en addition er + (plus). Fx

$$4 + 2$$

De to tal, der adderes kaldes *led*, symbolet kaldes en operator.

$$\begin{array}{ccc} & \text{plus operator} & \\ & \underbrace{\quad} & \\ \underbrace{4} & + & \underbrace{2} \\ \text{led} & & \text{led} \end{array}$$

Ved en addition fås et resultat der kaldes en sum. For at vise at der er tale om et resultat skrives = (lighedstegn). Fx

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{plus operator} & & & & & \\ & \underbrace{\quad} & & & & & \\ \underbrace{4} & + & \underbrace{2} & = & \underbrace{6} \\ \text{led} & & \text{led} & & \text{sum} \end{array}$$

En anden operation er multiplikation eller at gange som det også kaldes. Ved en multiplikation af to tal eller bogstaver skrives \cdot (gange) de to tal eller bogstaver, som multipliceres. Fx $4 \cdot 3$ betyder 4 gange 3 og 4 og 3 kaldes for faktorer. Resultatet af en multiplikation kaldes et produkt. Fx

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{gange operator} & & & \text{produkt} & & \\ & \underbrace{\quad} & & & \underbrace{\quad} & & \\ \underbrace{4} & \cdot & \underbrace{3} & = & \underbrace{12} \\ \text{faktor} & & \text{faktor} & & \end{array}$$

Addition og multiplikation kan også kombineres.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{led} & & & \\ & & & \underbrace{\quad} & & & \\ & \text{plus operator} & & \text{gange operator} & & \text{sum} & \\ & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & \\ \underbrace{a} & + & \underbrace{4} & \cdot & \underbrace{b} & = & \underbrace{a + 4b} \\ \text{led} & & \text{faktor} & & \text{faktor} & & \end{array}$$

Der er tre faktorer og to led i dette udtryk

$$3 \cdot e \cdot y + 6$$

De tre faktorer er 3, e og y og de to led er $3 \cdot e \cdot y$ og 6. Ofte undlades \cdot hvis det er tydeligt, at der skal være \cdot . Fx vil der i stedet for at skrive $3 \cdot e \cdot y$ skrives $3ey$, men hvis der stod der $3 \cdot 4$ kan der ikke skrives 34, fordi det ville betyde fireogtredive og ikke tre gange fire.

Der kan også regnes med bogstaver.

$$a + a = 2a \quad a - a = 0 \quad a \cdot a = a^2 \quad \frac{a}{a} = 1$$

Her er nogle flere, de er lidt mere komplicerede:

$$a + b + a = 2a + b \quad a - b + 2b = a + b \quad a \cdot b \cdot a = a^2b$$

Her kombineres plus og gange

$$a + (b \cdot c) = a + bc \quad a \cdot (b + c) = ab + ac \quad b \cdot (a + b + c) = ab + b^2 + bc$$

Her kombineres alle regnearterne

$$\frac{a \cdot (b + c)}{a} = b + c \quad \frac{ac + bc}{b} = \frac{ac}{b} + c \quad \frac{ac + bc}{c} = a + b$$

1.2.2 Potenser

Udregninger skal skrives på den mest simple måde og derfor indføres en måde som beskriver det samme tal ganget med sig selv fx

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

og det udtales 'tre i fjerde' eller 'tre opløftet i fjerde'. En potens af et negativt tal fx

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

og den negative værdi af potensen af et tal fx

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

er to forskellige ting.

■ **Eksempel 10** Følgende udtryk

$$x^3 \cdot x^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$, så fås at

$$x^3 \cdot x^6 = x^{3+6} = x^9$$

Regneregler for potenser.
Hvor x og y er forskellige fra 0.

$$x^s \cdot x^t = x^{s+t}$$

$$\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$$

$$(x^s)^t = x^{s \cdot t}$$

$$(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^s = \frac{x^s}{y^s}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-s} = \frac{1}{x^s}$$

$$\sqrt[s]{x} = x^{\frac{1}{s}}, \text{ hvor } x > 0$$

$$\sqrt[s]{x^t} = x^{\frac{t}{s}}, \text{ hvor } x > 0$$

■

■ **Eksempel 11** Følgende udtryk

$$(x^3)^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $(x^s)^t = x^{s \cdot t}$, så fås at

$$(x^3)^6 = x^{3 \cdot 6} = x^{18}$$

■

■ **Eksempel 12** Følgende udtryk

$$\frac{x^3}{x^6}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$, så fås at

$$\frac{x^3}{x^6} = x^{3-6} = x^{-3}$$

Som ifølge reglen $x^{-s} = \frac{1}{x^s}$ er lig

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

■

Ofte forventes det at mere komplicerede udtryk kan overskues.

■ **Eksempel 13** Følgende udtryk

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$ to gange, først på faktorerne indeholdende x og derefter på faktorerne indeholdende y . Når reglen anvendes på x fås, at

$$\frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$$

og når den anvendes på y fås, at

$$\frac{y^4}{y} = y^{4-1} = y^3$$



Video med eksempler på beregninger med fokus på potenser.

Bemærk at $y = y^1$. Og disse to resultater kan så sættes sammen.

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y} = x^3 \cdot y^3$$

Dette kan reduceres yderligere ved brug af reglen $(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$.

$$x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$$

■ **Eksempel 14** Følgende udtryk

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\sqrt[s]{x^t} = x^{\frac{t}{s}}$ på $\sqrt[8]{x^2}$, hvormed fås at $\sqrt[8]{x^2} = x^{\frac{2}{8}}$. Det betyder at

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3} = x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3}$$

reglen $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$ anvendes på alle tre faktorer,

$$x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3} = x^{5+\frac{2}{8}+(-3)}$$

Og da $5 + \frac{2}{8} + (-3) = 2 + \frac{2}{8} = \frac{16}{8} + \frac{2}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ fås, at

$$x^{5+\frac{2}{8}+(-3)} = x^{\frac{9}{4}}$$

■ **Øvelse 15** Reducer følgende udtryk. Antag at x , y og a ikke er 0.

a) $\frac{x^4}{x^2}$

b) $\frac{x^2}{x^4}$

c) $\frac{x^2 \cdot y^4}{x^2 \cdot y^2}$

d) $\frac{x^2 \cdot x \cdot y^2}{x^3 \cdot y^3}$

e) $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^{10}}$, hvor $x > 0$

f) $a^2 \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot a^{-5}$, hvor $x > 0$

1.2.3 Parenteser

Hvis et tal eller bogstav skal ganges ind i en parentes, skal tallet eller bogstavet ganges med hvert led i parentesen fx

$$5 \cdot (3 + c - a) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot c - 5 \cdot a$$

dette kan reduceres til

$$15 + 5c - 5a$$

Øvelse 16 Udregn følgende udtryk

a) $a + a + a$

b) $ab - a \cdot b + a$

c) $\frac{a^2}{a}$

d) $a \cdot (b + c) - ab$

e) $\frac{a}{a^2}$

f) $\frac{ab - ac + ad}{a} + c$

g) $a \cdot (a + a)$

h) $(a + b) \cdot c - (c + b) \cdot a$

Er der to parenteser, som skal ganges ind i hinanden (parenteserne ganges ud) skal hvert led i den ene ganges med hvert led i den anden fx

$$\begin{aligned} (x + y + z) \cdot (a + b + c) &= (x + y + z) \cdot a + (x + y + z) \cdot b + \\ &\quad (x + y + z) \cdot c \\ &= xa + ya + za + xb + yb + zb + \\ &\quad xc + yc + zc \end{aligned}$$

Her er en tabel med eksempler på typiske udregninger.

Regel	Eksempel
$a + ba = (b + 1)a$	$a + 4a = (1 + 4)a$
$ca + ba = (b + c)a$	$2a - 4a = (2 - 4)a$
$\frac{a}{b} \cdot b = a$	$\frac{4}{7} \cdot 7 = 4$
$a(b + c) = ab + ac$	$3(b + c) = 3b + 3c$

■ **Eksempel 15** Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden) $(2x + 4) \cdot (3y + z)$.

$$\begin{aligned} (2x + 4) \cdot (3y + z) &= (2x + 4) \cdot 3y + (2x + 4) \cdot z \\ &= 2x \cdot 3y + 4 \cdot 3y + 2x \cdot z + 4 \cdot z \end{aligned}$$

■



Video med reducere af udtryk.

■ **Eksempel 16** Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden) $(2x + y)^2 \cdot (5 + z)$.

Først omskrives $(2x + y)^2$ til $(4x^2 + y^2 + 4xy)$, nu ses at der er to parenteser og ingen potenser

$$(4x^2 + y^2 + 4xy) \cdot (5 + z)$$

nu kan det ganges ud.

$$\begin{aligned} (4x^2 + y^2 + 4xy) \cdot (5 + z) &= (4x^2 + y^2 + 4xy) \cdot 5 + \\ &\quad (4x^2 + y^2 + 4xy) \cdot z \\ &= 4x^2 \cdot 5 + y^2 \cdot 5 + 4xy \cdot 5 + \\ &\quad 4x^2 \cdot z + y^2 \cdot z + 4xy \cdot z \\ &= 20x^2 + 5y^2 + 20xy + 4x^2z + y^2z + 4xyz \end{aligned}$$



Video med eksempler på at gange parenteser ud.

Øvelse 17 Gang følgende parenteser ud.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $(x + y) \cdot (x + y)$ | b) $(x + y) \cdot (2x + y)$ |
| c) $(x + 2) \cdot (2 + y)$ | d) $(5x + 4y) \cdot (2x + 3y)$ |
| e) $(x - y) \cdot (x + y)$ | f) $(x - 3y) \cdot (x + y)$ |
| g) $(x - y) \cdot (x + y) \cdot (z + 5)$ | h) $(3x + 5y + 3) \cdot (2x + 4)$ |

At sættes udenfor parentes betyder, at en faktor som flere led har tilfældes, kan placeres udenfor en parentes.

■ **Eksempel 17** Sæt udenfor parentes i følgende udtryk.

$$2x + 5xy$$

begge led indeholder x derfor kan det sættes udenfor parentes

$$2x + 5xy = x \cdot (2 + 5y)$$

bemærk at x er fjernet fra begge led.

Øvelse 18 Sæt så meget som muligt udenfor parentes.

a) $3x + 4xy$

b) $2x + 6xy$

c) $3x^2 + 6xy$

d) $4a + 6b + 8c$

e) $3a + 6ba^2$

f) $2x + 6xy$

g) $3xy^2 - 9xy$

h) $14x^4y^3 - 21x^3y^4$

1.2.4 Kvadratsætninger

Meget ofte skal udtryk på formen $(x + 3)^2$ (kvadratet af et toleddet udtryk), og derfor er der følgende nyttige sætninger.

Sætning 1 — Kvadratsætningerne.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (1.2)$$

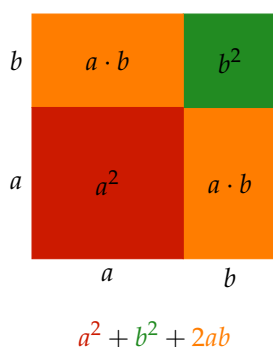
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad (1.3)$$

For at vise, at dette er sandt, skal udregningen af $(a + b)^2$ og de andre to udtryk, gennemføres. Dette kaldes et bevis.

■ **Bevis** Sætningerne kan vises ved algebraisk udregning

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b \\ &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \end{aligned}$$

eller det kan ses som arealer



■ **Eksempel 18** Udregn følgende: $(2 + 3) \cdot (2 + 3)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser, er det den første kvadratsætning. Sætningen siger så at:

$$(5 + 3)^2 = (5 + 3) \cdot (5 + 3) = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 = 25 + 9 + 30 = 64$$

Meget ofte regnes ikke med tal, men med bogstaver. Derfor kommer der her et eksempel med bogstaver.

■ **Eksempel 19** Udregn følgende: $(x + y) \cdot (x + y)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser er det den første kvadratsætning. Sætningen siger at:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere.

■ **Eksempel 20** Udregn følgende: $(2x + y) \cdot (2x - y)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i den ene parentes og - i den anden parentes, er det den tredje kvadratsætning. Sætningen siger, at:

$$\begin{aligned} (2x + y) \cdot (2x - y) &= (2x)^2 - y^2 \\ &= 4x^2 - y^2 \end{aligned}$$



Video med eksempler på reduktion af udtryk ved brug af parentesregler og kvadratsætninger.

