Dennis Pipenbring

Matematik C-niveau

- stx 2017

MATX.DK

2017

Har du brug får hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.

https://www.youtube.com/dennispipenbring

På min hjemmeside

http://matx.dk

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

Matematik C-niveau - stx 2017

1. udgave

Udgivet af matX ApS

Forord

1. udgave af matematik C og 1. år af B og A-niveau.

Indhold

1

Deskriptiv statistik

I en verden med en endeløs strøm af data, skal data systematiseres og ordnes for at få overblik. Overblikket giver mulighed for at træffe de gode beslutninger. Beslutninger der fører til det gode liv.

Deskriptiv statistik er et redskab til at beskrive et datamateriale. Ofte vil et datamateriale være for omfattende til, at det er muligt at overskue og konkludere noget om det blot ved at se på selve datamaterialet. Derfor er der udviklet forskellige metoder, modeller og tabeller, som gør det muligt at overskue store mængder af data, og på baggrund af disse modeller og tabeller er det muligt at drage konklusioner på baggrund af datamaterialet. Hvis man ikke forstår at læse tabeller og hvis man ikke ved, hvordan man skal forstå de statistiske begreber, kan man *ikke* selv drage konklusioner eller forstå andres konklusioner. Så man vil meget let blive snydt når man læser, hører eller ser andres udtalelser, når disse tager udgangspunkt i statistisk materiale.

Som eksempel på anvendelse af deskriptiv statistik ses på ulighed. Ulighed mellem mennesker er en rejse i tid og rum. Når man er ung og studerende har man en lille indkomst og en lille eller ingen formue måske enda en lille gæld. Når man lige har etableret sig med hus, bil og børn og lige er begynd at arbejde, har man en større indkomst og en stor gæld. Når man er blevet ældre og har haft en del år med egen virksomhed eller på arbejdsmarkedet som lønmodtager, har man en stor indkomst og en lille gæld og måske også en formue. Når man er gået på pension har man en lille indkomst og en stor formue. Hvordan skal man så måle den økonomiske ulighed?

1.1 *Observation og hyppighed*

Den mindste enhed i et datasæt er en observation. Det kan være observationer af næsten alt hvad, man kan tænke sig, her ses på disponibel personlig indkomst fra http://statistikbanken.dk/INDKP106 fra år 2015.

Indkomst	*Hyppighed*
Under 25.000 kr.	272 999
25.000 - 49.999 kr.	136 641
50.000 - 74.999 kr.	172 592
75.000 - 99.999 kr.	250 438
100.000 - 124.999 kr.	325 072
125.000 - 149.999 kr.	382 402
150.000 - 174.999 kr.	464 507
175.000 - 199.999 kr.	413 384
200.000 - 224.999 kr.	389 041
225.000 - 249.999 kr.	359 977
250.000 - 299.999 kr.	573 285
300.000 - 349.999 kr.	361 536
350.000 - 399.999 kr.	209 702
400.000 - 449.999 kr.	120 056
450.000 - 499.999 kr.	70 366
500.000 kr. og derover	161 659
I alt	4 663 657

Tabel 1.1: Personlig disponibel indkomst med hyppighed.

For at gøre det lidt mere enkelt inddeles i 6 indkomstintervaller.

■ **Eksempel 1** Antallet af personer med en indkomst under 100 000 kr beregnes ved at lægge de første fire indkomstintervaller sammen.

$$272\,999 + 136\,641 + 172\,592 + 250\,438 = 832\,670$$

■

Øvelse 1 Beregn antallet af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 400 000 kr

Indkomst	*Hyppighed*
Under 100 000 kr.	832 670
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303
300 000 - 400 000 kr.	571 238
400 000 - 500 000 kr.	190 422
500 000 kr. og derover	161 659
I alt	4 663 657

Tabel 1.2: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed.

Øvelse 2 Opstil fire tilsvarende hyppighedstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug tabellen http://statistikbanken.dk/INDKP106.

1.2 *Frekvens*

Definition 1 Frekvensen er hyppigheden divideret med det totale antal observationer.

$$\text{Frekvensen} = \frac{\text{Hyppigheden}}{\text{Det totale antal observationer}} \cdot 100\%$$

Video der forklare beregning af frekvens.

■ **Eksempel 2** Frekvensen af personer med en indkomst under 100 000 kr.

$$\frac{832\,670}{4\,663\,657} \cdot 100\% \approx 17{,}85\%$$

■

Øvelse 3 Beregn frekvensen af personer med en indkomst mellem 300 000 kr og 400 000 kr.

Det er en fordel at bruge et IT-værktøj, hvis der skal laves flere beregninger og særligt hvis der skal tegnes diagrammer. Her introduceres Maple som IT-værktøj. Det er særligt vigtigt at bemærke at i Maple bruges decimal punktum. Statiskbanken bruger punktum som tusindtalsseparator, og det betyder, at tal der i statistikbanken står som 50.000, i Maple skal skrives 50000 uden punktum. Statiskbanken bruger decimal komma, og det betyder at der i statiskbanken står 54.623,75, i Maple skal det skrives 54623.75 uden tusindtalsseparator og med decimal punktum.

En anden vigtigt notation i Maple er notationen for et interval. I statiskbanken står der 25.000 - 50.000, i Maple skal de skrives 25000..50000. Der bruges altså to punktummer i stedet for en streg.

Bemærk at der ikke er en øvre og nedre græse i statistikbanken. Disse grænser skal senere bruges i beregninger og derfor vælges 0 kr som den nedre grænse og 1 000 000 som den øvre grænse.

Maple

```
with(Gym):
```

$$\mathtt{data:=}\begin{bmatrix} 0\,..\,100000 & 832670 \\ 100000\,..\,200000 & 1585365 \\ 200000\,..\,300000 & 1322303 \\ 300000\,..\,400000 & 571238 \\ 400000\,..\,500000 & 190422 \\ 500000\,..\,1000000 & 161659 \end{bmatrix}$$

```
frekvensTabel(data, output = tabel)
```

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 100000	832670	17.85	17.9
100000 .. 200000	1585365	33.99	51.8
200000 .. 300000	1322303	28.35	80.2
300000 .. 400000	571238	12.25	92.5
400000 .. 500000	190422	4.083	96.5
500000 .. 1000000	161659	3.466	100

Det er værd at bemærke at summen af frekvenserne altid skal være 100 %. Hvis det ikke er tilfældet, er der lavet en regnefejl.

Video der viser hvordan der kan arbejdes med grupperede observationer i Maple.

Øvelse 4 Opstil frekvenstabeller for de 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug hyppighedstabellerne fra tidligere.

Øvelse 5 Kommentér forskellen mellem indkomsten for de fire aldersgrupper. Hvorfor er det vigtigt at omregne til frekvens (procent)?

Indkomst	*Hyppighed*	*Frekvens (%)*
Under 100 000 kr.	832 670	17,85
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365	33,99
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303	28,35
300 000 - 400 000 kr.	571 238	12,25
400 000 - 500 000 kr.	190 422	4,083
500 000 kr. og derover	161 659	3,466
I alt	4 663 657	100

Tabel 1.3: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed og frekvens.

1.3 Gennemsnit

Det samlede gennemsnit udregnes ved at gange gennemsnittet med frekvensen for hvert interval og lægge resultaterne sammen.

Kendes gennemsnittet ikke for de enkelte intervaller anvendes intervalmidtpunkterne til udregningen af det samlede gennemsnit.

■ **Eksempel 3** Gennemsnittet af den personlige disponible indkomst

$$17{,}85 \cdot 50\,000 + 33{,}99 \cdot 150\,000 + \cdots = 218\,044$$

Den gennemsnitlige personlige indkomst er 218 044 kr. ■

Video der forklarer hvordan gennemsnit kan beregnes.

Bemærk at middeltallet skal være et tal der ligger mellem det højeste og det laveste tal i datasættet, ellers er der lavet en regnefejl.

Øvelse 6 Bestem de gennemsnitlige indkomster for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen gennemsnit bruges.

Maple

```
with(Gym):
gennemsnit(data)
```

218043.790527477

1.4 *Kumulerede frekvenser*

Den kumulerede frekvens af en observation er frekvensen af alle observationer mindre end observationen.

Hvis den kumulerede frekvens af den største observationsværdi er 100 %, i hvert fald hvis der ikke er lavet en fejl.

Video der viser hvordan kumulerede frekvenser bestemmes.

■ **Eksempel 4** Den kumulerede frekvens for en disponibel personlig indkomst på 400 000 kr. er

$$17{,}85 + 33{,}99 + 28{,}35 + 12{,}25 = 92{,}5$$

Det betyder at 92,5% af personerne har en disponibel personlig indkomst under 400 000 kr. Der er derfor 7,5 % der har en disponibel personlig indkomst over 400 000 kr. ■

Tabel 1.4: Personlig disponibel indkomst i intervaller med hyppighed, frekvens og kumuleret frekvens.

Indkomst	*Hyppighed*	*Frekvens (%)*	*Kumuleret (%)*
Under 100 000 kr.	832 670	17,85	17,85
100 000 - 200 000 kr.	1 585 365	33,99	51,84
200 000 - 300 000 kr.	1 322 303	28,35	80,19
300 000 - 400 000 kr.	571 238	12,25	92,44
400 000 - 500 000 kr.	190 422	4,083	96,523
500 000 kr. +	161 659	3,466	99,989
I alt	4 663 657	100	

Øvelse 7 Bestem den kumulerede frekvens for en disponibel personlig indkomst på 200 000 kr.

Øvelse 8 Bestem de kumulerede frekvenser for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige. Brug frekvenstabellerne fra tidligere.

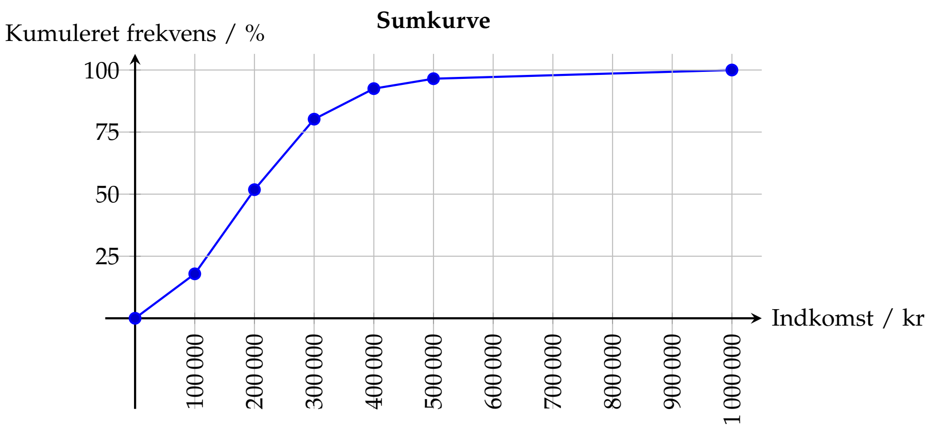
1.5 *Diagrammer*

Et diagram er en grafisk måde at illustrere data på. Her ses på tre diagrammer.

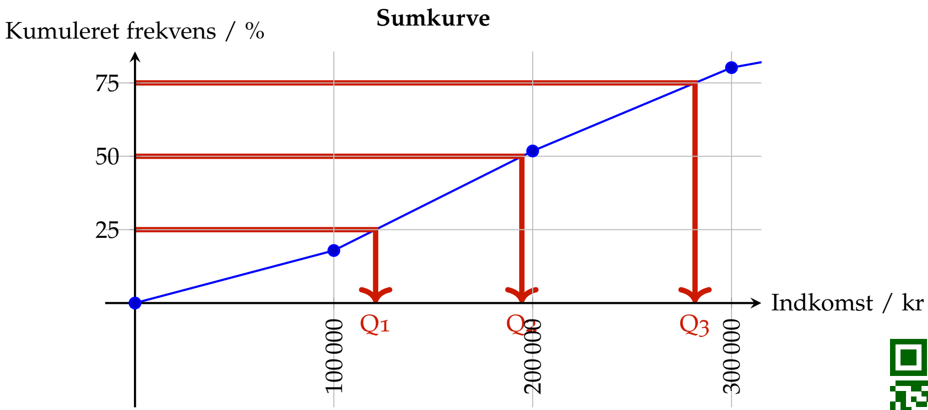
1.5.1 *Sumkurve*

Sumkurven tegnes ved at afmærke den summerede frekvens som y-værdien og endepunkterne af de tilhørende intervaller som x-værdien i et koordinatsystem. Der ud over afmærkes startpunktet af det første interval på x-aksen, som i dette tilfælde er 0. På grafen er disse punkter markeret med •. Herefter sættes streger mellem punkterne.

Video der viser hvordan sumkurven tegnes.



Kvartilerne aflæses ved at gå fra hhv. 25 %, 50 % og 75 % på y-aksen til kurven og derefter ned på x-aksen og aflæse kvartilerne.



Video der viser hvordan kvartilerne aflæses.

Symbol	*Kvartil*	*Indkomst*
Q1	Nedre kvartil	121 020 kr.
Q2	Median	194 560 kr.
Q3	Øvre kvartil	281 650 kr.

I Maple kan gennemsnittet også beregnes. Er Gym-pakken og data indlæst, kan kommandoen plotSumkurve bruges.