I udregningen er potensregneren $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ brugt på $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$. Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere. ■

Øvelse 19 Regn følgende opgaver ved brug af kvadratsætningerne

- a) $(t + r) \cdot (t + r)$ b) $(t - r) \cdot (t + r)$
 c) $(2x - r) \cdot (2x - r)$ d) $(3x + 4y) \cdot (3x + 4y)$

Øvelse 20 Regn følgende opgaver ved brug af kvadratsætningerne

- a) $(3x - 5y) \cdot (3x - 5y)$ b) $(3x - 5y) \cdot (3x + 5y)$
 c) $(3t + r) \cdot (3t + r)$ d) $(t - 4r) \cdot (t + 4r)$
 e) $(3x - 3r) \cdot (3x - 3r)$ f) $(2x - r^2) \cdot (2x - r^2)$
 g) $(3x^2 + 4y) \cdot (3x^2 + 4y)$ h) $(2x^3 - 3y^2) \cdot (2x^3 + 3y^2)$

Nu har vi set på hvad et bevis er, og hvad man kan bruge en sætning til, nu skal vi arbejde videre med nogle flere grundlæggende sætninger og deres anvendelser.

1.3 Brøker

En brøk består af to dele - en tæller og en nævner, meget ofte skrives det således

$$\frac{\text{tæller}}{\text{nævner}}$$

Der skrives altså tælleren øverst og nævneren nederst, fx

$$\frac{12a}{3ab}$$

Her er $12a$ tælleren og $3ab$ er nævneren.

En brøk fx $\frac{4}{3}$ betyder fire tredjedele



Et helt tal, fx 3 kan skrives som en brøk

$$3 = \frac{3}{1}$$

På denne måde kan brøkretneregler også bruges når hele tal og brøker skal lægges sammen, trækkes fra, ganges med eller divideres med hinanden.

Brøkretneregler

$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d}$	Addition og subtraktion	(A)
$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	Multiplikation	(B)
$\frac{a}{d} / \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{d \cdot b}$	Division	(C)
$\frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{a \cdot c}$	Forlæng og forkort	(D)

En brøk kan forkortes, hvilket betyder at tæller og nævner divideres med samme tal eller bogstav. Fx kan følgende brøk forkortes med a

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{12}{3b}$$

En brøk kan forlænges med et tal eller et bogstav, hvilket betyder, at både tæller og nævner ganges med tallet eller bogstavet. Fx forlænges her med 4:

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{4 \cdot 12a}{4 \cdot 3ab} = \frac{48a}{12ab}$$

Øvelse 21 Angiv brøken »tre femtedele« i forskellige repræsentationer.

Regning med brøker er en øvelse i at bruge simple matematiske formler. I eksemplerne er der skrevet (A), (B), (C) eller (D) under de lighedstegn, hvor den pågældende brøkretneregler er brugt.

■ **Eksempel 21 — Multiplikation mellem heltal og brøk.**

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} \stackrel{(B)}{=} \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$$

■ **Eksempel 22 — Multiplikation mellem to brøker.**

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

Øvelse 22 Udregn

a) $4 \cdot \frac{3}{2}$

b) $a \cdot \frac{2b}{5a}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}$

d) $\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{2x}$



Video med gennemregning af eksempler på udregninger med brøker.

■ **Eksempel 23 — Heltal divideret med brøk.**

$$3/\frac{2}{5} = \frac{3}{1} / \frac{2}{5} \stackrel{(C)}{=} \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{15}{2}$$

■ **Eksempel 24 — Brøk divideret med brøk.**

$$\frac{2}{5} / \frac{4}{3} \stackrel{(C)}{=} \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

■ **Eksempel 25 — Brøk divideret med heltal.**

$$\frac{2}{5} / 3 = \frac{2}{5} / \frac{3}{1} \stackrel{(C)}{=} \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Øvelse 23 Udregn

a) $4 / \frac{3}{7}$

b) $2a / \frac{3a}{4b}$

c) $\frac{8}{3} / \frac{12}{9}$

d) $\frac{8a}{3b} / \frac{4a}{b}$

e) $\frac{10}{3}/5$

f) $\frac{a^2}{b}/(a \cdot b) \cdot b$

■ **Eksempel 26 — Summen af to brøker.**

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{6} \stackrel{(A)}{=} \frac{5 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{30 + 24}{36} = \frac{54}{36} = \frac{18 \cdot 3}{18 \cdot 2} \stackrel{(D)}{=} \frac{3}{2}$$

Øvelse 24 Udregn

a) $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$

b) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$

c) $\frac{7}{3} + \frac{2}{5}$

d) $\frac{3x}{y} + \frac{2y}{6x}$

Øvelse 25 Regn følgende opgaver ved brug af regneregler for brøker

a) $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

b) $\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y}$

c) $\frac{a \cdot 3}{a \cdot 4}$

d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}$

e) $\frac{x}{2} \cdot \frac{3}{y}$

f) $\frac{b}{c} + \frac{x}{c}$

g) $\frac{b}{c} / \frac{x}{a}$

h) $\frac{b}{c} + \frac{x}{a}$

Øvelse 26 Bestem en enklere regel for summen af to brøker med samme nævner.

Øvelse 27 Forkort følgende brøker.

a) $\frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{x + 4y}$

b) $\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{2x - 3y}$

c)
$$\frac{4x^4 + 12x^2y + 9y^2}{2x^2 + 3y}$$

d)
$$\frac{16x^2 - 9y^2}{4x - 3y}$$

e)
$$\frac{x^2 - 5y}{x^4 - 25y^2}$$

f)
$$\frac{3x^3 - 2ax^2}{9x - 6a}$$

g)
$$\frac{3x^4y - xy^3}{12x^3 - 4y^2}$$

h)
$$\frac{9x^2 + y^2 + 6xy}{9x + 3y}$$

2

Lineære funktioner

2.1 Sammenhænge og funktioner

Videnskabsfolk, politikere og helt almindelige mennesker er ofte interesseret i sammenhænge. Eksempelvis: Hvad er sammenhængen mellem mængden af $\text{CO}_2(\text{g})$ i atmosfæren og den globale middeltemperatur? Er der en sammenhæng mellem hvor meget cola man drikker og risikoen for sukkersyge? Man kan ofte benytte matematik til at beskrive sådanne sammenhænge præcist.

I matematik benytter vi begrebet variabel om størrelser der kan have forskellige værdier. Man giver som regel en variabel et navn i form af et bogstav. Et eksempel på en variabel kan være vindhastighed. Det kan man vælge at betegne med bogstavet x eller med h , eftersom der er tale om en hastighed.

En variabel fx y kan afhænge af en anden variabel h . Eksempelvist afhænger effekten af en vindmølle af vindhastigheden. Så kan man kalde effekten y for den afhængige variabel og vindhastigheden h for den uafhængige variabel. Man siger også at effekten y er en funktion af vindhastigheden h . Matematisk defineres en funktion på følgende måde:

Definition 2 — Funktion. En variabel y er en funktion af en anden variabel x , hvis der til hver x -værdi hører en bestemt y -værdi. Denne værdi kaldes funktionsværdien og man skriver $y = f(x)$.

Der må altså ikke være flere forskellige y -værdier der hører til samme x -værdi. Eksempelvist kan man ikke sige, at tidspunktet på dagen er en funktion af temperaturen eftersom flere tidspunkter kan have den samme temperatur.

En lineær sammenhæng mellem en afhængig variabel y og en uafhængig variabel x der kan skrives på formen

$$y = a \cdot x + b$$

hvor a og b er tal, er en lineære funktion hvor $y = f(x)$. Derfor kan den også skrives

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret. Alle rette linjer der ikke er lodrette er graf for en lineær funktion.

Når x vokser med 1, vokser $f(x) = ax + b$ med a og konstanten b er grafens skæringspunkt med 2.-aksen.

Som med tal kan funktioner repræsenteres på flere forskellige måder, der alle kan være nyttige afhængige af situationen. Det er derfor vigtigt at kunne beherske alle repræsentationer og oversætte imellem dem. Her vil vi bruge disse fire repræsentationer for funktioner

- Sproglig
- Symbolsk (formel)
- Tabel
- Grafisk

2.2 Transformation mellem repræsentationer

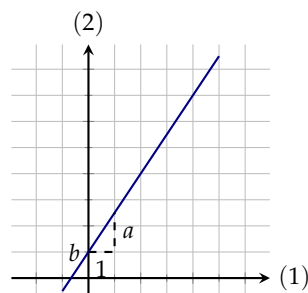
2.2.1 Sproglig og symbolsk beskrivelse

Kronetaxa tager 20 kr pr. kørt km, og desuden opkræves et startgebyr på 25 kr. Den samlede pris afhænger af det kørte antal kilometer.

Hvis man kører 1 km koster det i alt $25 \text{ kr} + 20 \text{ kr} = 45 \text{ kr}$ Efter 2 km koster det $25 \text{ kr} + 2 \cdot 20 \text{ kr}$. Hvis man kalder det kørte antal kilometer for x og den samlede pris kaldes for y , kan man skrive en formel op for sammenhængen mellem x og y .

$$y = 25 + x \cdot 20$$

Denne ligning rummer den samme information om sammenhængen mellem pris og antal kørte kilometer som den sproglige beskrivelse. Det er bare en anden måde at repræsentere denne sammenhæng på, som kan være smartere til nogle formål.



Figur 2.1: Graf for en lineær funktion $f(x) = ax + b$.



Video der forklarer sammenhængen mellem grafen og konstanterne.



Video med eksempler på opstilling af formler ud fra en sproglig beskrivelse.

Oftentimes a special notation is used when the formula for a function is given. Instead of y is written $f(x)$. So that the formula can be written:

$$f(x) = 25 + x \cdot 20$$

$f(x)$ is pronounced » f of x «. The expression

$$25 + x \cdot 20$$

is also called the formula for the function $f(x)$. The advantage of this way of writing is that some calculations can be written in a short way. For example, it can be seen above, that if $x = 1$ then $y = 45$. With the new notation this can be written $f(1) = 45$. It is important to note that the parentheses do not have the same meaning as parentheses in a general mathematical expression. $f(1)$ means the value of y when $x = 1$, but not $f \cdot 1$.

Øvelse 28 Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver den sammenhæng eller udvikling som beskrives.

- I 2006 kostede ét kilo kartofler i gennemsnit 5,50 kr, siden er prisen steget med 1,20 kr. pr. år.
- I perioden 2001-2009 steg eksporten af grise med 0,4 mio. stk. pr. år. I 2001 var eksporten af grise 5,5 mio. stk.
- I perioden 2003-2012 er de årlige offentlige udgifter i forbindelse med SU steget med 10,5 mia. kr. pr. år. I 2003 var de årlige offentlige udgifter 243 mia. kr.
- Antallet af rygere i Danmark faldt i 2004 med 55 000. I 2004 var der ca. 900 000 rygere i Danmark. Antag at antallet af rygere falder med 55 000 årligt.
- Strømforbruget pr. indbygger i Danmark er vokset med 1 000 kWh pr. 10 år siden år 1950. I 1950 var strømforbruget pr. indbygger i Danmark 1 000 kWh.

■ **Eksempel 27 — Fra formel til sproglig beskrivelse.** Sammenhængen mellem masse af en beholder med væske og volumen af væsken i beholderen beskrives med følgende funktion

$$m(v) = 0,84 \cdot v + 240$$

hvor $m(v)$ er massen af beholderen og væsken i gram og v er volumen i mL af væsken i beholderen.

Konstanterne i modellen kan bruges til at beskrive væsken og beholderen: »En beholder der vejer 240 g indeholder en væske med en densitet på 0,84 g/mL.« ■



Video med beskrivelse af fortolkning af konstanterne af modellen. (Fra formel til sproglig beskrivelse)

Øvelse 29 Omskriv følgende modeller til en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

- Hastigheden af en bil der accelererer kan beskrives med funktionen $h(t) = 1,2 \cdot t + 35$, hvor $h(t)$ er hastigheden i km/t og t er tiden i sekunder efter at bilen er begyndt at accelerere.
- Sammenhænge mellem vindhastigheden og effekten en vindmølle producerer kan beskrives med funktionen $e(v) = 110 \cdot v + 12$ og $4 \text{ m/s} < v < 15 \text{ m/s}$, hvor $e(v)$ er effekten i kW af vindmøllen og v er vindhastigheden i m/s.
- Hastigheden som en bambus vokser med, kan beskrives med funktionen $h(t) = 2,3 \cdot t + 5$ og $1 < t < 20$, hvor $h(t)$ er højden af bambus i cm og t er tiden i dage.
- Sammenhængen mellem antallet af visninger af en video og tiden kan beskrives med funktionen $v(t) = 240 \cdot t$, hvor $v(t)$ er antallet af visninger og t er tiden i timer efter at videoen er lagt på youtube.

2.2.2 Formel og tabel beskrivelse

Man kan benytte formlen til at opstille en tabel over x -værdier og tilhørende y -værdier (i folkeskolen kaldes en tabel ofte for et sildeben) Der udregnes y -værdier for 0 km, 0,5 km, 1 km, 1,5 km,

2 km, 2,5 km, 3 km ved at indsætte i forskriften:

$$\begin{aligned} f(x) &= 25 + x \cdot 20 \\ f(0) &= 25 + 0 \cdot 20 = 25 \\ f(0,5) &= 25 + 0,5 \cdot 20 = 25 + 10 = 35 \\ f(1) &= 25 + 1 \cdot 20 = 45 \\ f(1,5) &= 25 + 1,5 \cdot 20 = 25 + 30 = 55 \end{aligned}$$

osv..

Alle resultaterne kan skrives overskueligt op i en tabel:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	25	35	45	55	65	75	85	95

Bemærk, at det ikke giver mening at indsætte negative værdier for x i denne tabel, da man ikke kan køre et negativt antal kilometer. Funktionen er defineret for positive x -værdier, samt 0. Man siger også at definitionsmængden for funktionen er $[0; \infty[$.

Øvelse 30 Udregn værdien af $f(x)$.

- Bestem $f(3)$ for $f(x) = 9 + 3x$
- Hvis $f(x) = -3x + 9$, hvad er $f(2)$
- Hvis $f(x) = 4x - 8$, hvad er $f(3)$
- Hvis $f(x) = -4 + x$, hvad er $f(-3)$
- Hvis $f(x) = 5 - x$, hvad er $f(-4)$
- Hvis $f(x) = x$, hvad er $f(3)$
- Hvis $f(x) = 9$, hvad er $f(7)$
- Hvis $f(x) = -2x - 4$, hvad er $f(5)$

■ **Eksempel 28** En funktion er givet ved

$$f(x) = 3x - 4$$

Når forskriften for funktionen er kendt kan den uafhængige eller



Video med eksempler på opstilling af tabel ud fra en funktionsforskrift.



Video der viser hvordan uafhængig og afhængig variabel kan beregnes eller aflæses på grafen.

afhængige variabel beregnes når den anden er kendt. Når $x = 5$:

$$f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 = 11$$

Når $f(x) = 8$:

$$8 = 3x - 4 \Leftrightarrow 8 + 4 = 3x \Leftrightarrow 12 = 3x \Leftrightarrow 4 = x$$

Øvelse 31 Udfyld tabellen

a)

x	1	4	
$2x + 1$	-9		9

b)

x	1	8	
$-3x - 1$	14		-13

c)

x	2	5	
$4x + 5$	-11		17

d)

x	3	8	
$-4x + 4$	16		-12

e)

x	3	7	
$3x - 2$	-11		13

f)

x	3	5	
$2x + 4$	-2		14

g)

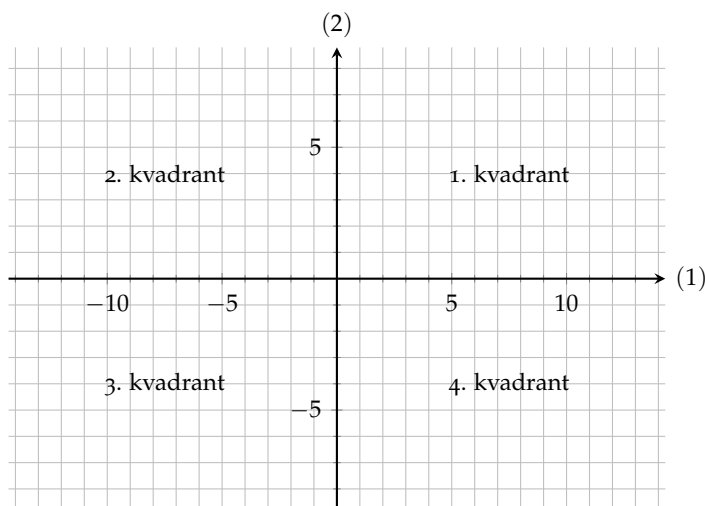
x	2	6	
$-3x + 1$	13		-11

h)

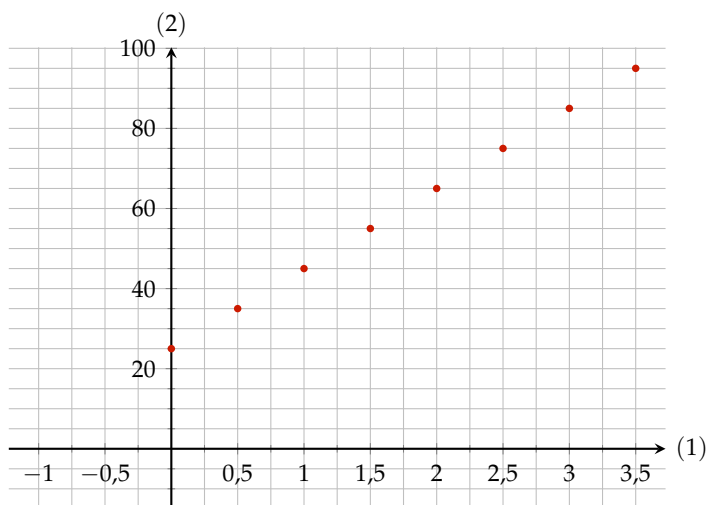
x	2	7	
$5x$	-20		25

2.2.3 Tabel og grafisk beskrivelse

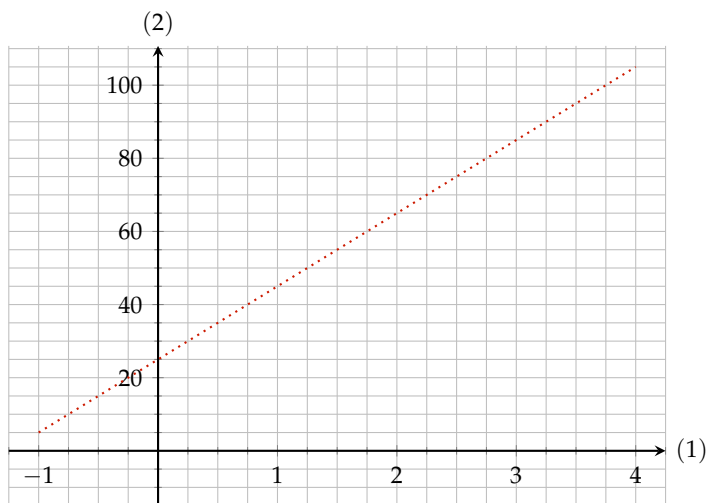
Ud fra tabellen kan man konstruere en graf i et koordinatsystem. Et koordinatsystem består af to talakser, se figur. Talakserne inddeler figuren i fire områder, der kaldes kvadranter. I første kvadrant er både x og y værdierne positive. I andet kvadrant er x værdierne negative og y værdierne er positive. I tredje kvadrant er både x og y værdierne negative og i fjerde kvadrant er x værdierne positive og y værdierne negative.



Den vandrette akse angiver værdien af den uafhængige variabel og kaldes x -aksen, førsteaksen eller (1)-aksen, mens den lodrette akse angiver værdien af den afhængige variabel og kaldes y -aksen, andenaksen eller (2)-aksen. Sammenhængen mellem x og y kan dermed visualiseres ved punkter i koordinatsystemet. Man kan benytte værdierne fra tabellen og markere punkterne $(0, 25)$ og $(0,5, 35)$ osv.



Hvis man havde valgt andre x -værdier kunne man have tilføjet flere punkter til grafen. Det ses, at alle punkterne ligger på en ret linje. Hvis man forestiller sig at man indtegner et lille punkt for alle de uendeligt mange x -værdier, får man den rette linje der ses på næste figur.



Denne rette linje kalder vi grafen for funktionen $f(x)$ og den er altså dannet af alle de samhørende værdier for x og y , der opfylder forskriften.



Video med eksempler på tegning af graf ud fra tabel.

Definition 3 — Graf. Grafen for en funktion består af alle de punkter (x, y) i et koordinatsystem, hvorom det gælder, at $y = f(x)$.

Øvelse 32 Tegn grafen for funktionerne. Det er vigtigt at grafens skæringspunkter med akserne er med på din tegning.

- a) $f(x) = -x + 3$ b) $f(x) = 3x + 1$
 c) $f(x) = -2x + 4$ d) $f(x) = -0,5x - 2$
 e) $f(x) = 2x - 1$ f) $f(x) = x - 4$



Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes eller hvor grafen skal tegnes

Man kan også benytte denne definition, hvis man eksempelvis ønsker at undersøge hvorvidt punktet $(4, 90)$ ligger på grafen. Det skal undersøges, om det er sandt at $f(4) = 90$. Ved at indsætte $x = 4$ i forskriften for $f(x)$ fås:

$$f(4) = 25 + 4 \cdot 20 = 25 + 80 = 105$$

Så punktet $(4, 105)$ ligger på grafen, men det gør punktet $(4, 90)$ altså ikke.

Øvelse 33 Undersøg om punkterne $(5, 120)$ og $(0,1, 27)$ ligger på grafen for $f(x) = 25 + 20 \cdot x$.

■ **Eksempel 29** En kasse koster 2 kr og hver sodavand koster 3 kr. Funktionen kan beskrive en sammenhæng mellem to variable, pris og antal, hvor y er prisen for x sodavand med kasse.

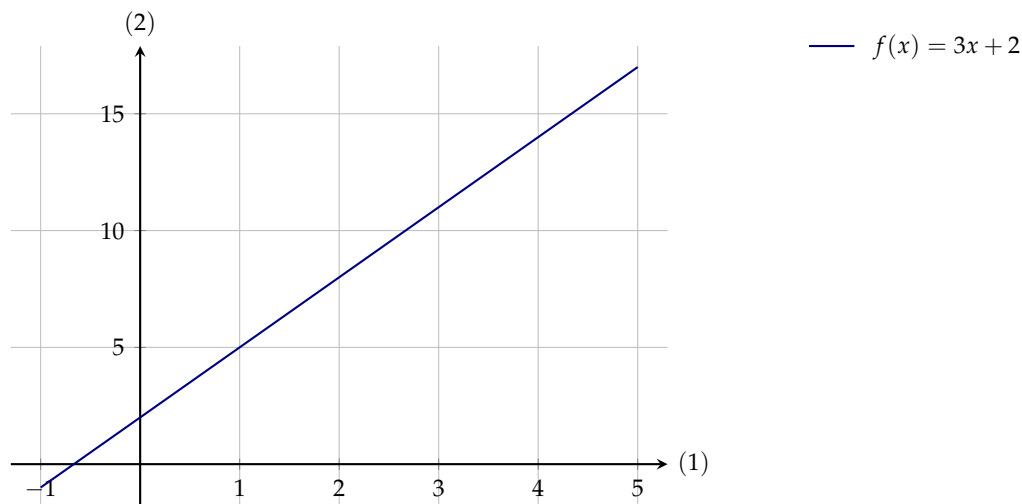
Hver gang vi adderer 1 til x -værdien adderer »funktionen« 3 til y -værdien. Funktionen kaldes $f(x)$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14

Dette kan også udtrykkes ved det som kaldes funktionens forskrift.

$$f(x) = 3x + 2$$

Eller det kan udtrykkes ved det, som kaldes funktionens graf.



■

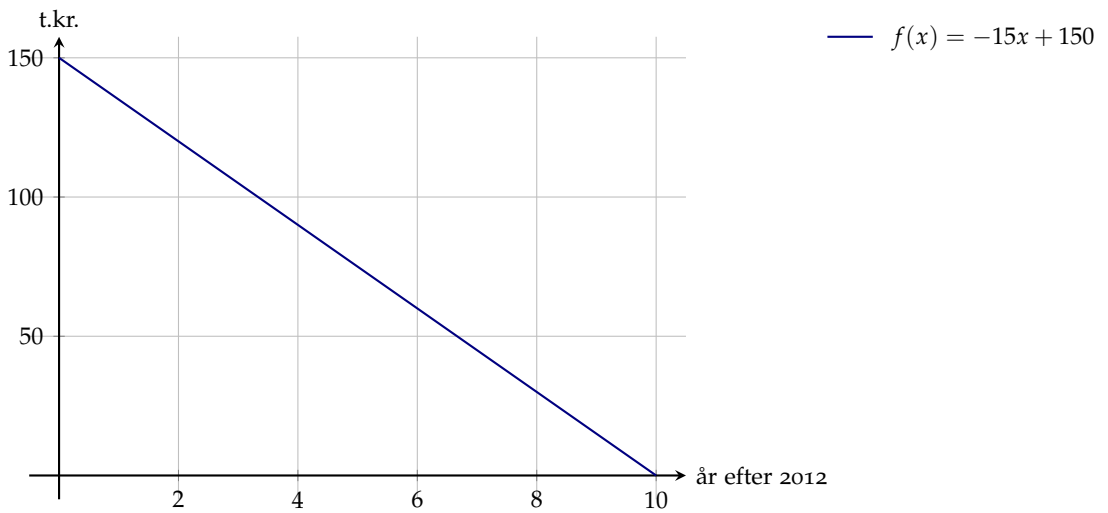
■ **Eksempel 30 — Afskrivning.** En virksomhed købte i 2012 en robot til at samle deres produkt. Robotten kostede 150 t.kr. og værdien af den afskrives med 15 t.kr. om året. Værdien af robotten kan beregnes med forskriften.

$$f(x) = -15x + 150$$

hvor $f(x)$ er værdien af robotten x år efter 2012. I deres årlige regnskab skal værdien af robotten angives. I tabellen ses værdien af robotten i årene 2012-2022.