Maple
```
plotSumkurve(data)
```

En sumkurve kan også anvendes til at aflæse hvor mange procent der er indenfor et givet interval. På sumkurven ses at 35% har en indkomst der er 150 000 kr. eller under og der er 66% der har en indkomst der er 250 000 kr. eller under. Ved at trække de to procenttal fra hinanden, fås det at 31% har en indkomst mellem 150 000 kr. og 250 000 kr.

Øvelse 9 Tegn sumkurven og aflæs kvartilerne for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

Øvelse 10 Udregn hvor mange procent af de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige der har en indkomst mellem 150.000 kr. og 250.000 kr.

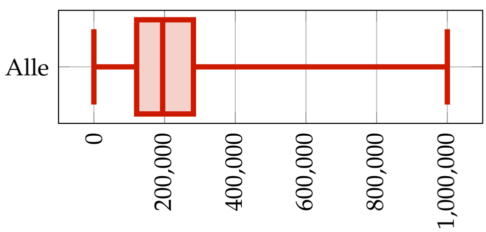
Øvelse 11 Fattigdomsgrænsen kan fx sættes ved 50% af median-indkomsten.

1. Hvad er så fattigdomsgrænsen for den personlige disponible indkomst i kr.?
2. Hvor mange procent af personerne er så fattige?
3. Bestem fattigdomsgrænsen for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

1.5.2 *Boksplot*

Boksplot kan tegnes udfra, den mindste og den største observationsværdi i datasættet og kvartilsættet.

Deskriptor	*Indkomst (kr.)*
Mindste værdi	0
Første kvartil	121 020
Anden kvartil / median	194 560
Tredje kvartil	281 650
Største værdi	1 000 000



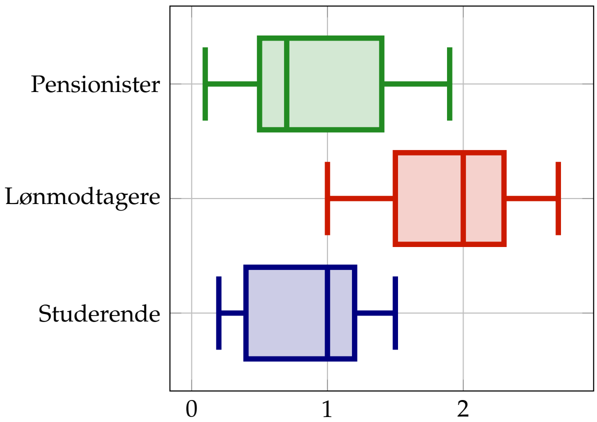
Formålet med boksplottet er at se fordelingen af indkomsterne. I boksplottet inddeles data i fire lige store dele. 25 % af personerne ligger mellem mindste værdi og første kvartil og 25 % af personerne ligger mellem første og anden kvartil osv.

Hvis data er indlæst kan en boksplot i Maple tegnes med kommandoen boksplot.

Video der forklarer hvordan et boksplot tegnes.

Maple
```
with(Gym):
boksplot(data)
```

Meget ofte anvendes boksplottet til at sammenligne to eller flere datasæt. Ét kvartilsæt bestemmes for hver af datasæt, og boksplottene tegnes i samme koordinatsystem.



Skal to boksplot sammenlignes og er data indlæst som dataA og dataB kan boksplot også benyttes.

Maple
```
with(Gym):
boksplot(dataA,dataB)
```

Skal tre eller flere boksplot skal tegnes kan Statistics-pakken bruges med kommandoen BoxPlot. Her skal mindste observationsværdi, første kvartil, anden kvartil, tredje kvartil og største observationsværdi indtastes.

$$\text{BoxPlot}([\text{min}, Q1, Q2, Q3, \text{max}])$$

Med denne kommando er det også muligt at sætte labels på data. Det er også muligt at sætte særligt farver på boksene, se Maples hjælpefunktion.

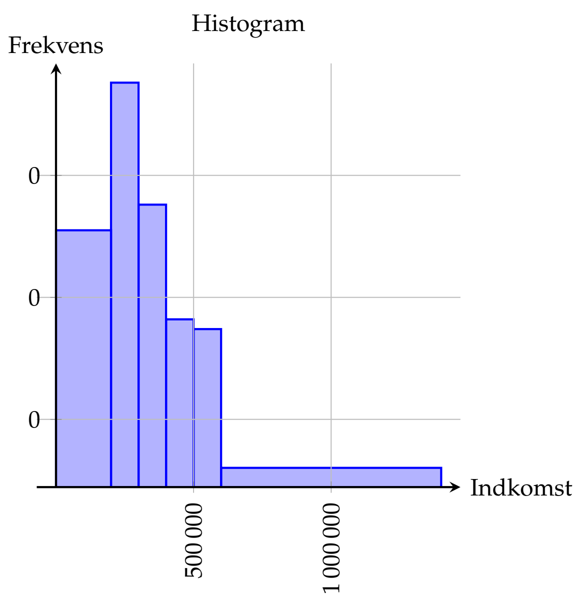
Maple
```
with(Statistics):
BoxPlot([[1,2,3,4,6], [1.4, 3, 5, 6.5, 9], [3.4, 4.5,
   5, 6, 7]], datasetlabels = [Studerende, Lønmodtagere,
   Pensionist])
```

Øvelse 12 Tegn boksplottet for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige i samme koordinatsystem.

Øvelse 13 Kommentér forskellen i indkomsten for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige med udgangspunkt i boksplottet.

1.5.3 *Histogram*

I histogrammet skal bredden af søjlerne være intervallængden og højden er intervalfrekvensen divideret med intervallængden.



Histogrammet tegnes i Maple med kommandoen plotHistogram, der er i Gym-pakken og data skal være indlæst.

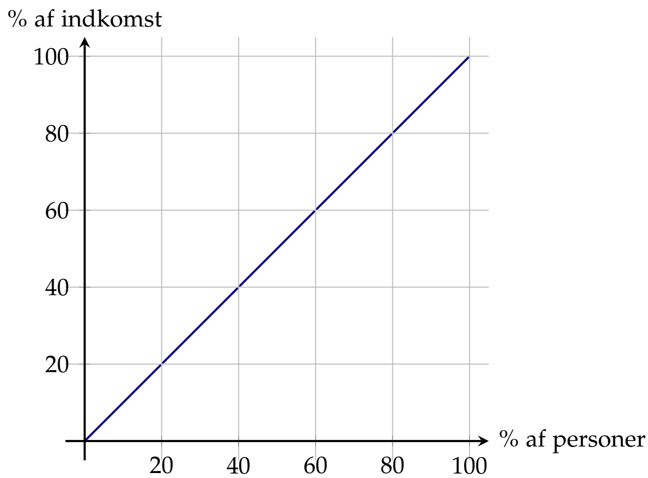
Maple
```
with(Gym):
plotHistogram(data)
```

Øvelse 14 Tegn histogrammet for de fire aldersgrupper 15-24 årige, 25-39 årige, 40-64 årige og 65+ årige.

Øvelse 15 Hvad kan siges udfra histogrammet for de fire aldersgrupper?

1.5.4 *Lorenzdiagram og Gini koefficient*

Lorenzdiagrammet viser hvor stor uligheden er fx i forhold til indkomsten. I figuren herunder er der fuldstændig lighed idet de 10 % af personer, som har den laveste indkomst, også har 10 % af den samlede disponible indkomst. Og 20 % af personer, der har den laveste indkomst, også har 20 % af den samlede disponible indkomst osv. Sagt på en anden måde: Alle tjener det samme.



For at tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koefficienten anvendes tabellen http://statistikbanken.dk/IFOR21. Der har decilgrænserne for 1. til 9. decil. I decilfordelingen er befolkningen inddelt efter indkomst i ti lige store grupper, sådan at de 10 % med den laveste indkomst er i den 1. decil og de næste 10 % ligger i 2. decil. En decilgrænse er den indkomst der ligger mellem to deciler. For eksempel er 157 851 kr de beløb der ligger mellem 2. og 3. decil. Det betyder at 20 % af befolkningen tjener mindre end dette beløb og 80 % tjenener mere end dette beløb. Se også Danmarks Statistiks publikation »Decilgrupper og decilgrænser« fra September 2017 (3 sider).

Decil	*Decilgrænse 2015*
1. decil	125997
2. decil	157851
3. decil	180497
4. decil	205139
5. decil	230140
6. decil	256941
7. decil	288152
8. decil	329248
9. decil	399606

For at kunne tegne Lorenzdiagrammet og beregne Gini koefficienten skal der være en øvre grænse for den 10. decil. I tabel http://statistikbanken.dk/IFOR31 kan gennemsnittet findes for alle 10 deciler og det giver en idé om hvad en fornuftig øvre grænse for 10. decil kan være. Prøv at ændre den øverste grænse fx til 800 000 og se hvad det gør ved Lorenzkurven.

Fordi grupperne indeholder det samme antal personer, kan tallene bruges direkte til at tegne Lorenzdiagrammet. Det er altså ikke nødvendigt at beregne den samlede indkomsten for den enkelte gruppe, ved at gange gennemsnittet med antallet af personer i gruppen. Derefter beregne den samlede indkomst for hele befolkningen, ved at lægge den samlede indkomst for hver af grupperne sammen. For så derefter at beregne den enkeltes gruppes andel af den samlede indkomst. Havde grupperne indholdt forskellige antal personer, skulle der have været korrigeret for dette.

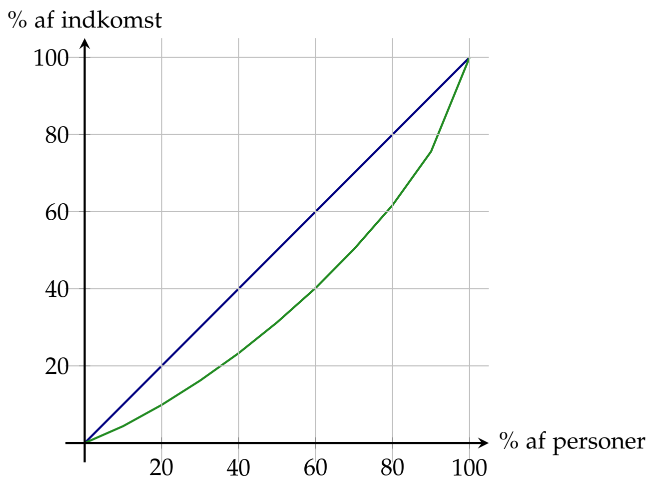
I Maple kan kommandoen plotLorenzdiagram bruges på data fra statistikbanken. Bemærk, at det er de kumulerede frekvenser, der skal bruges i kommandoen plotLorenzdiagram. Derfor bruges kommandoen kumuleretFrekvens også på data.

Maple

```
with(Gym):
```

$$
\text{data:=}\begin{bmatrix} 0..0.1 & 125997 \\ 0.1..0.2 & 157851 \\ 0.2..0.3 & 180497 \\ 0.3..0.4 & 205139 \\ 0.4..0.5 & 230140 \\ 0.5..0.6 & 256941 \\ 0.6..0.7 & 288152 \\ 0.7..0.8 & 329248 \\ 0.8..0.9 & 399606 \\ 0.9..1 & 700000 \end{bmatrix}
$$

```
plotLorenzdiagram(kumuleretFrekvens(data))
```



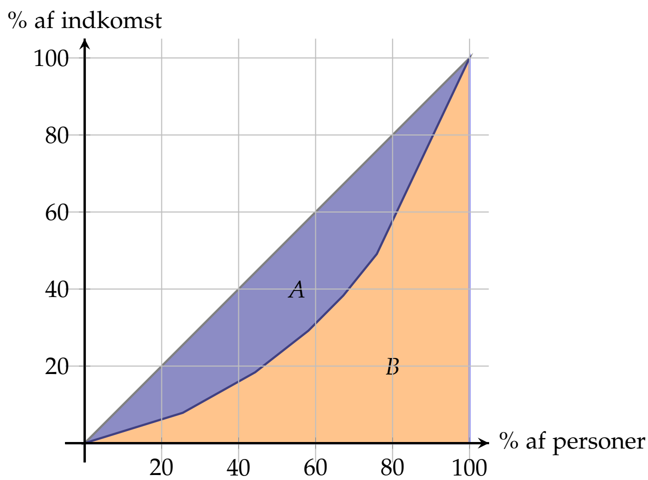
Øvelse 16 Tegn Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister.

Øvelse 17 Sammenlign Lorenzdiagrammet for de fire socialgrupper: studerende, lønmodtagere grund niveau, lønmodtagere højeste niveau og pensionister og diskuter årsager til forskellene.

Øvelse 18 I stedet for at bruge decilgrænserne til at tegne Lorenzdiagrammet kan gennemsnittet også bruges, men hvad er mest rigtigt? Diskuter hvilke forudsætninger der implicit antages ved hver af de to metoder.

Gini-koefficient er et tal mellem 0 og 1 der viser uligheden i indkomstfordelingen, i en bestemte gruppe fx. studerende. Hvis alle har samme indkomst, er Gini-koefficienten 0 og hvis én har hele indkomsten er Gini-koefficienten være 1.

Gini-koefficienten G er defineret som forholdet mellem arealet mellem linien der beskriver lighed og Lorenzkurven (A) og arealet mellem linien der beskriver lighed og x-aksen. Arealet mellem Lorenzkurven og x-aksen kaldes B.