År	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
År efter køb	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Værdi i t.kr.	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0

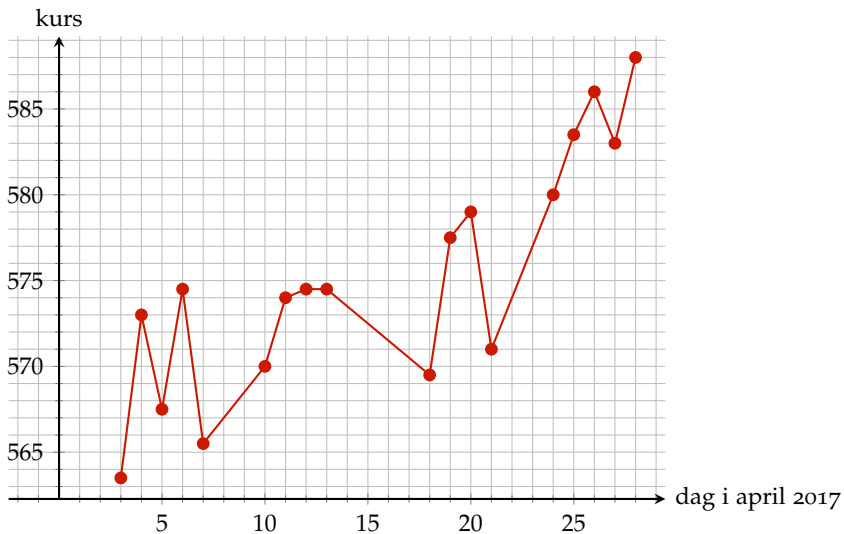
Begyndelsesværdien af robotten er 150 t.kr. og hældningskoefficienten er hvor meget robotten bliver mindre værd hvert år.



■

2.2.4 Ikke lineære sammenhænge

■ **Eksempel 31 — Aktiekurs.** På grafen ses lukkekursen for Vestas Wind Systems A/S i april 2017.



Som det ses på grafen, er der ikke tale om en lineær funktion, derfor kan en forskrift ikke opstilles - endnu. Det er en stykkevis lineær funktion, som vi senere vil fortælle mere om. Men data kan

godt opstilles i en tabel.

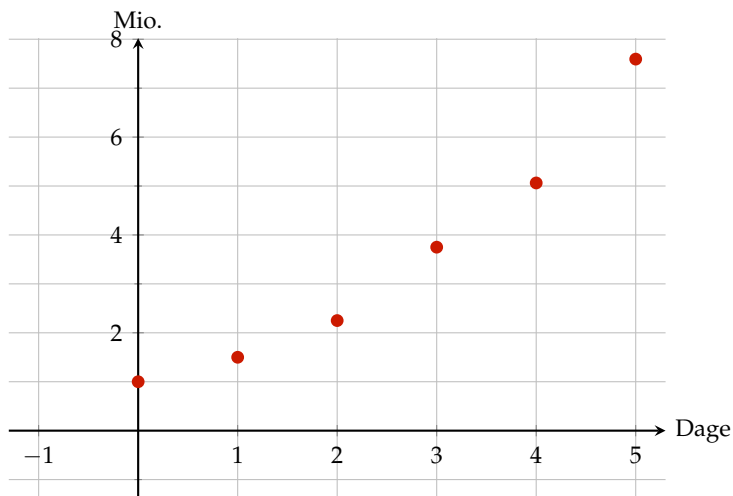
Dato	Kurs	Dato	Kurs
3.	563,5	18.	569,5
4.	573,0	19.	577,5
5.	567,5	20.	579,0
6.	574,5	21.	571,0
7.	565,5	24.	580,0
10.	570,0	25.	583,5
11.	574,0	26.	586,0
12.	574,5	27.	583,0
13.	574,5	28.	588,0

Det er også muligt at sige, at kursen har en voksende tendens, men mere om det senere. ■

■ **Eksempel 32 — Eksponentiel vækst.** På en laboratorium undersøges væksten af nogle bakterier. I forsøget tælles antallet af bakterier i mio. og tiden måles i dage.

Tid i dage	0	1	2	3	4	5
Antal i mio.	1.0	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375

Når data indsættes i et koordinatsystem, ses det tydeligt, at der ikke er tale om en lineær vækst.



Senere ses på dette eksempel igen for at bestemme en forskrift. ■

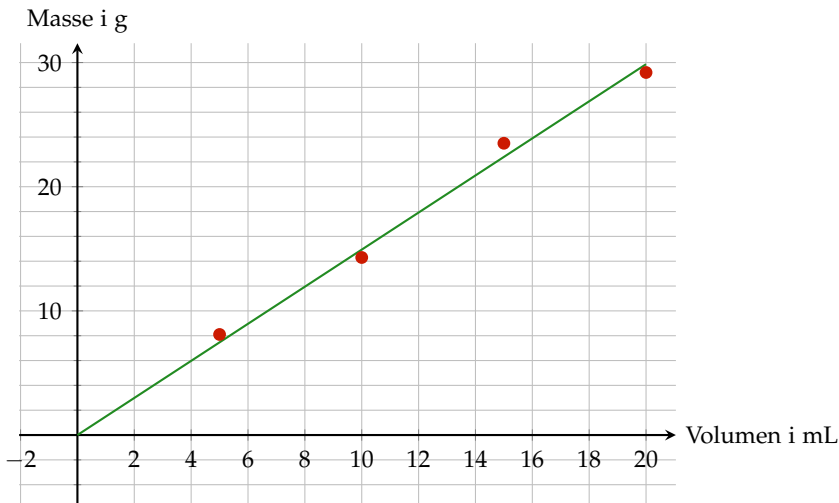
2.3 Lineær regression

I en situation der ikke er teoretisk, er det meget sandsynligt, at andre faktorer og/eller måleusikkerhed påvirker resultaterne, så den observerede sammenhæng ikke helt præcist kan beskrives med en lineær funktion. For at løse dette problem anvendes lineær regression. Ved lineær regression findes den lineære funktion, hvor den gennemsnitlige forskel mellem målingerne og funktionen er mindst muligt.

■ **Eksempel 33 — Eksperiment.** I 1.å har de i fysik lavet et eksperiment, hvor de har målt sammenhængen mellem massen og volumen af en væske. Deres data ses i tabellen herunder.

Volumen i mL	5	10	15	20
Massen i g	8,1	14,3	23,5	29,2

De indtegner deres punkter i et koordinatsystem, hvor de har beskrevet enheden på deres akser. Som det ses ligger punkterne ikke helt på en ret linje.



Forskriften bestemmes ved en metode, der kaldes »mindste kvadraters metode«. Prøv en interaktiv øvelse hvor du bruger denne metode.



For at vurdere om en lineær funktion kan beskrive sammenhæ-

Interaktiv øvelse med mindste kvadraters metode.

gen mellem volumen og massen tegnes et residual-plot. Residual-plottet er en grafisk illustration af afvigelsen mellem de observerede data, og den model som data kunne passe til. Først tilpasses modellen så den passer bedst muligt med de observerede data. Dette gøres ved at finde de bedste værdier for konstanterne i modellen. For den lineære funktion $f(x) = ax + b$ betyder det at værdierne for a og b bestemmes så kvadratet på residualerne bliver mindst mulig. Derefter vurderes modellen ved at se på residualerne.

Definition 4 — Residual. Et residual er forskellen mellem den observerede værdi og den forventede værdi ifølge den bestemte model.

Volumen i mL Uafhængig variabel	Massen i gram Afhængig variabel (observeret)
3	7,1
7	15,3
11	26,1
14	41,7
18	46,8
22	55,2
27	71,6
31	79,4
36	82,1

Den bedste rette linje findes med regression til

$$f(x) = 2,431x + 1,608$$

Denne funktion bruges til at beregne den forventede masse for volumen 3, 7, 11, osv.

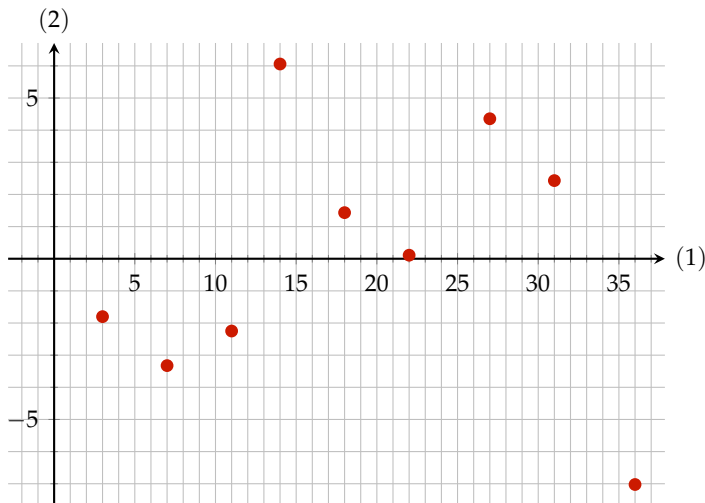
$$f(3) = 2,431 \cdot 3 + 1,608 = 8,901$$

Denne værdi bruges til at beregne residualt

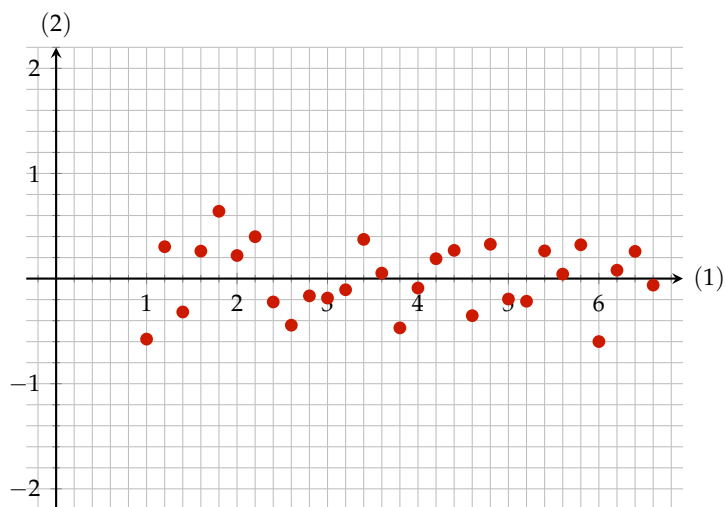
$$\text{residual} = \text{observeret} - \text{forventet} = 7,1 - 8,901 = -1,801$$

Volumen i mL Uafhængig variabel	Massen i gram Afhængig variabel (observeret)	Massen i gram Afhængig variabel (forventet)	Residual observeret - forventet
3	7,1	8,901	-1,801
7	15,3	17,017	-3,325
11	26,1	26,741	-2,249
14	41,7	34,034	6,058
18	46,8	43,758	1,434
22	55,2	53,482	0,110
27	71,6	65,637	4,355
31	79,4	75,361	2,431
36	82,1	87,516	-7,024

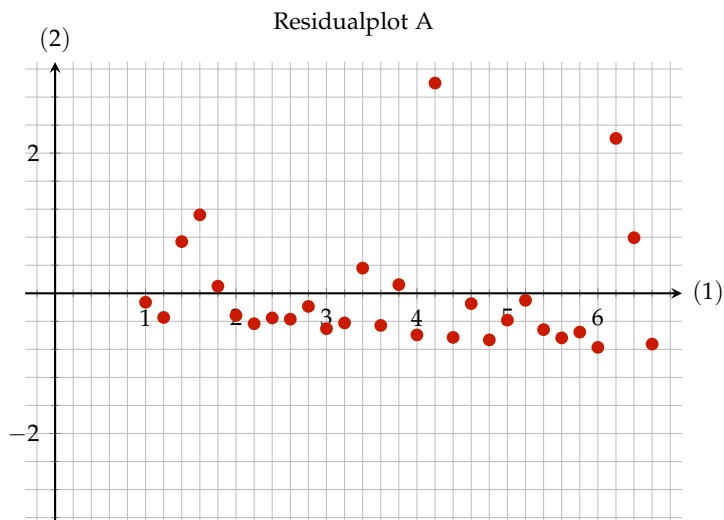
Disse data kan visualiseres i et residual-plot



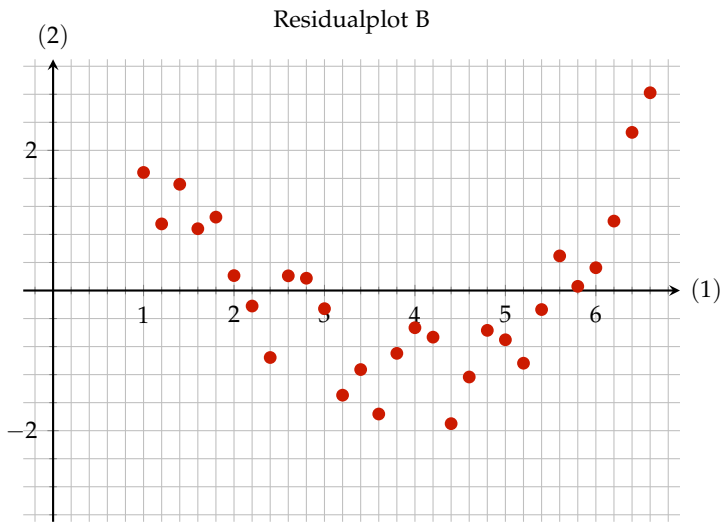
Punkterne i residual-plottet skal være fordelt jævnt om (1)-aksen. På residual-plottet ovenfor er punkterne nogenlunde jævnt fordelt om (1)-aksen men det kunne godt være endnu bedre som på det næste residual-plot. Når punkterne ikke ligger helt på linjen, er der bias i data eller modellen er forkert. Der er bias, hvis punkterne i residualplottet er ligeligt fordelt i positiv og negativ retning, og punkternes fordeling er uafhængig af den uafhængige variabel.



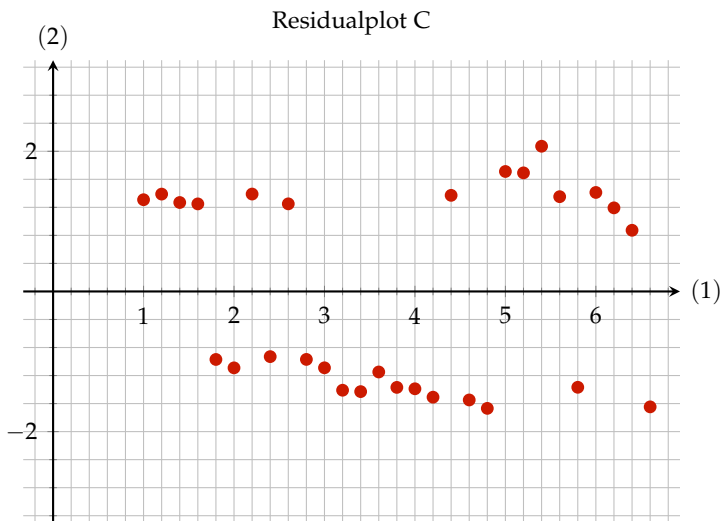
Hvis punkterne ligger i et mønster om (1)-aksen er der to muligheder. Modellen er forkert eller der er en variabel, der ikke er taget hensyn til (bias).



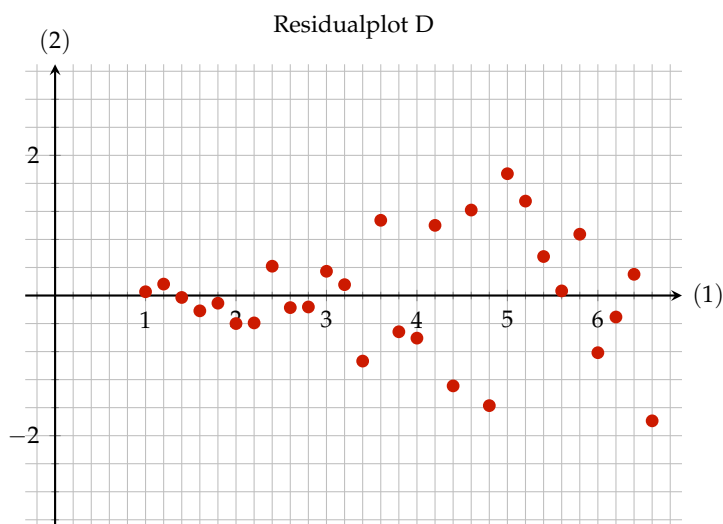
I residualplot A ligger der flere punkter under end over (1)-aksen, men punkterne over (1)-aksen ligger længere væk fra (1)-aksen. Dette tyder på, at bias næsten kun påvirker målingerne i en positiv retning.



I residualplot B ligger punkterne ført over, så under og så over (1)-aksen. Bias afhænger derfor af den uafhængige variabel og modellen er derfor forkert.



I residualplot C ligger punkterne langt fra (1)-aksen, men bias afhænger ikke af den uafhængige variabel.



I residualplot D ligger punkterne først med en lille spredning om (1)-aksen og derefter med en stor spredning om (1)-aksen. Bias afhænger derfor af den uafhængige variabel. Der er derfor tale om en forkert model.

Øvelse 34 Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b i den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ og tegn det tilhørende residualplot og vurder om den lineære funktion er en god model for sammenhængen mellem den uafhængige variabel (x) og den afhængige variabel ($y = f(x)$) og overvej om nogle af observationerne afviger særligt meget, og overvej desuden modellens rækkevide.

- a) Udviklingen i antallet af visninger af en video på youtube ses i tabellen.

Timer efter oplad	1	2	3	4	5
Antal visninger	14	29	40	62	69

- b) I tabellen ses udviklingen i procentdel af befolkningen i Danmark der bor i byer.

Årstal	1955	1960	1970	1975	1980
Procentdel	69,6	73,7	79,7	82,1	83,7

Kilde: Globalis.dk

- c) I tabellen ses udviklingen i strømforbrug i kWt pr. indbygger i Danmark.

Årstal	1962	1975	1995	2006	2013
kWh pr. indb.	1356	3415	6425	6825	6040

Kilde: Globalis.dk

- d) I tabellen ses sammenhængen mellem vindhastigheden i m/s og en vindmølles effekt i kW.

Vindhastighed i m/s	8	11	13	15	21
Effekt i kW	110	350	510	610	600

Kilde: <http://www.windpower.org/da>

2.4 Teori om lineære funktioner

I et tidligere afsnit var fokus at omskrive forskellige repræsentationer for en lineær funktion. I dette afsnit foretages en mere teoretisk behandling af lineære funktioner.

Definition 5 — Forskrift for lineær funktion. En funktion med regneforskrift:

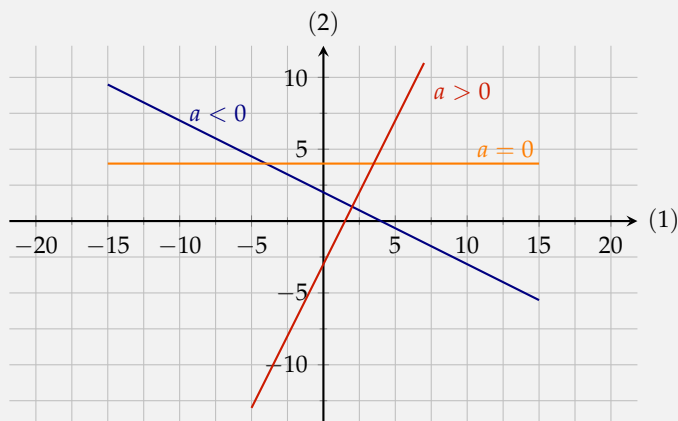
$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor a kaldes hældningskoefficienten og b kaldes konstantledet er en lineær funktion.

2.4.1 Sammenhæng mellem graf og a og b

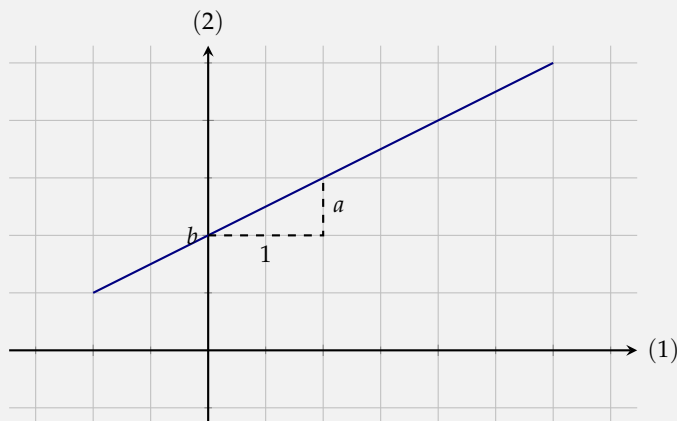
I et tidligere afsnit påstod vi, at grafen for en lineær funktion var en ret linje der ikke er lodret. Nu vil vi bevise at det er sådan. Konstanterne a og b i den lineære funktion $f(x) = ax + b$ og grafen for den lineære funktion hænger sammen.

Sætning 2 Når a er positiv er grafen voksende og når a er negativ er grafen aftagende, hvis a er nul er grafen konstant/ vandret/ parallel med (1)-aksen.



Interaktiv øvelse med sammenhængen mellem a og b og grafens hældning og skæringspunkt med y -aksen.

Sætning 3 — Betydning af konstanterne. Når x vokser med 1 vokser $f(x) = ax + b$ med a og kaldes derfor grafens hældningskoefficient og $(0, b)$ er grafens skæringspunkt med 2.-aksen.



Interaktiv øvelse med sammenhængen mellem a og b og grafen.

■ **Bevis** Når x vokser med 1, så vokser $f(x) = ax + b$ med a , hvilket betyder at:

$$f(x + 1) = f(x) + a$$

For at vise denne påstand beregnes $f(x + 1)$. $f(x) = ax + b$ anvendes i starten og slutningen.

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= a(x + 1) + b \\ &= ax + a + b \\ &= ax + b + a \\ &= f(x) + a \end{aligned}$$

Nu er det vist, at når x -værdien vokser med 1, vokser y -værdien med a . Hvis a er negativ er der tale om et fald i funktionsværdien og grafen er aftagende.

Nu skal det vises, at b er y -værdien til skæringspunktet med y -aksen. På y -aksen er $x = 0$, hvilket indsættes i funktionen $f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b \\ &= 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

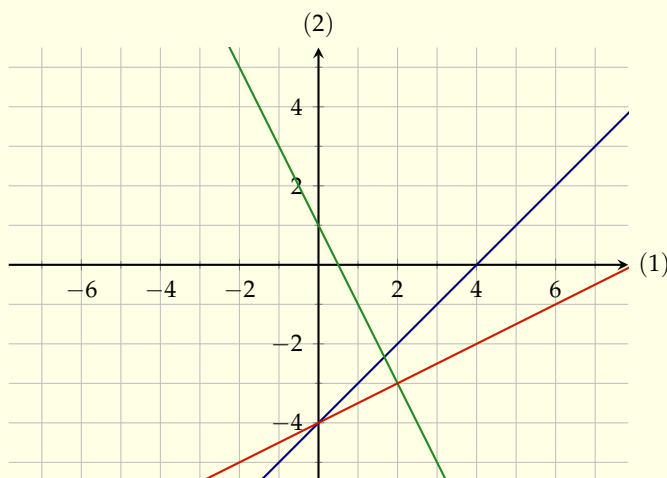
■

Øvelse 35 På figuren ses tre grafer. Giv flere forskellige argumenter for hvilken af disse tre forskrifter de er graf af.

$$f(x) = -2x + 1$$

$$g(x) = x - 4$$

$$h(x) = 0,5x - 4$$



Øvelse 36 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrat og bestem forskriften for den.

Øvelse 37 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrat og går gennem punktet $(5, -2)$ og bestem forskriften for den.

Øvelse 38 Tegn grafen for en aftagende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2, 1)$ og bestem forskriften for den.

Øvelse 39 Tegn grafen for en voksende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2, 1)$ og bestem forskriften for den.

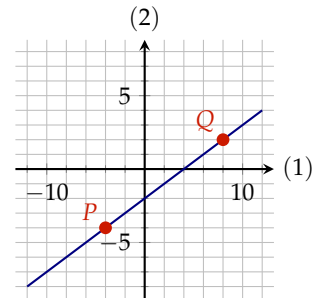


Opgaver med fokus på betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb.