Formlen for Gini-koefficienten er $$G = \frac{A}{A+B}$$

Da $A + B = 0{,}5$ er $$G = \frac{A}{0{,}5} = 2 \cdot A$$

Da det er nemmest at udregne arealet B omskrives formlen idet $A = 0{,}5 - B$. $$G = 2 \cdot (0{,}5 - B) = 1 - 2B$$

1.6 *Ugrupperede observationer*

Observationer er diskrete. I det tidligere afsnit sås på indkomst, der af praktiske hensyn var inddelt i intervaller. Men den enkelte person har ikke et indkomstinterval men en faktisk indkomst i kroner og øre. Nogle gange inddeles data ikke i intervaller, et eksempel kunne være folketingsvalg. Her ses på folketingsvalget 2011, data er fra tabellen http://www.statistikbanken.dk/FV11TOT.

Parti	*Nordsjælland*	*Vestjylland*
A. Socialdemokratiet	54182	76208
B. Radikale Venstre	33537	24090
C. Det Konservative Folkeparti	19765	12677
F. Socialistisk Folkeparti	21012	26819
I. Liberal Alliance	20613	16061
K. Kristendemokraterne	1171	9664
O. Dansk Folkeparti	30279	40378
V. Venstre	91870	113443
Ø. Enhedslisten	15062	11505
I alt	287491	330005

Video der viser hvordan deskriptiv statistik laves på ugrupperede observationer.

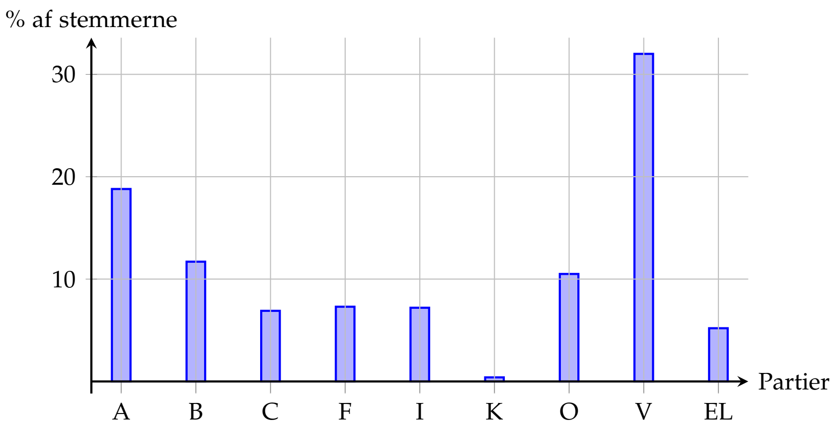
Antallet stemmer omregnes til procent af det samlede antal stemmer.

Parti	*Hyppighed*	*Frekvens (%)*
A. Socialdemokratiet	7608	23,0
B. Radikale Venstre	24090	7,3
C. Det Konservative Folkeparti	12677	3,8
F. Socialistisk Folkeparti	26819	8,1
I. Liberal Alliance	16061	4,9
K. Kristendemokraterne	9664	2,9
O. Dansk Folkeparti	40378	12,2
V. Venstre	113443	34,3
Ø. Enhedslisten	11505	3,5
I alt	330845	100,0

Øvelse 19 Beregn frekvensfordelingen på partier ved folketingsvalget 2011 for Vestjylland.

Parti	*Hyppighed*	*Frekvens*
A. Socialdemokratiet	76208	23,0%
B. Radikale Venstre	24090	7,3%
C. Det Konservative Folkeparti	12677	3,8%
F. Socialistisk Folkeparti	26819	8,1%
I. Liberal Alliance	16061	4,9%
K. Kristendemokraterne	9664	2,9%
O. Dansk Folkeparti	40378	12,2%
V. Venstre	113443	34,3%
EL. Enhedslisten	11505	3,5%
I alt	330845	100,0%

Pindediagrammet tegnes ved at angive observationsværdierne på x-aksen. På y-aksen angives frekvensen.



Øvelse 20 Tegn et pindediagram der viser frekvensfordelingen af stemmer ved folketingsvalget 2011 for Vestjylland.

Data som fx partier er ikke ordinale, hvilket betyder at de ikke kan ordnes. Sagt på en anden måde så kan det ikke siges at socialdemokratiet er før eller efter radikale venstre. Derfor giver det ingen mening af beregne kumuleret frekvens. For at kumuleret frekvens skal give mening skal data være ordinale. Her ses på karakter-data. Karakterer kan ordnes fx 02 er mindre end 4. Med den kumulerede frekvens følger også trappediagram, kvartiler og boksplot. For ordinale data kan også gennemsnit beregnes.

I tabellen ses karakterfordelingen hos en årgang elever til skriftlig eksamen i matematik B-niveau.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Elever	902	3932	2314	4242	7293	2341	1731

Video der forklarer beregningen af frekvensen.

For at beregne frekvensen af karaktereren 4, divideres hyppigheden 4242 med det total antal 22755.

$$\frac{4242}{22755} \cdot 100 = 18{,}64$$

Karakter	Hyppighed	Frekvens	Kumuleret (%)
-3	902	3,96	3,96
0	3932	17,28	21,2
2	2314	10,17	31,4
4	4242	18,64	50,1
7	7293	32,05	82,1
10	2341	10,29	92,4
12	1731	7,61	100,0
Total	22755	100	

Video der forklarer beregningen af den kumulerede frekvens.

Maple

```
with(Gym):
```

$$\texttt{data:=}\begin{bmatrix} -3 & 902 \\ 0 & 3932 \\ 2 & 2314 \\ 4 & 4242 \\ 7 & 7293 \\ 10 & 2341 \\ 12 & 1731 \end{bmatrix}$$

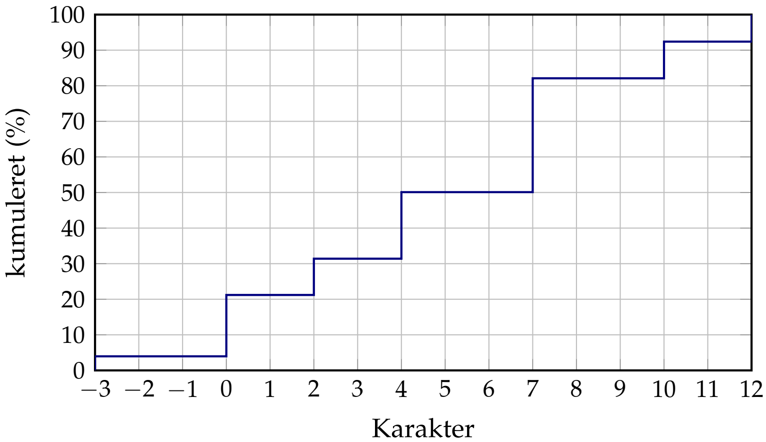
```
frekvensTabel(data)
```

Den kumulerede frekvens for karakteren 4, er procentuelle andel af elever der har fået karakteren 4 eller mindre. Den beregnes ved, at lægge frekvens sammen for karaktererne -3, 00, 02 og 4.

$$3{,}96 + 17{,}28 + 10{,}17 + 18{,}64 = 50{,}05$$

På trappediagrammet angives observationsværdierne på x-aksen og den kumulerede frekvens på y-aksen. Trappediagrammet kan bruges til at for en idé om fordelingen af karaktererne, men det vigtigste er at se hvor mange procent der ligger under (og over) en given observationsværdi. Det er også trappediagrammet der viser hvor kvartilerne er.

Video der forklarer hvordan trappediagrammet tegnes.



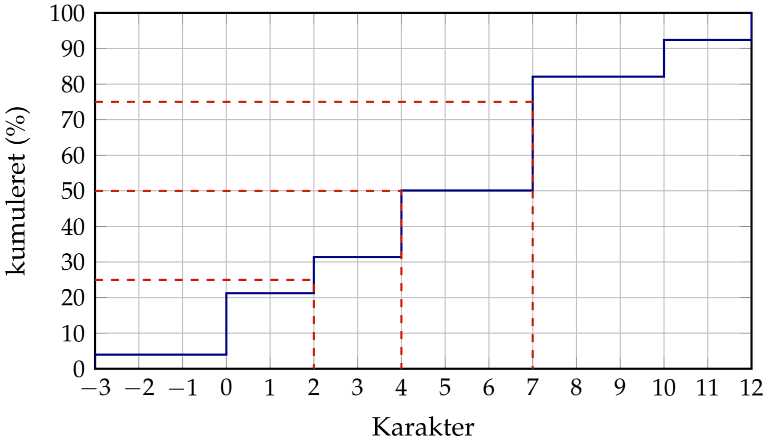
Video der forklarer hvordan kvartilerne aflæses på trappediagrammet.

I Maple kan trappediagrammet tegnes med kommandoen plotTrappekurve, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

Maple

```
plotTrappekurve(data)
```

Kvartilsættes aflæses på trappediagrammet til 2, 7 og 10, ved hhv. 25 %, 50 % og 75 %.



Kvartilsættet er 2, 4 og 7.

I Maple kan kvartilerne bestemmes med kommandoen kvartiler, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

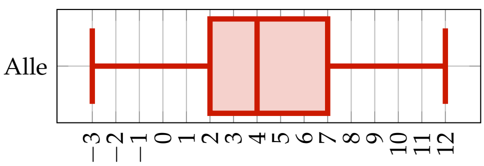
Maple

```
kvartiler(data)
```

$$[2., 4., 7.]$$

Video der forklarer hvordan boksplottet tegnes.

Boksplottet kan tegnes med kvartilerne og største og mindste observationsværdi.



Boksplottet består af fem lodrette streger. Den første lodrette streg er ved den mindste observationsværdi, der i dette tilfælde er -3. Den anden lodrette streg er ved den første kvartil, der i dette tilfælde er 2. Den tredje lodrette streg er ved den anden kvartil - der også kaldes medianen - som i dette tilfælde er 4. Den fjerde lodrette streg er tredje kvartil, der i dette tilfælde er 7. Den femte lodrette streg er den største observationsværdi, der i dette tilfælde er 12.

I Maple kan kvartilerne bestemmes med kommandoen kvartiler, hvis data og Gym-pakken er indlæst.

Video der forklarer hvordan gennemsnittet beregnes.

Maple

```
gennemsnit(data)
```

$$5.01529334212261$$

Øvelse 21 Nedenstående tabel viser fordeling af tænder der har eller har haft caries hos 15-årige.

Tænder	0	1	2	3	4	5	6
15-årige	7926	1929	1309	758	482	344	206

a) Bestem den kumulerede frekvens af caries hos 15 årige.

b) Tegn trappediagrammet.

c) Bestem kvartilsættet.

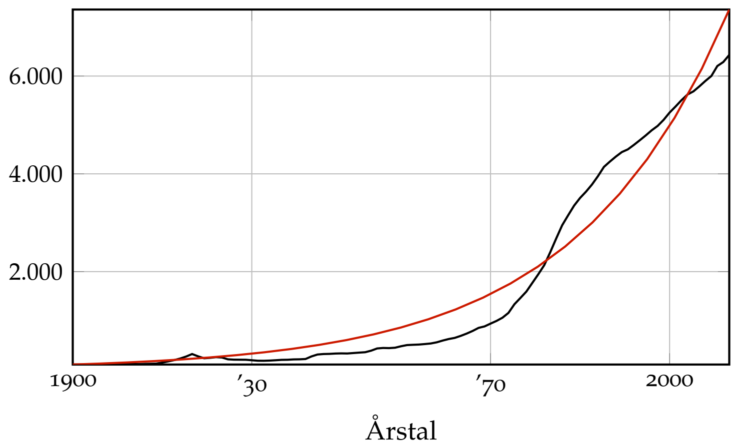
d) Tegn boksplottet for caries hos 15 årige.

1.7 *Indekstal*

Indekstal anvendes for at sammenligne størrelser i forhold til én given værdi. Dette kan bruges til at undersøge hvordan en værdi ændre sig overtid i relation til andre værdier. Her ses på forbrugerprisindekset i Danmark i perioden 1900-2010 data kommer fra tabellen http://statistikbanken.dk/PRIS8.

Årstal	2012	2013	2014	2015	2016
Forbrugerprisindeks	6 768	6 821	6 860	6 891	6 909

Forbrugerprisindekset er et indeks der viser udviklingen i prisen for de vare som typisk købes af forbrugere. Dette indeks er udregnet af Danmarks Statistik siden 1900. Den gennemsnitlige vækst i forbrugerprisindekset har i perioden 1900-2010 været 3,987 % (den røde linie). Dette er bestemt ved at lave eksponentiel regression på forbrugerprisindekset med år 1900 som år 0.



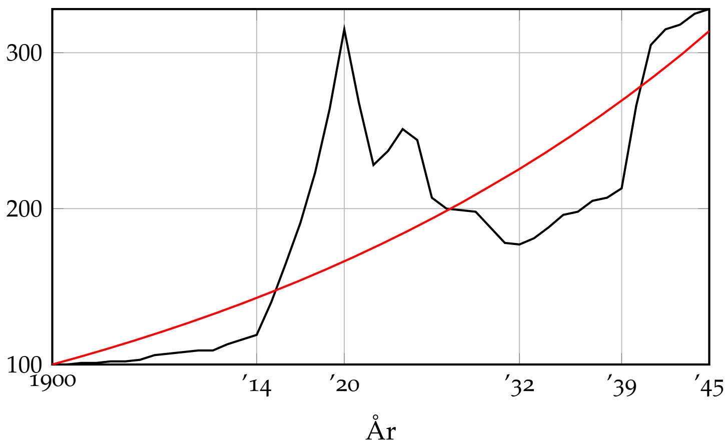
Indekset anvendes til at omregne priser. En vare der I 1985 (indeks: 3507) kostede 75 kr. Kan omregnes til en 2010 (indeks: 6432) pris.

$$\frac{75 \text{ kr.}}{3507} \cdot 6432 = 173{,}55 \text{ kr.}$$

For at analysere udviklingen deles perioden op i tre dele.

1.7.1 *Turbulens 1900-1945*

I perioden 1900-1950 er den gennemsnitlige vækst i indekset 2,8%, hvilket er lavere end gennemsnittet for perioden 1900-2010. Men der er meget store udsving i indekset, derfor navnet turbulens.



Historisk kan man så spørge:

1. I perioden 1900-1914 er der en meget lille vækst i indekset, hvad kendetegner denne periode historisk set?

2. Hvad skete der i 1914, siden at indekset pludseligt vokser kraftigt?

3. I perioden 1914-1920 er der en kraftig vækst i indekset, hvad kendetegner denne periode historisk set?

4. Hvad skete der i 1920, siden at indekset pludseligt falder?

5. I perioden 1920-1922 *falder* indekset, hvilket historisk er meget atypisk, hvad kendetegner denne periode historisk set?

6. Hvad skete der i 1922, siden at indekset igen begynder at vokse?

7. I periode 1922-1932, falder indekset, hvilket er den længste periode indekset er faldet i den tid indekset er beregnet, hvad kendetegner denne periode historisk set?

8. I 1932 begynder indekset at vokse langsomt, hvad skete der siden indekset begynder at vokse igen efter 10 år med fald.

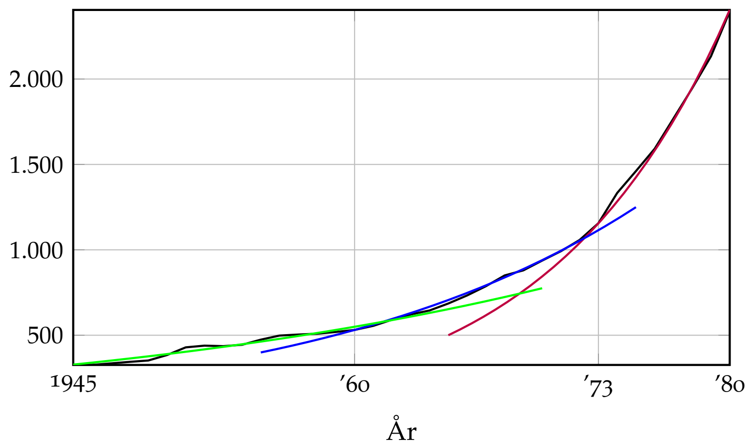
9. I perioden 1932-1939 vokser indekset langsomt, hvad kendetegner denne periode historisk set?

10. I perioden 1939-1941 vokser indekset kraftigt, hvad starter og stopper denne vækst så hurtigt?

11. I perioden 1941-1945 vokser indekset langsomt, hvad kendetegner denne periode historisk set?

1.7.2 *Stabilitet 1945-1980*

I perioden 1945-1980 er der en meget god overensstemmelse mellem modellen for væksten i indekset og indekset selv. Der er ikke de store udsving i indekset når der tages højde for en stabil vækst, der dog kan deles op i tre perioder, med hver deres vækst i indekset.

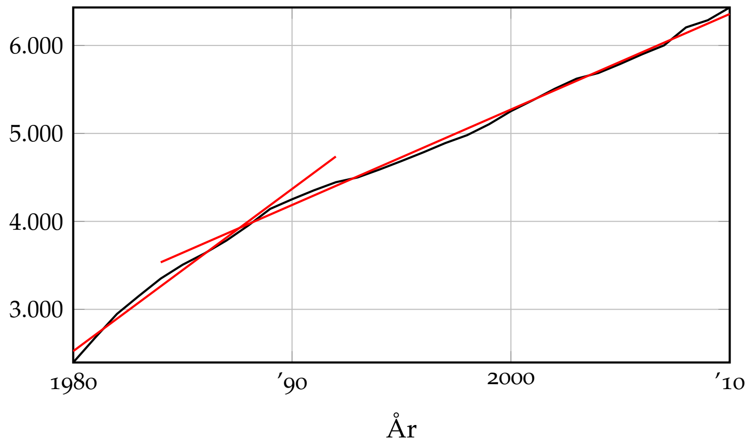


Perioden 1945-1980 er meget stabil sammenlignet med perioden 1900-1945. Der ikke spring i væksten i indekset som der var i den tidligere periode. Kan denne konklusion også forsvares historisk?

Der er tre vækstrater i perioden, 3,5 % i perioden 1945-1960 (den grønne linie), 5,9 % i perioden 1960-1973 (den blå linie) og 11,0 % i perioden 1973-1980 (den lilla linie). Hvad er den samfundsfaglige/historiske forklaring på denne opdeling af perioden?

1.7.3 *Stagnation 1980-2010*

I perioden 1980-2010 kan indekset ikke længere tilnærmes med en eksponentiel model. Der er stadigvæk en stabil vækst, men i denne periode er den lineær.



I perioden 1980-1989 er væksten 184 indekspoint pr. år. I 1980 svare det til en vækst på 7,3 % og i 1989 til en vækst på 4,2 %. Hvad kendetegner denne periode? Hvad sker der i 1989?

I perioden 1989-2010 er væksten 108 indekspoint pr. år. I 1990 svare det til en vækst på 2,7 % og i 2010 til en vækst på 1,7 %.

Den periode som bedst kan sammenligens med perioden 1989-2010 er perioden 1900-1911, som ligeledes var linieær med en vækst på 0,87 % i år 1911.

2
Sandsynlighedsregning

Ikke alt kan forudsiges. For at undersøge det tilfældige laves sandsynlighedsregning. Det tilfældige kan være et eksperiment eller en computer simulering. Start med en simpel simulering af 50/50. I stedet for en mønt kan der også bruges en terning fx hvor 1-3 er plat og 4-6 er krone.

Øvelse 22 — Kast med mønt. Du skal bruge fire mønter til dette eksperiment.

a) Kast men en mønt og prøv at forudsige resultatet.

b) Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.

c) Kast med én mønt 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

d) Kast med to mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

e) Kast med tre mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

f) Kast med fire mønter 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

g) Blev det lettere eller svære at forudsige resultatet når der var flere mønter?

Hvad sker der hvis der bliver flere mulig udfald? Prøv nu med en terning. Først kan 1 og 2 slås sammen til ét udfald. Det sammen med 3 og 4. Og med 5 og 6.

Øvelse 23 — Kast med terning. Du skal bruge fire terninger til dette eksperiment.

a) Kast men en terning og prøv at forudsige resultatet.

b) Beskriv din strategi til at forudsige resultatet.

c) Kast med én terning 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

d) Kast med to terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

e) Kast med tre terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

f) Kast med fire terninger 20 gange og noter resultatet og noter også om du kunne forudsige resultatet.

g) Blev det lettere eller svære at forudsige resultatet når der var flere terninger?

Eksperimenter som ovenstående kaldes stokastiske eksperimenter. Det er muligt at opskrive sandsynligheden for et udfald af kast med en mønt eller en terning, hvis det antages at alle udfald har samme sandsynlighed. Sandsynlighedsfeltet for kast med en ærlig mønt er:

Udfald	Plat	Krone
Sandsynlighed	0,5	0,5

For at kunne regne for eksempel gennemsnit gives alle udfald en numerisk værdi, dette kaldes for den stokastiske variabel, der ofte har symbolerne X, Y og Z. I dette tilfælde har plat værdien 0 og krone værdien 1.

X	0	1
P(X=u)	0,5	0,5

Værdierne som den stokastiske variabel kan antage kaldes for udfaldsrummet. Udfaldsrummet siges at være symmetrisk hvis alle udfald har samme sandsynlighed. Dette kaldes også for den uniforme fordeling. Hvis den stokstiske variabel kun kan antage heltallige værdier kaldes fordelingen for diskret. Som eksempel på en diskret uniform fordeling ses på fordelingen der opstår når et tal mellem 1 og 20 udvælges tilfældigt. 7 tal mellem 1 og 20 udvalgt tilfældig.

$$20, 3, 3, 19, 19, 14, 12$$

Her er det svært, næsten umuligt at vide hvilke tal der kommer frem, men udvælges 10 000 til ses et system hvor hvert udfald fremkommer ca. 5 % af gangene.

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
1	486	4,86	4,86
2	528	5,28	10,1
3	504	5,04	15,2
4	490	4,9	20,1
5	519	5,19	25,3
6	490	4,9	30,2
7	527	5,27	35,4
8	499	4,99	40,4
9	495	4,95	45,4
10	510	5,1	50,5
11	527	5,27	55,7
12	479	4,79	60,5
13	507	5,07	65,6
14	516	5,16	70,8
15	457	4,57	75,3
16	516	5,16	80,5
17	502	5,02	85,5
18	474	4,74	90,3
19	473	4,73	95
20	501	5,01	100

I Maple kan lave en simulering der generere tilfældige tal med kommandoerne DiscreteUniformRandomVariable (definition af den stokastiske variabel) og Sample (simulering der generer datasæt).

Maple : Simulering at tilfældige tal.

```
with(Gym):
with(Student[Statistics]):
```

```
X := DiscreteUniformRandomVariable(1, 20):
data := Sample(X, 10000):
```

Definition 2 — Sandsynlighed.

$$P(H) = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{M}}$$

Hvor H er en hændelse, det kan være et enkelt udfald eller en gruppe af udfald. G er antallet af udfald til fordelt for hændelsen (gunstige udfald) og M er antallet af mulige udfald.

Øvelse 24 Opskriv sandsynlighedsfeltet for kast med én ærlig 6-sidet terning.

For at kunne udregne sandsynlighedsfeltet for mere komplicerede eksperimenter ses på kombinatorik.

2.1 *Kombinatorik*

Kombinatorik bruges til at udregne antallet af muligheder af udfald af en situation. Det skal bruges til at udregne både antallet af gunstige udfald og antallet af mulige udfald.

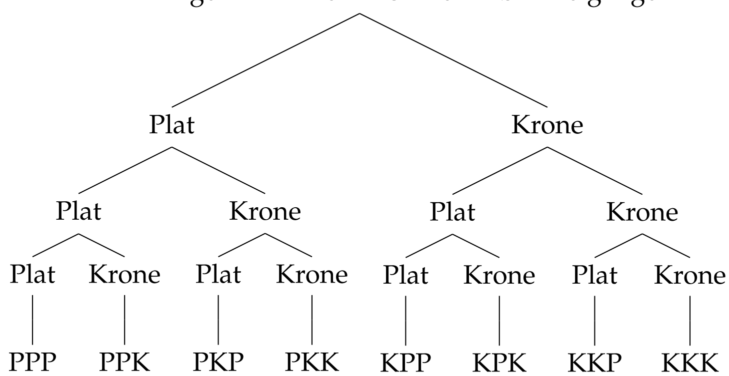
2.1.1 *Multiplikationsprincippet*

En computer er bygget op omkring 2-talssystemet. Det er fordi den enkleste måde at se et elektrisk signal på, er om den er tændt eller slukket. Tændt gives værdien 1 og slukket gives værdien 0.

En enkel måde at se effektiviteten af sådan et system er ved at tælle på dine fingre. Du har sikkert ti fingre. Hvis en finger er bøjet har den værdien 0 og hvis den er strakt har den værdien 1. For at undersøge hvor mange mulige måder dine fingre kan være indstillet på kan man bruge multiplikationsprincippet. Finger ét kan være bøjet eller strakt, det er to muligheder. Finger to kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2$ muligheder. Finger tre kan være bøjet eller strakt, det er også to muligheder. Tilsammen er det $2 \cdot 2 \cdot 2$ muligheder. Da du har ti fingre er det $2^{10} = 1024$ muligheder eller indstillinger. Det betyder at du med denne metode kan tælle til 1024 på dine fingre og ikke kun til 10.

En anden måde at visualisere multiplikationsprincippet er ved brug at tælletræer.

Antal mulige udfald ved kast med mønt tre gange



Men tælle træet viser også et anden ikke uvæsentligt element. Der er 8 forskellige kombinationer ved tre kast med en mønt, men der er kun 4 forskellige hvis rækkefølgen ikke tages i betragtning. Det betyder at når tre mønter kastes samtidig er der kun fire forskellige udfald og sandsynligheden for de fire udfald er ikke lige stor.

Øvelse 25 Lav et tælletræ for byg-selv burger og bestem hvor mange forskellige burgere du kan bygge. Du kan vælge grov eller hvid bolle. Okse, kylling eller vegetar bøf. Hvidløg eller burger dressing. Med eller uden ost.

Øvelse 26 I et forsøg bruges tre 6-sidede terninger.

a) Lav et tælletræ for kast med tre 6-sidede terninger.

b) Hvor mange forskellige udfald er der når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen?

c) Bestem sandsynligheden for de forskellige udfald er der når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen.