2.4.2 Bestem forskrift ud fra to punkter

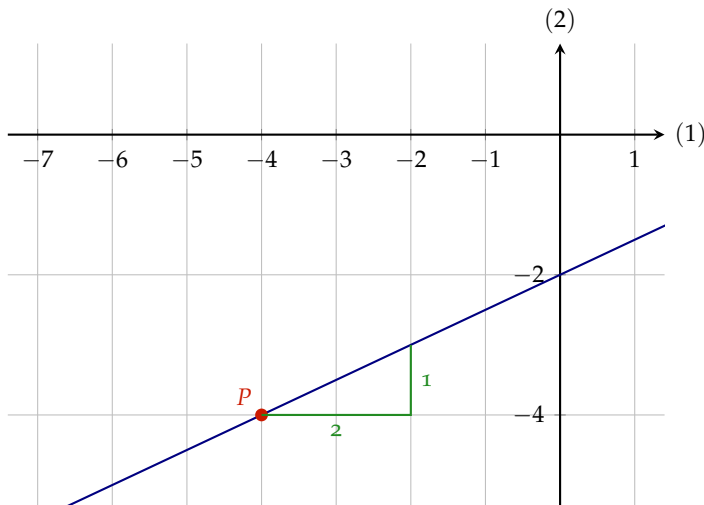
Når man har to punkter i en plan kan man altid tegne en ret linje gennem punkterne, og det kan kun gøres på én måde.

■ **Eksempel 34** Punkterne $P(-4, -4)$ og $Q(8, 2)$ er afsat i et koordinatsystem og linjen gennem dem er tegnet.



Hvis punkterne ligger "pænt" kan man aflæse a og b ud fra koordinatsystemet.

■ **Eksempel 35** Man kan her nogenlunde se, at $a = \frac{1}{2}$, dvs. at man går $\frac{1}{2}$ op, når man går 1 til højre. For at tjekke det kan man i stedet gå 2 til højre og se, at man nu går 1 op. Det stemmer. a kan aflæses til $\frac{1}{2}$ og b til -2 .

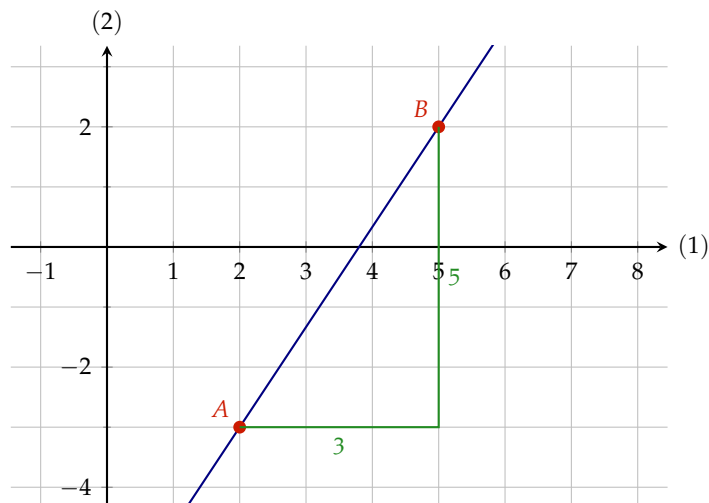


Man kan komme ud for, at det er vanskeligere at aflæse a .

Øvelse 40 En ret linje går gennem punkterne $P(-4, -4)$ og $Q(8, 2)$.

- Aflæs a og b på grafen.
- Angiv ligningen for grafen.
- Undersøg om punkterne $(6, 1)$, $(12, 5)$ og $(-14, -10)$ ligger på grafen.

■ **Eksempel 36** En linje går gennem punkterne $A(2, -3)$ og $B(5, 2)$. Vi vil gerne bestemme a og b . Først tegnes punkterne ind i et koordinatsystem og linjen gennem dem tegnes.



Det ser ud til, at hældningskoefficienten a er ca. 1,7, men det må undersøges nærmere. Vi tegner derfor en retvinklet trekant, hvor hypotenusen er AB og kateterne er lodret og vandret. Vi kan nu se, at når vi går 3 til højre, vil vi gå 5 op. Hvis vi kun går 1 til højre, må vi altså gå $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ op. Hældningskoefficienten er derfor $a = \frac{5}{3}$. Man finder altså a ved at dividere det lodrette stykke med det vandrette stykke. ■

Det generelle tilfælde kan beskrives ved følgende matematiske sætning.

Sætning 4 — Topunks-formlen for en lineær funktion. Den rette linje gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ har ligningen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

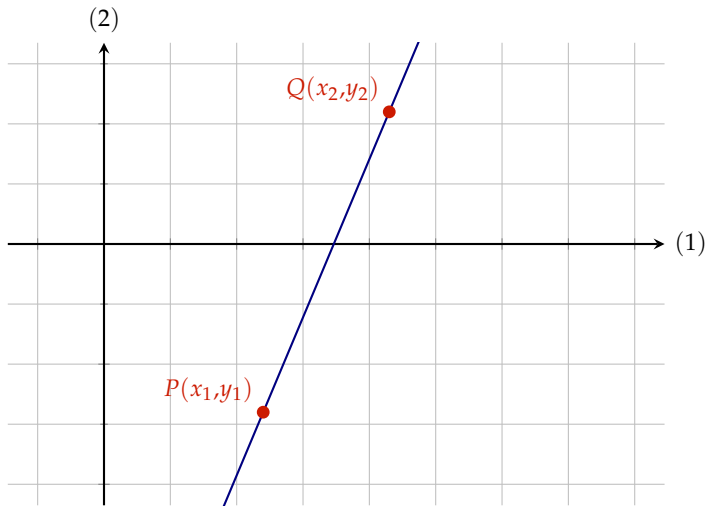
■ **Bevis** Linjen går gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$. Det betyder, at når punkternes koordinater indsættes i linjens ligning $y = a \cdot x + b$ bliver udtrykket sandt.



Interaktiv øvelse hvor forskriften bestemmes ud fra to punkter.



Videogennemgang af bevis og eksempel



Vi har altså: $y_1 = a \cdot x_1 + b$ og $y_2 = a \cdot x_2 + b$. Vi trækker de to ligninger fra hinanden. Her bruger vi parenteser for ikke at lave fortegnstegn.

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

Først hæves parenteserne

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

Leddene $+b$ og $-b$ går ud med hinanden

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

De to led på højre siden af lighedstegnet har begge a som faktor. Vi kan derfor sætte a udenfor en parentes.

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Vi kan nu isolere a ved at dividere med $(x_2 - x_1)$ på begge sider af lighedstegnet.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Eller med andre ord at $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Konstanten b findes ved at indsætte det ene punkt i ligningen. Der er nu kun en ubekendt b i ligningen.

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \Leftrightarrow y_1 - a \cdot x_1 = b$$

Hermed er også b bestemt. ■

Dette resultat stemmer også med eksemplet, idet hældningen jo blev bestemt ved at tage "tilvæksten i y " delt med "tilvæksten i x ". Det kan man også skrive:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vi ser igen på eksemplet fra før.

■ **Eksempel 37** En linje går gennem punkterne $A(2, -3)$ og $B(5, 2)$. Vi navngiver $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ og indsætter i formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-3)}{5 - 2} = \frac{5}{3}$$

$$b = y_1 - ax_1 = -3 - \frac{5}{3} \cdot 2 = -\frac{9}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{19}{3}$$

Ligningen for den rette linje er altså $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$. ■

Øvelse 41 Grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ går gennem de to punkter $A(-2, 5)$ og $B(4, -1)$. Bestem en forskrift for f .

Øvelse 42 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne, bestem forskriften for f .

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) (3,6) og (2,4) | b) (5,1) og (15,2) |
| c) (2,4) og (4,3) | d) (8,7) og (12,28) |
| e) (4,4) og (6,2) | f) (-2,4) og (8,5) |
| g) (5,11) og (70,52) | h) (2, -4) og (-5,3) |

Øvelse 43 Bestem forskriften for lineær funktion med hældning 2, hvor grafen går gennem punktet (3,7).

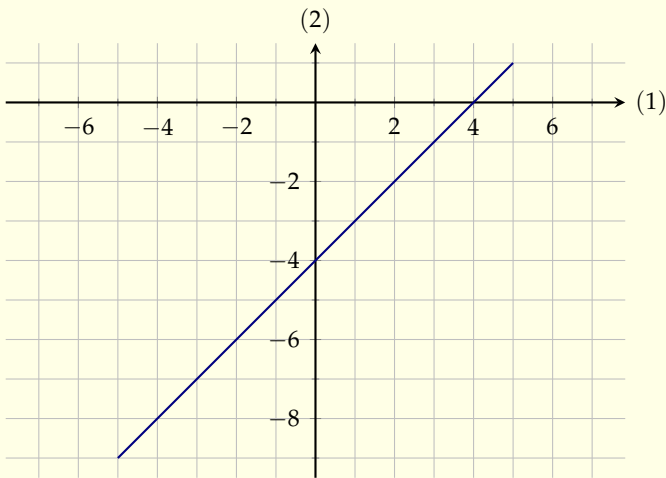


Videogennemgang af eksempel på beregning af a og b .

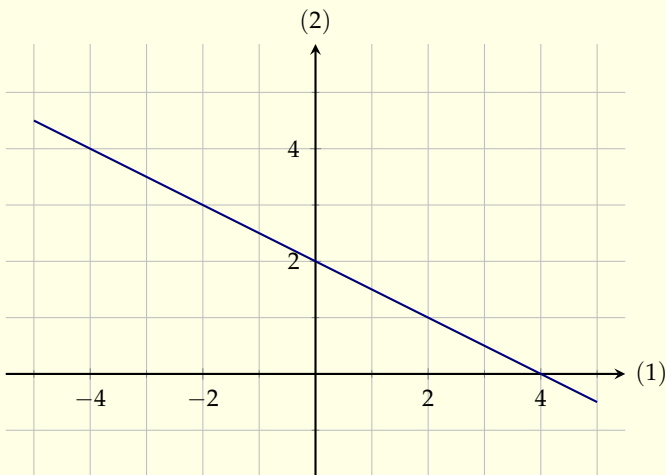


Opgaver hvor forskriften skal bestemmes og to punkter er kendt.

Øvelse 44 Bestem forskriften for funktionen hvis graf ses på figuren.



Øvelse 45 Bestem forskriften for funktionen hvis graf ses på figuren.



Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en lineær funktion ud fra grafen.



Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra grafen.

Øvelse 46 Jeg har været ud at køre med taxa to gange. Den ene gang kørte jeg 11 km og betalte 120 kr og den anden gang kørte jeg 16 km og betalte 150 kr.

Bestem startgebyret og kilometertaksten.

2.5 Proportionalitet

Definition 6 — Proportional. De to variable x og y siges at være ligefrem proportional, hvis $y = k \cdot x$ eller

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = k \cdot x$$

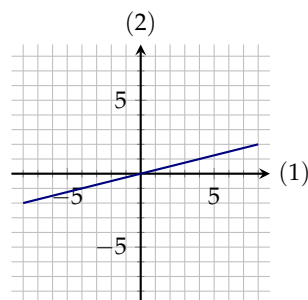
Proportional betyder at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.

■ **Eksempel 38** p er ligefrem proportional med y med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{4}$. Det betyder at

$$p = \frac{1}{4} \cdot y$$

Øvelse 47 Oversæt disse sætninger til matematiske formler

- v er ligefrem proportional med k med proportionalitetsfaktoren q .
- y er ligefrem proportional med summen af r og q .
- r er ligefrem proportional med differensen af n og m med proportionalitetsfaktoren 6.
- f er ligefrem proportional med forholdet mellem p og q .
- Energien e er ligefrem proportional med lysets hastighed c i anden, med proportionalitetsfaktoren m for massen.
- Udnyttelsen af energien E i sollyset er ligefrem proportional med kvadratet på overflade arealet O af solcellerne.

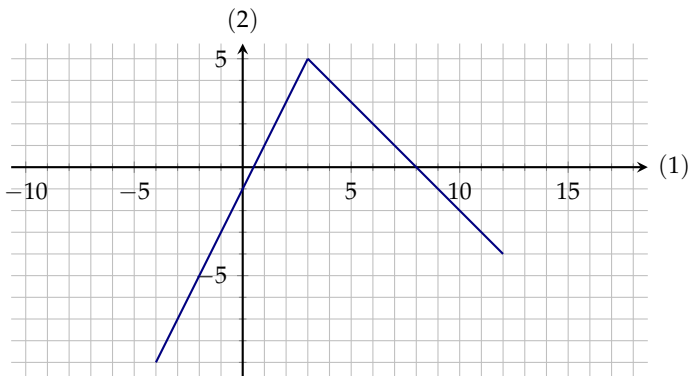


Video med eksempel på ligefrem proportionalitet

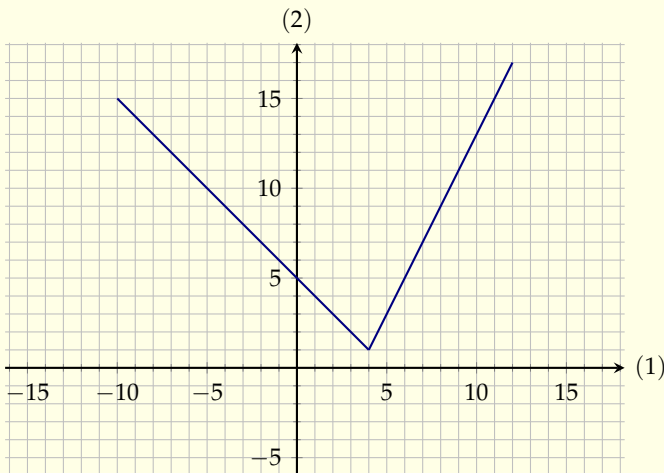
2.6 Stykkevis lineær

En funktion kan være stykkevis lineær. Det betyder at den består af flere forskellige lineære funktioner.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3 \\ -x + 8, & x > 3 \end{cases}$$



Øvelse 48 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f .