2.1.2 *Kombinationer uden tilbagelægning*

I de situationer hvor det samme udfald ikke kan se to gange, kan ovenstående formel ikke bruges.

Jeg har bogstaverne:

$$\text{A, h, i, w, K, E, g, n}$$

Jeg kan anbringe dem i $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ forskellige rækkefølger, fordi jeg har 8 bogstaver at vælge imellem når jeg skal vælge det første bogstav og 7 når jeg skal vælge det næste osv. Dette skrives $8!$ for nemheds skyld.

Men hvis jeg kun ser efter om der er tale om store eller små bogstaver, kan jeg ikke se forskel på

$$\text{A, h, i, w, K, E, g, n}$$

$$\text{A, h, n, w, K, E, g, i}$$

Disse to rækkefølger eller kombinationer er ens.

Generelt er der i alt $n!$ forskellige rækkefølger n elementer kan fremkomme på. Men da der ikke er forskel på de r succeser og

$(n-r)$ fiaskoer, kan der ikke ses forskel på rækkefølgen de to fremkommer i. Fx er $F_1S_3S_1F_2S_4S_2$ og $F_1S_1S_2F_2S_4S_3$ ens da rækkefølgen af succeser ikke har betydning, mens $F_1S_3S_1F_2S_4S_2$ og $S_1F_1S_3F_2S_4S_2$ er forskellige da rækkefølgen af succes og fiasko har ændret sig. Derfor er antallet af måder r succeser kan fremkomme i n forsøg er

$$\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Det betyder, at antallet af forskellige kombinationer af store eller små bogstaver, i følgende bogstaver

A, h, i, w, K, E, g, n

er $n = 8$, $r = 5$ da jeg regner lille bogstav som en succes.

$$M = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = 56$$

Det havde ikke gjort nogen forskel om jeg havde regnet stort bogstav som succes.

$$M = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56$$

Øvelse 27 I en klasse er der 25 elever og 18 er piger. På hvor mange forskellige måder kan de stilles op på en række hvis det eneste der tæller er om de er drenge eller piger?

Øvelse 28 I en pose slik er der 4 lakridser og 7 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

Øvelse 29 I en pose slik er der 1 lakrids og 10 vingummier. På hvor mange forskellige måder kan slikket blive spist?

3 Funktioner

Definitionen på en funktion er

Definition 3 En variabel y kaldes en funktion af en variabel x, hvis der til hver værdi af x svarer præcis én værdi af y. Denne værdi kaldes funktionsværdien og man skriver $y = f(x)$.

Bemærk at denne definition kun gælder hvis der er én afhængig (y) og én uafhængig (x) variabel.

Der er nogle begrænsninger for funktioner, fordi nogle udregninger ikke er definerede.

- division med 0.

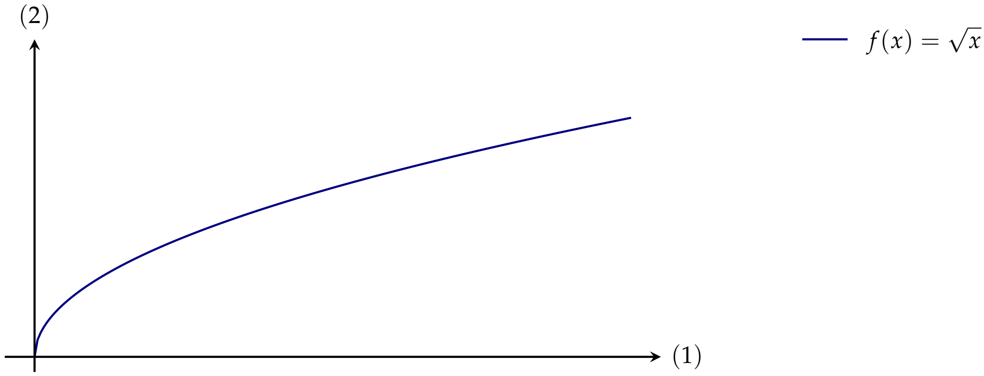
- kvadratroden af negative tal.

Disse udregninger kan heller ikke laves i regneudtryk for funktioner, derfor siger man at funktionen kun er defineret for nogle værdier af x. De værdier af x som funktionen er defineret for kaldes for funktionens *definitionsmængde* og den skrives $Dm(f)$.

Til alle de x værdier, som ligger i definitionsmængden svarer - ifølge definitionen af en funktion - én værdi af y, disse værdier af y kaldes for funktionens *værdimængde* og den skrives $Vm(f)$.

■ **Eksempel 5** Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Denne funktion er defineret for alle $x \geq 0$. Bemærk at der ikke er nogen graf for værdier af $x < 0$. Funktionens definitionsmængde er derfor $Dm(f) = [0, \infty[$ dette læses »alle reelle tal større end eller lig med 0«.

Værdimængden for funktionen er $Vm(f) = [0, \infty[$.

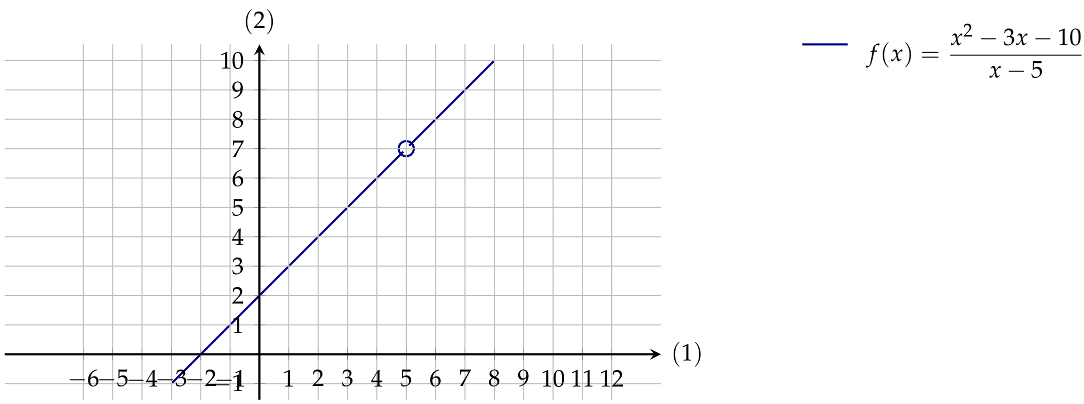


■

■ **Eksempel 6** Funktionen givet ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

Har en begrænsning i sin definitionsmængde fordi $x - 5$ skal være forskelligt fra 0 og derfor kan x ikke være 5. Men for alle andre værdier af x er funktionen defineret, derfor bliver definitionsmængden $Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, hvilket læses »alle reelle tal undtagen 5. Værdimængden for f bliver så alle de værdier for y, undtagen den værdi der svarer til x-værdien 5. På grafen for $f(x)$ kan man se at det er værdien 7. Værdimængden er derfor $Vm(f) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.



■

3.1 *Lineære funktioner*

Den lineære funktion $f(x) = ax + b$, hvor a er hældningskoefficienten, stigning pr. enhed. b er skæringen med y-aksen, start værdien. For at vise dette indsættes x-værdien for skæring med y-aksen $x = 0$.

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow f(0) = b$$

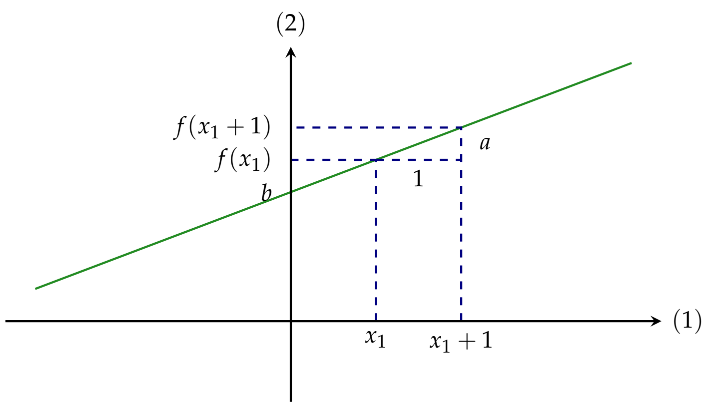
heraf ses at grafen for f vil skære y-aksen i punktet $(0,b)$.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1) + b && \text{Værdien } x+1 \text{ indsættes i } f(x) \\ &= ax + a + b && \text{Parentesen ganges ud} \\ &= f(x) + a && ax+b \text{ erstattes med } f(x) \end{aligned}$$

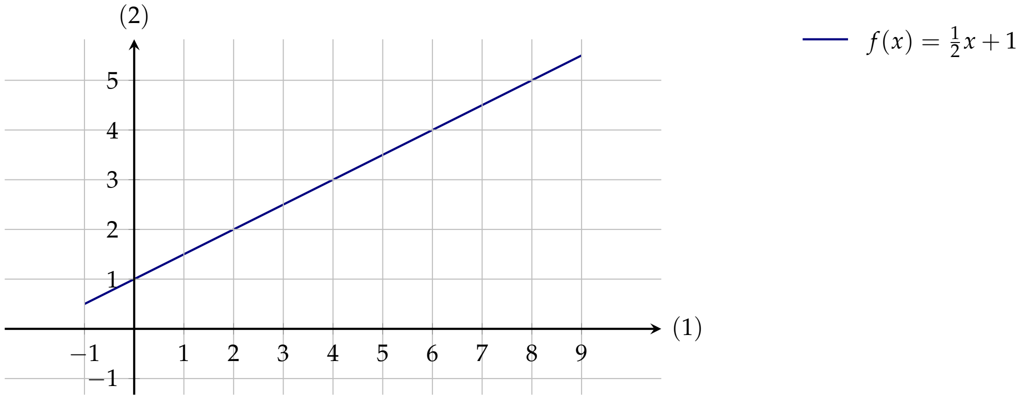
Opgaver hvor sammenhæng mellem graf og forskrift skal forklares.

Video der forklarer konstanternes betydning for grafens forløb for en lineær funktion.

heraf ses at at når x-værdien vokser med 1, vokser funktionsværdien med a.



■ **Eksempel 7** På figuren ses grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.



Denne graf skærer y-aksen i 1 og har hældningen $\frac{1}{2}$.

■

I Maple kan grafen grafen for en funktion tegnes med kommandoen plot. Efter funktionsforskriften sættes komma og så skrives i hvilket interval funktionen skal tegnes, ved at skrive x=fra .. til. Det er meget vigtigt at der bruges netop to punktummer.

Video der viser hvordan kommandoen plot kan bruges i Maple

Maple : Graf for funktion.

```
plot(2*x+4,x=-3..7)
```

Sætning 1 For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, da vil

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = y_1 - ax_1$$

Video med bevis for topunkts-formlen

■ **Bevis** Da $f(x_1) = y_1$ vil $y_1 = ax_1 + b$ og da $f(x_2) = y_2$ vil $y_2 = ax_2 + b$. Ved at udregne $y_2 - y_1$ fås at

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) && \\
y_2 - y_1 &= ax_2 + b - ax_1 - b && \text{parenteserne ophæves} \\
y_2 - y_1 &= ax_2 - ax_1 && \text{udtrykket reduceres} \\
y_2 - y_1 &= a \cdot (x_2 - x_1) && \text{udtrykket faktoriseres} \\
\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= a && \text{ligningen divideres med } x_2 - x_1
\end{aligned}$$

Når a er kendt kan b beregnes ved at isolere b i en af ligningerne $y_1 = ax_1 + b$ og $y_2 = ax_2 + b$. Herved fremkommer formlen

$$y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$$

og tilsvarende for ligningen $y_2 = ax_2 + b$. ■

■ **Eksempel 8** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$. (2,3) og (3,6), Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{6-3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$b = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3$$

Regneforskriften bliver $f(x) = 3x - 3$ ■

■ **Eksempel 9** Følgende koordinatsæt passer ind i $f(x) = ax + b$. (5,3) og (2,9), Bestem regneforskriften for $f(x)$

$$a = \frac{9-3}{2-5} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$b = 3 + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

Regneforskriften bliver $f(x) = -2x + 13$ ■

Video med eksempel på bestemmelse af forskrift for en lineær funktion ud fra to punkter.

■ **Eksempel 10** Funktionen $f(x)$ er lineær og $f(3) = 5$ og $f(6) = 4$, bestem regneforskriften for $f(x)$.

$$a = \frac{4-5}{6-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$b = 5 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5 + 1 = 6$$

Regneforskriften for $f(x)$ bliver $f(x) = -\frac{1}{3}x + 6$ ■

Øvelse 30 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne, bestem forskriften for f.

a) (3,6) og (2,4)

b) (5,1) og (15,2)

c) (2,4) og (4,3)

d) (8,7) og (12,28)

e) (4,4) og (6,2)

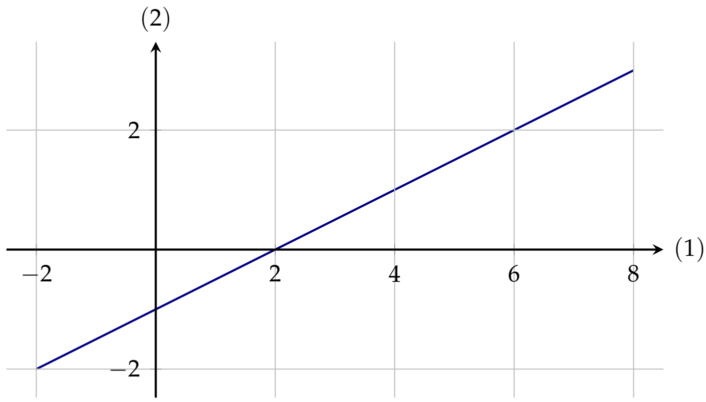
f) (−2,4) og (8,5)

Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra to punkter.

g) $(5{,}11)$ og $(70{,}52)$ h) $(2,-4)$ og $(-5{,}3)$

i) $(-2,-2)$ og $(-5,-2)$ j) $(-2,-2)$ og $(-2{,}5)$

■ **Eksempel 11** For at bestemme forskriften på grafen aflæses to punkter.



De to aflæste punkter er $(2,0)$ og $(0,-1)$. Disse punkter indsættes i formlerne

$$a = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2}$$

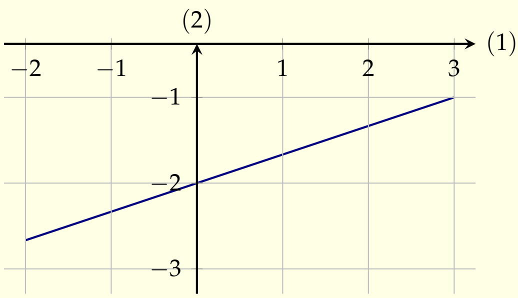
$$b = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

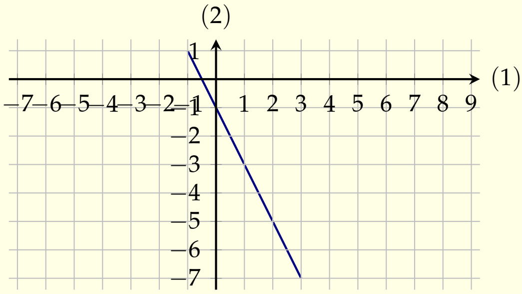
Forskriften bliver $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$. ■

Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra grafen eller hvor grafen skal tegnes ud fra forskriften.

Øvelse 31 Bestem forskriften for funktionen f hvis graf ses.

a)





b)

Konstanterne a og b er hældningen og skæringen med y-aksen. Men hvis funktionen anvendes til at beskrive en sammenhæng mellem to variable x og y med en relation til virkelige størrelser, får a og b også en betydning i relation til denne sammenhæng og funktionen kaldes sammen med beskrivelsen af variablerne en *model*.

Video med eksempel på fortolkning af konstanter i lineære og eksponentielle modeller.

■ **Eksempel 12** En patient får et saltvandsdrop. Dropflasken indeholder til at begynde med 950 mL saltvand, og patienten får 5 mL salt-vand pr. minut. En model for sammenhængen mellem tid og dropflaskens indhold bliver så

$$y = -5x + 950$$

hvor y er dropflaskens indhold i mL og x er tiden i minutter. ■

■ **Eksempel 13** Efter 5 minutter er der 925 mL saltvand i dropflasken og efter 25 minutter er der 825 mL tilbage. Bestem a og b for den lineære sammenhæng mellem tid og dropflaskens indhold.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{925 - 825}{5 - 25} = \frac{100}{-20} = -5$$
$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 825 - (-5) \cdot 25 = 950$$

Det betyder at der hvert minut løber 5 mL (a) saltvand ud af dropflasken og at flasken indeholdt 950 mL (b) fra start. ■

■ **Eksempel 14** En patient får et saltvandsdrop. Sammenhængen mellem dropflaskens indhold af saltvand og tiden i minutter ses i tabellen nedenfor. Det antages at sammenhængen er lineær.

Tid i min.	0	10	17	25
Indhold i mL	950	900	865	825

Video der viser hvordan regression og residualer bestemmes og plottes i Maple

For at bestemme a og b i den lineære funktion udføres lineær regression på tabellens data. I maple skrives

Maple : Lineær regression.

```
with(Gym):
X := [1, 2, 5, 7]:
Y := [4, 6, 8, 11]:
LinReg(X, Y):
```

Plot med punkter og regressionslinje samt regressions linjens forskrift og forklaringsgraden R^2.

```
LinReg(X, Y, x)
```

$$1.06593406593407x + 3.25274725274725$$

```
residualer(X, Y, LinReg)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.318681318681318 \\ 2 & 0.615384615384616 \\ 5 & -0.582417582417582 \\ 7 & 0.285714285714285 \end{bmatrix}$$

```
plotResidualer(X, Y, LinReg)
```

Plot med residualer.

■

For at vurdere om en lineær funktion kan beskrive sammenhængen tegnes et residual-plot. Residual-plottet er en grafisk illustration af afvigelsen mellem de observerede data, og den model som data kunne passe til. Først tilpasses modellen så den passer bedst muligt med de observerede data. Dette gøres ved at finde de bedste værdier for konstanterne i modellen. For den lineære funktion $f(x) = ax + b$ betyder det at værdierne for a og b bestemmes så kvadratet på residualerne bliver mindst mulig. Derefter vurderes modellen ved at se på residualerne.

Video der beskriver beregningen af residualer og residualplottet

Definition 4 — Residual. Et residual er forskellen mellem den observerede værdi og den forventede værdi ifølge den bestemte model.

■ **Eksempel 15** I en undersøgelsen er sammenhørende værdier af X og Y blevet målt og data ses i nedenstående tabel.

X	1	3	4	6
Y	1	6	11	13

Efter at have lavet lineær regression på data fremkom følgende model

$$f(x) = 2{,}5x - 1$$

Nu kan modellens værdier for de enkelt uafhængige værdier bestemmes.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2{,}5 \cdot 1 - 1 = 1{,}5 \\
f(3) &= 2{,}5 \cdot 3 - 1 = 6{,}5 \\
f(4) &= 2{,}5 \cdot 4 - 1 = 9 \\
f(6) &= 2{,}5 \cdot 6 - 1 = 14
\end{aligned}$$

Disse tal skrives ind i tabellen.

X	1	3	4	6
Y	1	6	11	13
$2{,}5x - 1$	1,5	6,5	9	14

Nu kan residualerne beregnes med formlen

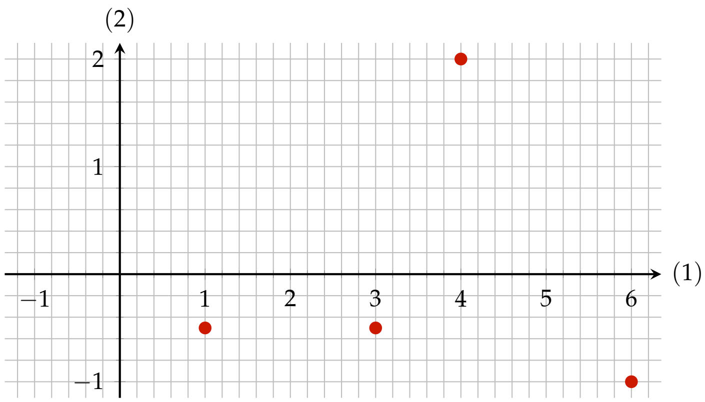
$$\text{residual} = \text{observation} - \text{model}$$

$$\begin{aligned}
residual(1) &= 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \\
residual(3) &= 6 - 6{,}5 = -0{,}5 \\
residual(4) &= 11 - 9 = 2 \\
residual(6) &= 13 - 14 = -1
\end{aligned}$$

Disse tal skrives ind i tabellen.

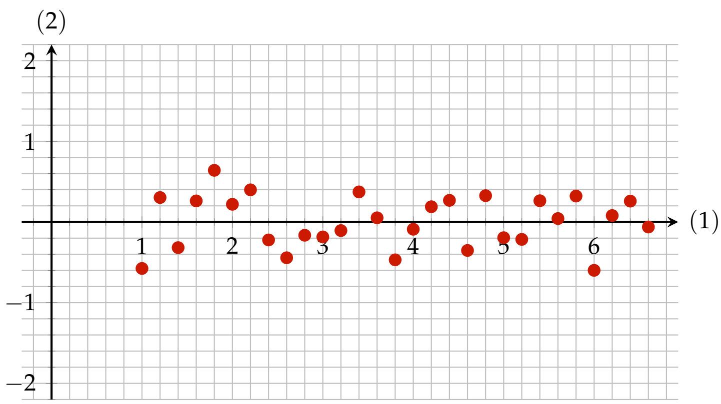
X	1	3	4	6
Y	1	6	11	13
$2{,}5x-1$	1,5	6,5	9	14
residual	-0,5	-0,5	2	-1

Disse data kan visualiseres i et residual-plot

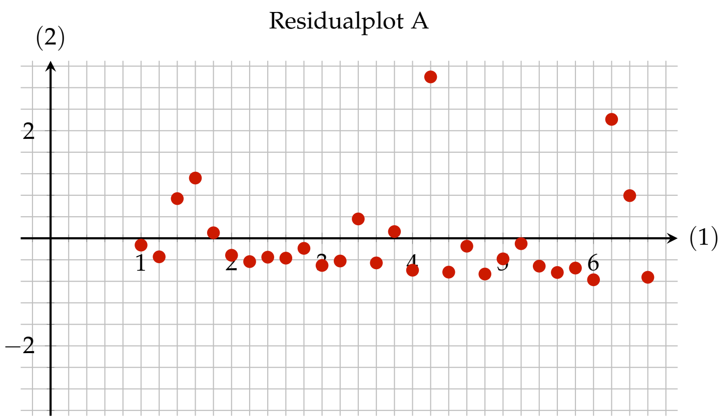


∎

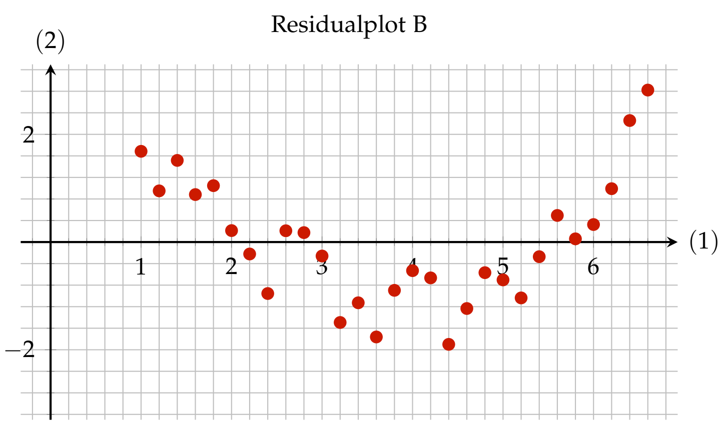
Punkterne i residual-plottet skal være fordelt jævnt om (1)-aksen. På residual-plottet ovenfor er punkterne nogenlunde jævnt fordelt om (1)-aksen men det kunne godt være endnu bedre som på det næste residual-plot. Når punkterne ikke ligger helt på linjen, er der bias i data eller modellen er forkert. Der er bias, hvis punkterne i residualplottet er ligeligt fordelt i positiv og negativ retning, og punkternes fordelingen er uafhængig af den uafhængige variabel.



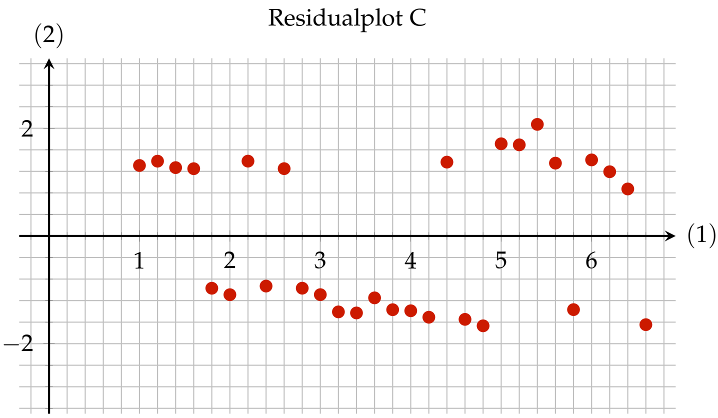
Hvis punkterne ligger i et mønster om (1)-aksen er der to muligheder. Modellen er forkert eller der er en variabel, der ikke er taget hensyn til (bias).



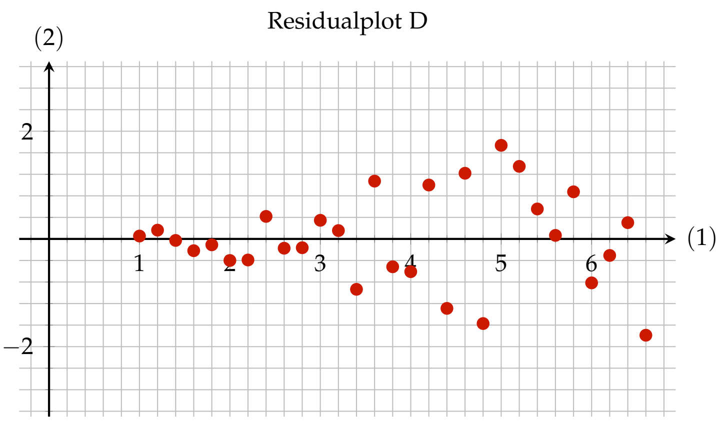
I residualplot A ligger der flere punkter under end over (1)-aksen, men punkterne over (1)-aksen ligger længere væk fra (1)-aksen. Dette tyder på, at bias næsten kun påvirker målingerne i en positiv retning.



I residualplot B ligger punkterne først over, så under og så over (1)-aksen. Bias afhænger derfor af den uafhængige variabel og modellen er derfor forkert.



I residualplot C ligger punkterne langt fra (1)-aksen, men bias afhænger ikke af den uafhængige variabel.



I resudualplot D ligger punkterne først med en lille spredning om (1)-aksen og derefter med en stor spredning om (1)-aksen. Bias afhænger derfor af den uafhængige variabel. Der er derfor tale om en forkert model.

Øvelse 32 Tabellen nedenfor viser udviklingen i et lands energiproduktion (målt i GW) i perioden 2005-2010.

Årstal	2005	2007	2008	2009	2010
Energiproduktion	202	421	623	1132	1541

I en model kan udviklingen i energiproduktion beskrives ved en funktion af typen

$$E(t) = a \cdot x + b$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i MW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Benyt data fra tabellen til at bestemme en forskrift for E.

b) Bestem residualerne og tegn residualplottet.

Den fundne model kan anvendes til at beregne enten den afhængige eller uafhængige varibel.

Eksempel 16 Sammenhængen mellem indholdet af saltvand i et drop og tiden kan beskives med følgende model

$$f(x) = -5x + 950$$

Hvor x er tiden i minutter og $f(x)$ er indholdet af saltvand i mL i droppet.

Hvor mange mL saltvand er der tilbage efter 50 minutter?

$$y = -5 \cdot 50 + 950 = -250 + 950 = 700$$

Efter 50 minutter er der 700 mL tilbage.

Hvor lang tid går der inden der er 200 mL tilbage?

$$200 = -5 \cdot x + 950 \Leftrightarrow 200 - 950 = -5 \cdot x \Leftrightarrow \frac{-750}{-5} = 150$$

Der går 150 minutter inden der kun er 200 mL tilbage. ∎

Video med et eksempel på opstilling af funktion ud fra en sproglig beskrivelse.

Video der visser hvordan Maple kan bruges til bestemmelse af værdien af afhængige og uafhængige variable i en funktion.

Maple : Afhængig og uafhængig varibel.