Aflæs på grafen hvor $f(x) = 3$ og $f(10)$.

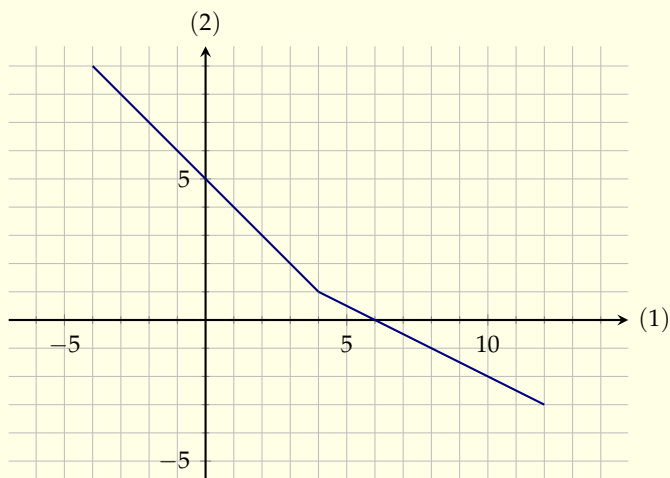
Øvelse 49 Tegn grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 6 \\ 2x - 4, & x > 6 \end{cases}$$

Øvelse 50 Tegn grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 3 \\ -x + 6, & x > 3 \end{cases}$$

Øvelse 51 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f .



Bestem en forskrift for f .

3

Ligninger

En ligning er et udtryk, der indeholder et lighedstegn, og udtrykket kan enten være sandt eller falsk. Nedenfor ses et eksempel på først en sand og dernæst en falsk ligning:

$$\begin{array}{ll} 5 = 5 & \textit{sand} \\ -2 = 3 & \textit{falsk} \end{array}$$

Oftest indeholder en ligning en ubekendt størrelse, hvilket ses i ligningen nedenfor, hvor x indgår som en ubekendt.

$$x - 2 = 5$$

Det er underforstået, at x angiver et tal. Hvis x vælges til at være lig 7, det vil sige $x = 7$, fås ligningen $7 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $5 = 5$; da dette er sandt, siges $x = 7$ at være løsning til ligningen. Hvis x derimod vælges til at være lig 3, det vil sige $x = 3$, fås ligningen $3 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $1 = 5$; da dette er falsk, er $x = 3$ ikke løsning til ligningen.

I ligningen nedenfor ses et eksempel på en ligning, hvor det er ligegyldigt hvilken værdi x erstattes med – ligningen er sand ligegyldigt hvad:

$$x - 3 = -3 + x$$

Alle tal er altså løsning til ligningen, og vi skriver da løsningen som $x \in \mathbb{R}$.

I nedenstående ligning giver alle værdier af x en falsk ligning (prøv dig gerne frem):

$$x - 2 = x + 2 \quad \textit{falsk}$$

Ligningen har derfor ingen løsning.

3.1 Algebraisk løsning af ligninger

At løse en ligning betyder, at alle de værdier af den ubekendte, der gør ligningen sand, skal findes.

Når en ligning skal løses gælder følgende *meget vigtige* grundlæggende regler:

1. Det samme tal må lægges til eller trækkes fra på begge sider af lighedstegnet.
2. Det samme tal må ganges eller divideres på begge sider af lighedstegnet, så længe tallet er forskelligt fra 0.

■ **Eksempel 39** Løsning af ligningen $3x - 4 = -19$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -19 \\ \Leftrightarrow 3x - 4 + 4 &= -19 + 4 \text{ der lægges } 4 \text{ til på begge sider} \\ \Leftrightarrow 3x &= -15 \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{3} &= \frac{-15}{3} \text{ der divideres med } 3 \text{ på begge sider} \\ \Leftrightarrow x &= -5 \end{aligned}$$

Som eksemplet ovenover illustrerer, samles først alle led, der indholder x , på den ene side og alle led, der kun indeholder tal, på den anden side. Derefter divideres med det tal, der står foran x , på begge sider af lighedstegnet. Det bemærkes, at der undervejs kun er benyttet de regler til løsning af ligninger, der blev nævnt ovenfor.

Tegnet \Leftrightarrow kaldes »ensbetydende med« eller »biimplikation« og placeres mellem hver omskrivning; det viser, at en gammel ligning erstattes af en ny ligning, som har nøjagtig de samme løsninger som den foregående.

■ **Eksempel 40** Løsning af ligningen $-2x + 10 = 3x$.

$$\begin{aligned} -2x + 10 &= 3x \\ \Leftrightarrow -2x + 10 + 2x &= 3x + 2x \text{ der lægges } 2x \text{ til på begge sider} \\ \Leftrightarrow 10 &= 5x \\ \Leftrightarrow \frac{10}{5} &= \frac{5x}{5} \text{ der divideres med } 5 \text{ på begge sider} \\ \Leftrightarrow 2 &= x \end{aligned}$$

I eksempel 40 ses løsningen $2 = x$. Denne angivelse er korrekt,



Video med eksempel på løsning af en ligning.

ligesom hvis der skrives $x = 2$. Et lighedstegn kan læses både fra højre og venstre.

■ **Eksempel 41** Løsning af ligningen $5x - 7 = 2x - 5$.

$$\begin{aligned} 5x - 7 &= 2x - 5 \\ \Leftrightarrow 5x - 7 - 2x &= 2x - 5 - 2x && \text{der trækkes } 2x \text{ fra på begge sider} \\ \Leftrightarrow 3x - 7 + 7 &= -5 + 7 && \text{der lægges } 7 \text{ til på begge sider} \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{3} &= \frac{2}{3} && \text{der divideres med } 3 \text{ på begge sider} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

I eksempel 41 ses det, at en brøk er løsning til ligningen. En løsning må meget gerne skrives som en brøk, og det er ikke nødvendigt at omskrive brøken til et decimaltal.

Øvelse 52 Løs ligningen $3x + 4 = 7 - 2x$.

■ **Eksempel 42** Løsningen af ligningen $2 - 6x = -9 - 4x$.

$$\begin{aligned} 2 - 6x &= -9 - 4x \\ \Leftrightarrow 2 - 6x + 9 &= -9 - 4x + 9 \\ \Leftrightarrow 11 - 6x + 6x &= -4x + 6x \\ \Leftrightarrow \frac{11}{2} &= \frac{2x}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{11}{2} &= x \end{aligned}$$

Når du er blevet lidt mere øvet, må du gerne lave flere omskrivninger på én gang. Et eksempel er ligningen, der løses ovenfor i dette eksempel; nedenfor er den løst med færre mellemregninger, men det er vigtigt, at du først begynder på det, når du har helt styr på reglerne til ligningsløsning.

$$\begin{aligned} 2 - 6x &= -9 - 4x \\ \Leftrightarrow 11 &= 2x \\ \Leftrightarrow \frac{11}{2} &= x \end{aligned}$$

Øvelse 53 Løs ligningerne.

a) $6x = 3$ b) $3x + 4 = 5$ c) $-2x + 3 = -4$



Opgaver med førstegrads-
ligninger med hele tal.

$$\text{d) } \frac{3}{2}x + 4 = 5 \quad \text{e) } \frac{1}{2}x + 4 = 5x \quad \text{f) } 9x + 4 = 5x$$

$$\text{g) } x - 2 = 2x + 5 \quad \text{h) } 5x - 4 = 2x + 5 \quad \text{i) } 7x + 3 = x - 5$$

■ **Eksempel 43** Løsningen af ligningen $3(x - 2) = 4 - 2x$.

$$\begin{aligned} 3(x - 2) &= 4 - 2x \\ \Leftrightarrow 3x - 6 &= 4 - 2x && \text{der ganges ind i parentesen} \\ \Leftrightarrow 3x - 6 + 6 &= 4 - 2x + 6 \\ \Leftrightarrow 3x + 2x &= 10 - 2x + 2x \\ \Leftrightarrow \frac{5x}{5} &= \frac{10}{5} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

I eksempel 43 ses et eksempel, hvor der indgår en parentes. Er det tilfældet, skal du først gange ind i parentes, inden du begynder på de klassiske omskrivninger.

■ **Øvelse 54** Løs ligningen $3(x + 4) = 7 - 2x$.

■ **Eksempel 44** Det er sjovt at arbejde med brøker, men uden hjælpemidler volder det problemer, hvis man ikke gør sig umage. Derfor er det altid en god ide, når en ligning indeholder en brøk, at gange ligningen igennem med den nævner, der indgår i brøken. Det er i så fald naturligvis meget vigtigt at gange igennem med tallet på begge sider – reglerne skal jo overholdes. Det er illustreret nedenfor:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{2}{3}x &= 3x + 5 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \left(3 - \frac{2}{3}x\right) &= 3 \cdot (3x + 5) && \text{der ganges med 3 på begge sider} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{2}{3}x &= 3 \cdot 3x + 3 \cdot 5 && \text{der ganges ind i parenteserne} \\ \Leftrightarrow 9 - 2x &= 9x + 15 \\ \Leftrightarrow -6 &= 11x \\ \Leftrightarrow -\frac{6}{11} &= x \end{aligned}$$

■ **Øvelse 55** Løs ligningen $\frac{1}{2}x + 4 = 7 - 2x$.



Video med eksempel på løsning af ligning med minusparentes.



Opgaver med ligninger der indeholder en parentes.

■ **Eksempel 45** I dette lidt mere komplicerede eksempel indgår der igen brøker. Brøkerne har forskellig nævner og derfor ganges der igennem med produktet af nævnerne.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + x &= \frac{1}{3}x + 2 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{5}{4} + x\right) &= 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 2\right) \text{ der ganges med } 3 \cdot 4 \text{ på begge sider} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 5 + 12x &= 4 \cdot x + 12 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 15 + 12x &= 4x + 24 \\ \Leftrightarrow 8x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

■ **Øvelse 56** Løs ligningen $x + \frac{1}{4} = 7 - 2x$.

■ **Eksempel 46** Her ses et eksempel på en ligning, hvor alle værdier af x vil løse ligningen.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2x - 3) &= 4x - 6 \\ \Leftrightarrow 4x - 6 &= 4x - 6 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning er sand for alle værdier af x , vil alle værdier af x være en løsning af ligningen.

■ **Eksempel 47** Her ses et eksempel på en ligning uden nogen løsning:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2x - 4) &= 4x - 6 \\ \Leftrightarrow 4x - 8 &= 4x - 6 \\ \Leftrightarrow -8 &= -6 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning ikke er sand for nogle værdier af x , er der ingen løsning til ligningen.

Ligninger kan bruges til at løse nogle problemer med procent. Kendes prisen på en vare efter at rabatten er fratrukket, kan en ligning opstilles til at udregne prisen inden rabatten blev fratrukket.

■ **Eksempel 48** Bestem den oprindelige pris på et par bukser, der koster 400 kr med 20% rabat. Den oprindelige pris er ukendt, hvorfor den gives symbolet x . Nu kan udregningen af prisen efter rabat

beregnes, som i afsnittet om procent.

$$-x \cdot \frac{20}{100} + x = 400 \quad 0,8x = 400$$

Denne ligning kan løses med den samme metode som de tidligere ligninger.

$$\begin{aligned} & -x \cdot \frac{20}{100} + x = 400 \\ \Leftrightarrow & -x \cdot \frac{2}{10} + x = 400 \quad \text{brøken forkortes} \\ \Leftrightarrow & 10 \cdot \left(-x \cdot \frac{2}{10} + x \right) = 10 \cdot 400 \quad \text{der ganges med 10} \\ \Leftrightarrow & -x \cdot 2 + 10x = 4000 \quad \text{parentesen hæves} \\ \Leftrightarrow & 8x = 4000 \quad \text{der reduceres} \\ \Leftrightarrow & \frac{8x}{8} = \frac{4000}{8} \quad \text{der divideres med 8} \\ \Leftrightarrow & x = 500 \end{aligned}$$

Prisen på bukserne inden rabatten var 500 kr. ■

Øvelse 57 Bestem prisen inden moms (25%) på en vare der koster 200 kr.