```
f(x):=-5*x+950:
f(10)
```

700

```
solve(f(x)=200)
```

150

Øvelse 33 I perioden 2004-2008 er det årlige offentlige forbrug steget med 18,5 mia. kr. pr. år. I 2004 var det årlige offentlige forbrug 388 mia. kr.

a) Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver udviklingen i det årlige offentlige forbrug som funktion af tiden.

b) Hvornår vil det offentlige forbrug være 500 mia.?

c) Hvad vil det offentlige forbrug være i 2020?

3.2 *Ligefrem- og omvendt proportional*

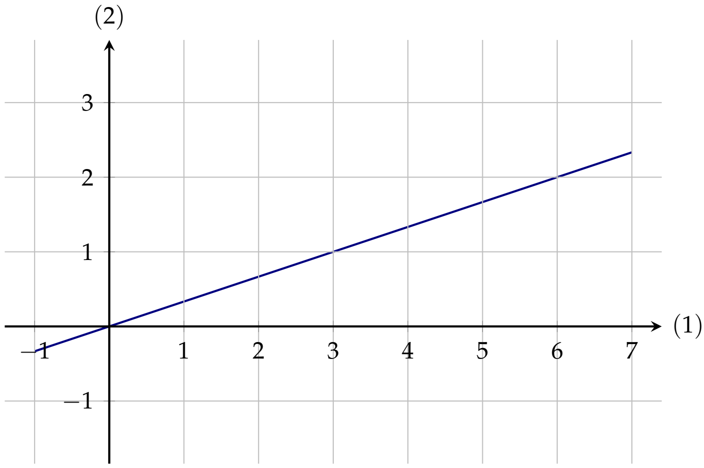
Definition 5 De to variable x og y siges at være ligefrem proportionale, hvis

$$y = k \cdot x$$

Dette kan også skrives $\frac{y}{x} = k$ dvs. at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.

Video hvor ligefrem proportionalitet forklares.

Eksempel 17 y er ligefrem proportional med x med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{3}$.



■

Eksempel 18 I formlen

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

er F og M ligefrem proportionale, hvis G, m og r er konstante.

$$F = \underbrace{\frac{G \cdot m}{r^2}}_{k} \cdot M$$

■

Eksempel 19 I formlen

$$x \cdot y = a \cdot b$$

er x og y ikke ligefrem proportionale, selvom a og b er konstante.

$$x = \underbrace{a \cdot b}_{k} \cdot \frac{1}{y}$$

x og y kaldes omvendt proportionale. ■

Video hvor omvendt proportionalitet forklares.

■ **Eksempel 20** I formlen

$$P = a \cdot T^4$$

hvor a er en konstant, er der ingen ligefrem proportionalitet fordi T er i fjerde. ■

Øvelse 34 Hvilke af disse variable er der en ligefrem proportional sammenhæng mellem?

a) $m = n \cdot M$

b) $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

c) $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

d) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$

■ **Eksempel 21** Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formlen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot 4$$

Det betyder at k er 2,5.

Når $x = 20$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 2{,}5 \cdot 20$$

Det betyder at y er 50. ■

Øvelse 35 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2		7
y	1	2	

Øvelse 36 Variablerne x og y er ligefrem proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x		2	5
y	6	8	

Definition 6 De to variable x og y siges at være omvendt proportionale, hvis

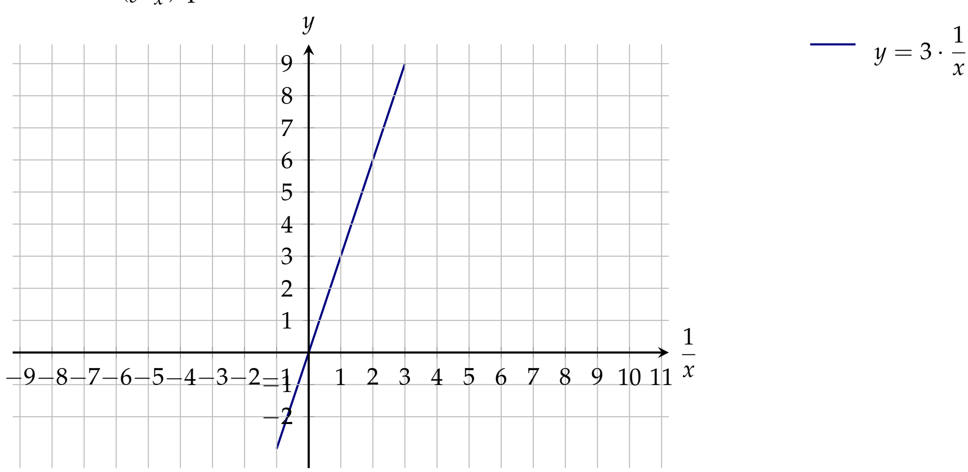
$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

Dette kan også skrives $y \cdot x = k$, k kaldes proportionalitetsfaktoren.

■ **Eksempel 22** I formlen

$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

er variblerne y og x omvendt proportionale. Grafisk kan det ses ved at lave et $(y, \frac{1}{x})$-plot.



■

■ **Eksempel 23** Variablerne x og y er omvendt proportionale. Og når $x = 4$ er $y = 10$. Det betyder at proportionalitetskonstanten kan beregnes med formlen $y = k \cdot x$.

$$10 = k \cdot \frac{1}{4}$$

Det betyder at k er 40.

Når $x = 20$ vil y derfor kunne beregnes som

$$y = 40 \cdot \frac{1}{10}$$

Det betyder at y er 4. ■

Øvelse 37 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	2	8	
y	2		$\frac{1}{3}$

Øvelse 38 Variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld de manglende tal i tabellen.

x	6		12
y	10	6	

3.3 *Inverse funktioner*

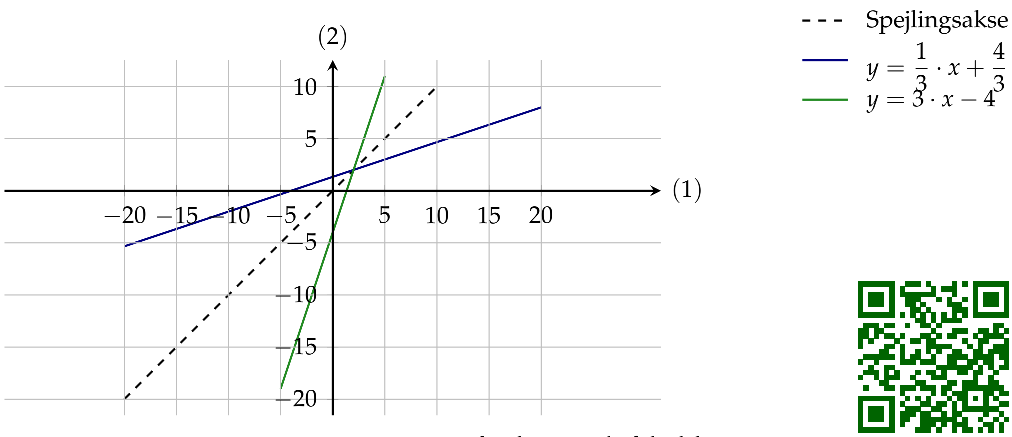
En invers funktion er en funktion hvor x og y er byttet om. Symbolet for en invers funktion er $\ ^{-1}$. Den inverse funktion til funktionen $f(x)$:

$$y = 3x - 4$$

er således funktionen $f^{-1}(x)$, hvor x og y er byttet om: $x = 3y - 4$ hvor y isoleres

$$-3y = -x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Når man ser på det grafisk, ser man at graferne for de to funktioner er spejlinger af hinanden i linien $y = x$.



Video hvor inverse funktioner forklares. Eksempler på bestemmelse af inverse funktioner.

Definition 7 — Invers funktion. Den inverse funktion til f kaldes f^{-1}, og den inverse funktion f^{-1} er defineret som funktionen der opfylder at

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

med passende begrænsninger i funktionernes definitionsmængder.

■ **Eksempel 24** Det betyder at for $f(x) = 3x - 4$ og $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ skal der gælde at $f(f^{-1}) = x$. Dette ses af følgende udregning.

$$f(f^{-1}(x)) = 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) - 4 = (x + 4) - 4 = x$$

■

Øvelse 39 Undersøg om følgende funktioner er inverse til hinanden.

a) $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ og $g(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = 4x - 8$ og $g(x) = \frac{1}{4}x - 2$

d) $f(x) = x - 3$ og $g(x) = x + 3$

For at bestemme den inverse til en funktion, byttes om på de to variable, typisk x og y, og derefter isoleres variablen y.

■ **Eksempel 25** For funktionen $f(x) = 2x - 3$, hvor $f(x) = y$, kan den inverse funktion udregnes ved at erstatte y med x og x med y. Da kommer ligningen til at se således ud.

$$x = 2y - 3$$

og i denne ligning isoleres y.

$$\begin{aligned} x &= 2y - 3 \\ x + 3 &= 2y && \text{3 lægges til ligningen} \\ \frac{x+3}{2} &= y && \text{ligningen divideres med 2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} &= y && \text{brøken deles op} \end{aligned}$$

Den inverse funktion er så $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. ■

Øvelse 40 Bestem den inverse funktion til f.

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$
c) $f(x) = x + 1$
d) $f(x) = 3x - 3$
e) $f(x) = 2x - 4$
f) $f(x) = -2x - 2$
g) $f(x) = 3x + 5$
h) $f(x) = ax + b$

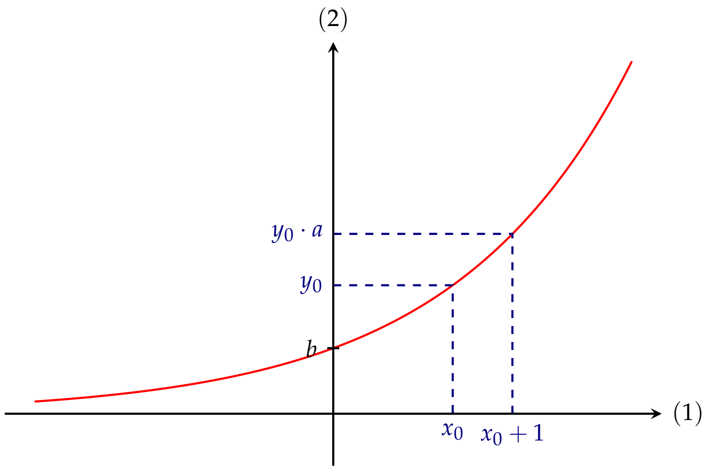
3.4 *Eksponentielle funktioner*

Definition 8 En funktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $a > 0$ og forskellig fra 1 kaldes for en eksponentiel funktion.

Forskriften for en eksponentiel funktion er $f(x) = b \cdot a^x$ hvor b er begyndelsesværdien og a er fremskrivningsfaktoren.

Sætning 2 — Konstanternes betydning for grafens forløb. For eksponentielle funktioner med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ gælder der, at grafen for funktionen går gennem punktet $(0{,}b)$, dvs grafen skærer 2.aksen i b. Der gælder ligeledes, at grafen går gennem punktet $(x_0 + 1, a \cdot y_0)$.

Video med en forklaring af sammenhængen mellem a og b forløbet af grafen for en eksponentiel funktion.



Bevis Når grafen skærer 2. aksen er x-værdien 0. Funktionsværdien kan så beregnes

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

Ved at indsætte funktionsværdien $x_0 + 1$ fås, at

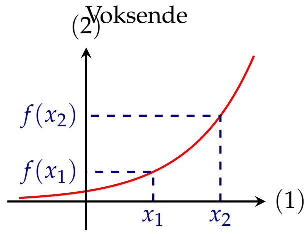
$$f(x_0 + 1) = b \cdot a^{x_0+1} = b \cdot a^{x_0} \cdot a^1 = y_0 \cdot a$$

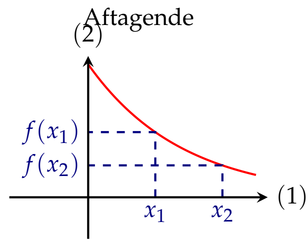
Dette viser at grafen for f vil gå gennem punktet $(x_0 + 1{,}y_0 \cdot a)$. ∎

Definition 9 — Voksende og aftagende. En funktion er voksende hvis

$$x_1 < x_2 \text{ gælder at } f(x_1) < f(x_2)$$

En funktion er aftagende hvis der for to værdier x_1 og x_2 hvor $x_1 < x_2$ gælder at $f(x_1) > f(x_2)$.





Video med forklaring på konstanternes betydning for grafens forløb for en eksponentiel funktion.

Sætning 3 — Betydningen af begyndelsesværdi og fremskrivningsfaktor. For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder følgende

a) Grafen for en eksponentiel funktionen er voksende, hvis fremskrivningsfaktoreren a er større end 1, og aftagende hvis a er mellem 0 og 1.

b) Jo større a er i intervallet $]1, \infty[$ jo hurtigere vokser grafen. Jo mindre a er i intervallet $]0, 1[$ jo hurtigere aftager grafen.

Beviset for påstand a) kræver kendskab til logaritme funktionen, og udskydes derfor til denne funktion er indført.

■ **Bevis — Sætning 3 b).** Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer større end 1 fås følgende.

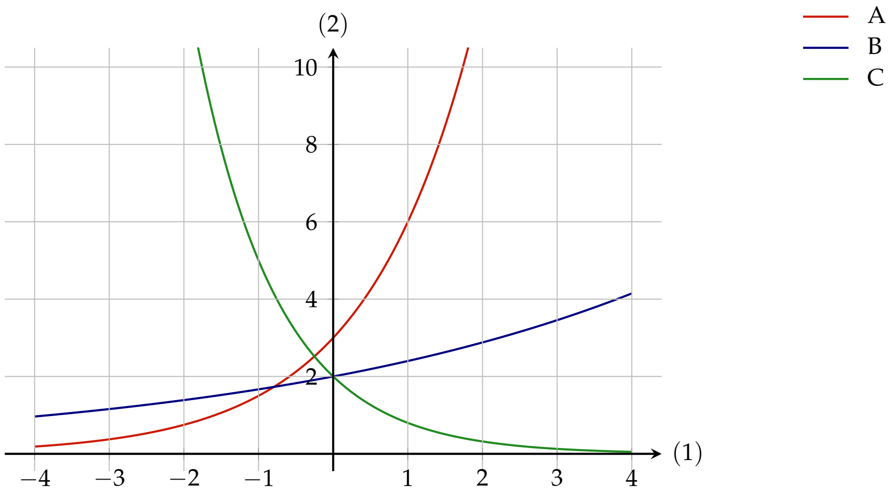
$a_1 < a_2$	
$a_1^x < a_2^x$	opløft begge sider med x.
	Da $a > 1$ skal ulighedstegnet ikke vendes
$b \cdot a_1^x < b \cdot a_2^x$	multiplicer med b.
	Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

Ved sammeligning af to fremskrivningsfaktorer mellem 0 og 1 fås følgende.

$a_1 < a_2$	
$a_1^x > a_2^x$	opløft begge sider med x.
	Da $0 < a < 1$ skal ulighedstegnet vendes
$b \cdot a_1^x > b \cdot a_2^x$	multiplicer med b.
	Da $b > 0$ skal ulighedstegnet ikke vendes

■

■ **Eksempel 26** På figuren ses grafen for tre funktioner



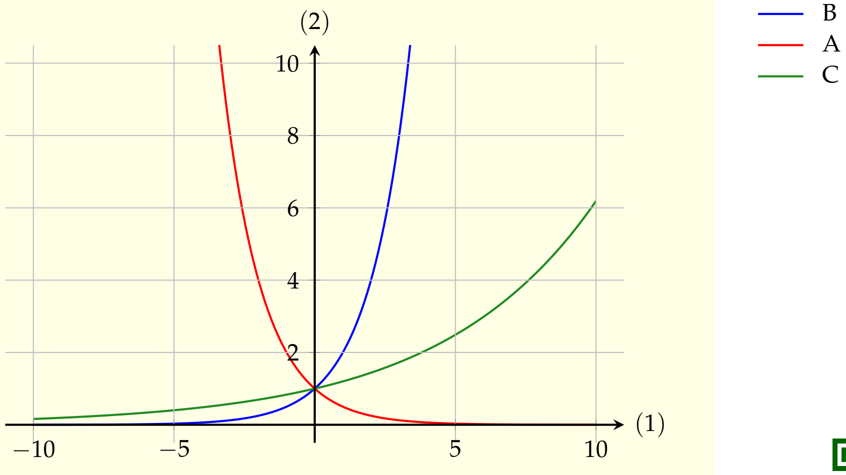
Af de tre funktioner

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$
$$g(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$$
$$h(x) = 2 \cdot 0{,}4^x$$

er A graf for funktionen f da f har den største fremskrivningsfaktor, og grafen A vokser hurtigst og den største b-værdi da grafen skærer y-aksen højest af de tre grafer. Funktionen for den graf B er g da den har en fremskrivningsfaktor, som er større end 1 (grafen er voksende) men mindre end fremskrivningsfaktoren for f, og grafen vokser langsommere end grafen for A. C er grafen for funktionen h da grafen er aftagende og fremskrivningsfaktoren er mindre end 1. ■

Øvelse 41 Figuren viser grafen for funktionerne

$$f(x) = 2^x, \ g(x) = 0{,}5^x \text{ og } h(x) = 1{,}2^x$$



a) Gør rede for hvilken graf, der hører til hvilken funktion.

Opgaver hvor sammenhængen mellem grafen og forskriften for en eksponentiel funktion skal forklares.

Sætning 4 Forskriften for en eksponentiel funktionen $f(x) = b \cdot a^x$, kan bestemmes, hvis to punkter på dens graf kendes.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \qquad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Video med bevis for to-punkt formlen for en eksponentiel funktion.

■ **Bevis** Hvis fremskrivningsfaktoren a er kendt kan b beregnes hvis ét punkt (x_1, y_1) er kendt. I ligningen $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ isoleres b ved at dividere med a^{x_1}.

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Er fremskrivningsfaktoren ikke kendt skal den beregnes ved at bruge endnu et punkt. Hvis de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger på grafen, betyder det at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Ved division af y_2 med y_1 fås, at

$$
\begin{aligned}
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} && \text{forkort med } b \\
\frac{y_2}{y_1} &= \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} && \text{potensregneregel } \frac{a^s}{a^t} = a^{s-t} \\
\frac{y_2}{y_1} &= a^{x_2 - x_1} && \text{da } y > 0 \text{ findes } x_2 - x_1 \text{ roden af } \frac{y_2}{y_1} \\
\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} &= a
\end{aligned}
$$

■

Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en eksponentiel funktion ud fra to punkter.

■ **Eksempel 27** Grafen for en eksponentielt voksende funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Grafen går gennem punkterne $P(1{,}6)$ og $Q(3, 24)$.

Tallene a og b kan bestemmes

$$a = \sqrt[3-1]{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2 \quad b = \frac{6}{2^1} = 3$$

■

Opgaver hvor forskriften for en eksponentiel funktion skal bestemmes ud fra to punkter.

Øvelse 42 Bestem forskriften for eksponentiel funktionen med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem punkterne $(2{,}6)$ og $(4{,}24)$.

Øvelse 43 Væksten af en bakteriekultur kan beskrives med en eksponentielt voksende funktion $f(x)$, hvor x er antallet af timer og $f(x)$ er antallet af bakterier. Det oplyses, at $f(3) = 864$ og $f(6) = 1493$.

a) Bestem en forskrift for f.

Forskriften for en eksponentiel funktion kan også bestemmes med regression.

■ **Eksempel 28** I tabellen ses en opgørelse over den årlige svinetransport ud af Danmark i perioden 2006-2009.

Årstal	2006	2007	2008	2009
Mio. svin	4,3	4,9	6,3	8,0

I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, er en funktion f af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor x er antal år efter 2005.

Med eksponentiel regression bestemmes forskriften til

$$f(x) = 4{,}2 \cdot 1{,}24^x$$

I Maple skrives

Maple