3.2 Isolering af en ubekendt i en ligning

Der kan være mere end én ubekendt i en ligning. I sådanne tilfælde er der ofte behov for at isolere en af størrelserne. I eksemplet nedenfor er x og y ubekendte, og her ønskes x isoleret.

$$3y = 5x + 7$$

dvs. få x til at stå alene på den ene side af lighedstegnet.

$$\begin{aligned} 3y - 7 &= 5x + 7 - 7 && \text{Først trækkes 7 fra på begge sider.} \\ \Leftrightarrow 3y - 7 &= 5x && \text{Derefter divideres med 5.} \\ \Leftrightarrow \frac{3y - 7}{5} &= \frac{5x}{5} && \text{Dette reduceres.} \\ \Leftrightarrow \frac{3y - 7}{5} &= x && \text{Nu er } x \text{ isoleret.} \end{aligned}$$



Video med eksempel på isolering af en variabel i en ligning.

Øvelse 58 Isolér x i ligningerne.

a) $3x = 6y$

b) $b = 2 - x$

c) $2q = 3x + 7$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } 8x = 4x - 7 & \text{e) } 3 - ax = 4x & \text{f) } ax = 4x - c \\ \text{g) } a = \frac{2c}{x-d} & \text{h) } y = 3x + 5 & \text{i) } 4x + 3y = 4 \end{array}$$

3.3 Ligninger med flere løsninger

En anden type af ligninger er dem som er bygget op af faktorer og som er lig 0, fx

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

her er løsningen nem at finde ved at bruge nulreglen.

Sætning 5 — Nulreglen. Et produkt er 0 hvis og kun hvis mindst en af faktorerne er 0.

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

■ **Eksempel 49** Ligningen $(x + 3)(x - 5) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} (x + 3)(x - 5) = 0 &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5 \end{aligned}$$

■ **Eksempel 50** Ligningen $3 \cdot (x - 2)(8 + x) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x - 2)(8 + x) = 0 &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee 8 + x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -8 \end{aligned}$$

■ **Eksempel 51** Ligningen $(x^2 + 3)(x - 4) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} (x^2 + 3)(x - 4) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \vee x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -3 \vee x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Da x^2 aldrig kan være negativ så har ligningen kun denne ene løsning.

■ **Eksempel 52** Ligningen $x \cdot (x^2 - 7)(x + 4) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 - 7)(x + 4) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 7 = 0 \vee x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 7 \vee x = -4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} \vee x = -4 \end{aligned}$$

Da både $\sqrt{7}$ og $-\sqrt{7}$ løser ligningen $x^2 = 7$, har ligningen fire løsninger. ■

Øvelse 59 Løs ligningerne.

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x - 2)(x + 1) = 0$ | b) $(x + 5)(x - 9) = 0$ |
| c) $5(x - 3)(x + 1) = 0$ | d) $x(x + 2)(x - 5) = 0$ |
| e) $(x^2 - 9)(x + 2) = 0$ | f) $(x + 5)(x - 7)(x + 1) = 0$ |
| g) $(x^2 + 2)(x^2 + 3) = 0$ | h) $x(x + 2)(x^2 + 2)(x^3 - 1) = 0$ |

3.4 Ligningsløsning med funktioner

Kendes regneforskriften og en værdi for funktionen, kan x -værdien bestemmes, ved at løse en ligning.

■ **Eksempel 53** Lad $f(x) = 5 + 2x$ og $f(x) = 3$, bestem x . Først opstilles ligningen $3 = 5 + 2x$. Denne løses

$$3 = 5 + 2x \Leftrightarrow 3 - 5 = 2x \Leftrightarrow \frac{3 - 5}{2} = x \Leftrightarrow x = -1$$

■ **Eksempel 54** Lad $f(x) = 3 - 2x$ og $f(x) = -5$, bestem x . Først opstilles ligningen $-5 = 3 - 2x$. Denne løses

$$-5 = 3 - 2x \Leftrightarrow -5 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{-5 - 3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 4$$

■ **Eksempel 55** Lad $f(x) = -2x + 3$ og $f(x) = 3$, bestem x . Først

opstilles ligningen $3 = -2x + 3$. Denne løses

$$3 = -2x + 3 \Leftrightarrow 3 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{3-3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 0$$

■ **Eksempel 56** Lad $f(x) = -3 + x$ og $f(x) = 3$, bestem x . Først opstilles ligningen $3 = -3 + x$. Denne løses

$$3 = -3 + x \Leftrightarrow 3 + 3 = x \Leftrightarrow x = 6$$

■ **Eksempel 57** Lad $f(x) = 3$ og $f(x) = 8$, bestem x . Først opstilles ligningen $3 = 8$ Denne ligning har ingen løsning. ■

Øvelse 60 Beregn x -værdien.

a) $f(x) = -8 + 2x$ og $f(x) = 4$.

b) $f(x) = 1 + x$ og $f(x) = 5$.

c) $f(x) = 8 - 2x$ og $f(x) = 12$.

d) $f(x) = -12 + 2x$ og $f(x) = -2$.

e) $f(x) = 1 - 4x$ og $f(x) = -1$.

f) $f(x) = 8 + 5x$ og $f(x) = -7$.

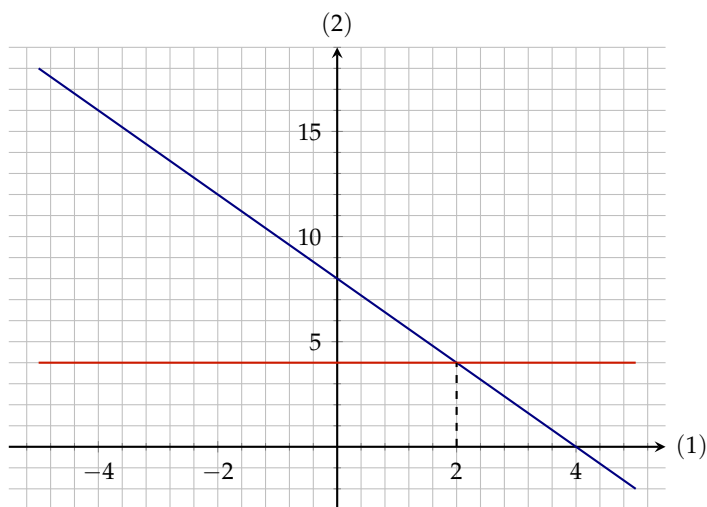
g) $f(x) = 35 - 4x$ og $f(x) = 3$.

h) $f(x) = 3x$ og $f(x) = 0$.

3.5 Grafisk løsning af ligninger

En ligning kan også løses grafisk.

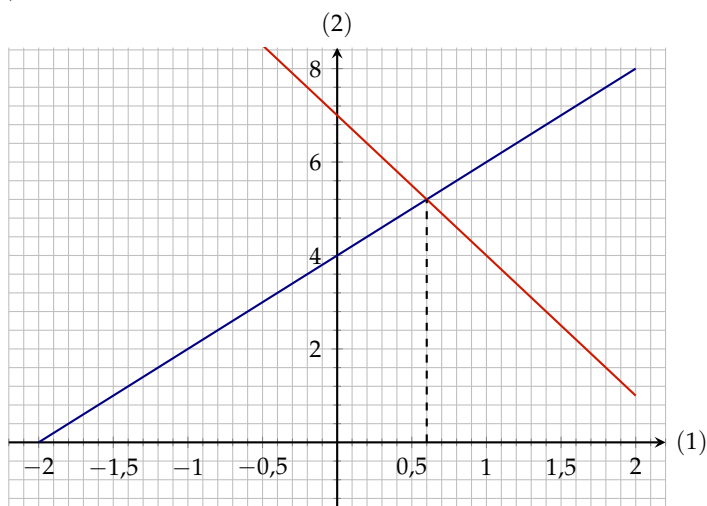
■ **Eksempel 58** Ligningen $-2x + 8 = 4$ kan repræsenteres grafisk ved at se på grafen for de to funktioner $v(x) = -2x + 8$ og $h(x) = 4$ for venstre og højre side.



$$\begin{aligned} \text{---} & v(x) = -2x + 8 \\ \text{---} & h(x) = 4 \end{aligned}$$

Løsningen til ligningen er førstekoordinaten til skæringspunktet mellem de to grafer. I dette eksempel er løsningen $x = 2$. ■

■ **Eksempel 59** Ligningen $2x + 4 = -3x + 7$ kan repræsenteres grafisk ved at se grafen for de to funktioner $v(x) = 2x + 4$ og $h(x) = -3x + 7$



$$\begin{aligned} \text{---} & v(x) = 2x + 4 \\ \text{---} & h(x) = -3x + 7 \end{aligned}$$

■

Øvelse 61 Løs ligningerne grafisk.

a) $2x - 4 = -0,5x + 1$

b) $-x + 1 = 2x + 7$

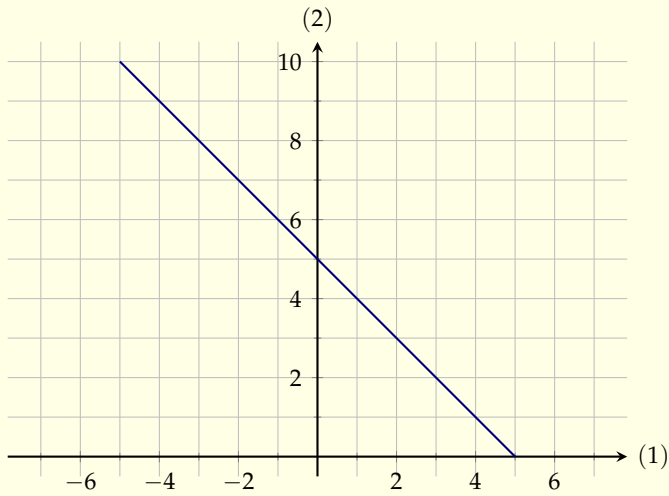
c) $4x - 1 = -x + 9$

d) $x - 2 = x - 1$



Opgaver med grafisk løsning af ligninger.

Øvelse 62 Figuren viser en del af grafen for en lineær funktion.



Bestem $f(-4)$ og løs ligningen $f(x) = 2$.

Formelsamling

Brøker

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d} \quad \text{Addition og subtraktion}$$

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad \text{Multiplikation}$$

$$\frac{a}{d} / \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{Division}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{a \cdot c} \quad \text{Forlæng og forkort}$$

Potenser

$$x^s \cdot x^t = x^{s+t}$$

$$\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$$

$$(x^s)^t = x^{s \cdot t}$$

$$(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^s = \frac{x^s}{y^s}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-s} = \frac{1}{x^s}$$

$$\sqrt[s]{x} = x^{\frac{1}{s}}, \text{ hvor } x > 0$$

$$\sqrt[s]{x^t} = x^{\frac{t}{s}}, \text{ hvor } x > 0$$

Parenteser

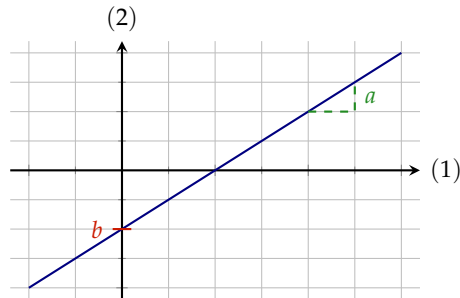
$$x \cdot (a + b) = a \cdot x + b \cdot x \quad \text{Distributive lov}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \quad \text{1. Kvadratsætning}$$

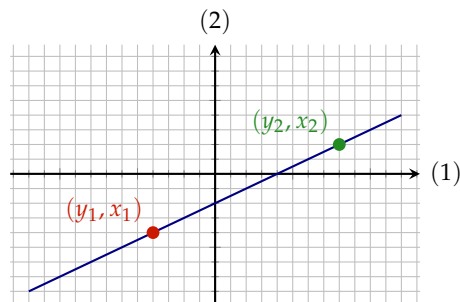
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \quad \text{2. Kvadratsætning}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{3. Kvadratsætning}$$

Lineære funktioner



$$f(x) = a \cdot x + b$$



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{Hældningskoefficient}$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 \quad \text{2. Skæringspunktet med 1. akse er } (0, b)$$

$$a > 0 \quad \text{Funktionen er voksende}$$

$$a = 0 \quad \text{Funktionen er konstant}$$

$$a < 0 \quad \text{Funktionen er aftagende}$$

Ligninger

$$x + y = z \Leftrightarrow x + y + a = z + a \quad \text{Ligning adderet med } a$$

$$x + y = z \Leftrightarrow x + y - a = z - a \quad \text{Ligning subtraheret med } a$$

$$x + y = z \Leftrightarrow ax + ay = az \quad \text{Ligning multipliceret med } a$$

$$x + y = z \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{z}{a} \quad \text{Ligning divideret med } a$$

Multiplikationstabel

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

ISBN 978-87-93632-00-4



9 788793 632004