```
with(Gym):
ExpReg([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],x)
```

$$4.157\,1.235^x$$

■

For at beregne residualer og tegne residualplottet anvendes kommandoerne residualer og plotResidualer.

Maple

```
with(Gym):
ExpReg([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],x)
```

$$4.157\,1.235^x$$

```
residualer([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],ExpReg)
plotResidualer([0,1,2,3],[4.3,4.9,6.3,8.0],ExpReg)
```

Video hvor det vises hvordan regression og residualer beregnes i Maple.

Øvelse 44 Tabellen nedenfor viser udviklingen i et lands energiproduktion (målt i GW) i perioden 2005-2010.

Årstal	2005	2007	2008	2009	2010
Energiproduktion	202	421	623	1132	1541

I en model kan udviklingen i energiproduktion beskrives ved en funktion af typen

$$E(t) = b \cdot a^t$$

hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i MW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Benyt data fra tabellen til at bestemme en forskrift for E.

b) Bestem residualerne og tegn residualplottet.

Definition 10 Vækstraten r er fremskrivningsfaktoren a minus en.

$$r = a - 1$$

Video med eksempel på bestemmelse af vækstraten for en eksponentiel funktion.

■ **Eksempel 29** I en model antages det, at antallet af svin, der årligt transporteres ud af Danmark, i perioden 2006-2009, er en funktion f af typen

$$f(x) = 4{,}2 \cdot 1{,}24^x$$

hvor x er antal år efter 2006.

Tallet 4,2 viser antallet af svin der blev transporteret ud af Danmark i år 2006. Tallet 1,24 viser at den gennemsnitlige vækstrate pr. år i årene 2006-2009 var 0,24 eller 24%. ■

Øvelse 45 Den gennemsnitlig pris på almindelige dagligvare til én person i én måned er i perioden 2000-2016 vokset med 3 % om året. I 2000 var prisen 1023 kr.

a) Indfør passende variable og opstil en model der beskriver udviklingen i den gennemsnitlig pris på almindelige dagligvare til én person i én måned er i perioden 2000-2016.

Øvelse 46 Udviklingen i energiproduktion i et land, i perioden 2005-2010, beskrives ved modellen

$$E(t) = 2{,}5 \cdot 1{,}09^t$$

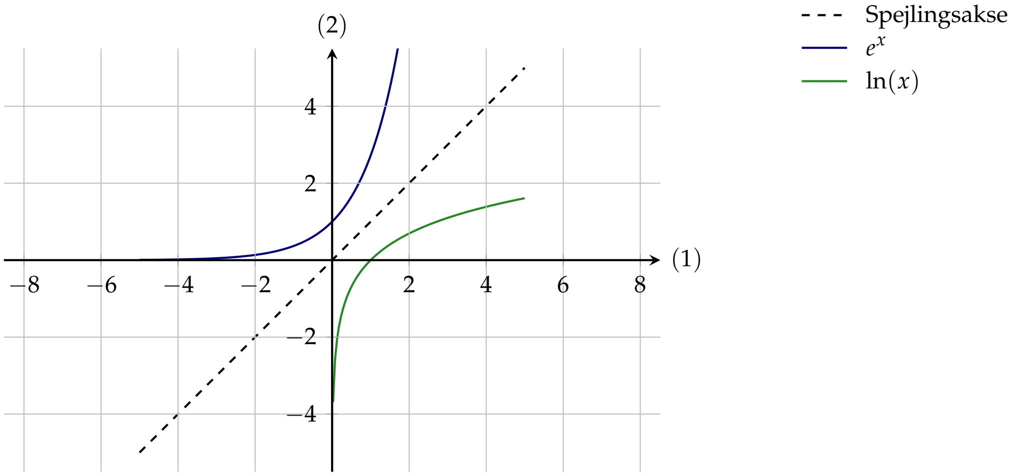
hvor $E(t)$ betegner energiproduktion (målt i GW) til tiden t (målt i år efter 2005).

a) Bestem vækstraten for energiproduktionen.

3.5 *Logaritmefunktioner*

Definition 11 — Den naturlige logaritme. Den naturlige logaritme $\ln(x)$ er den inverse funktion til den eksponentielle funktion e^x, hvor $e \approx 2{,}718281828$. Dette betyder at

$$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln(x)} = x$$

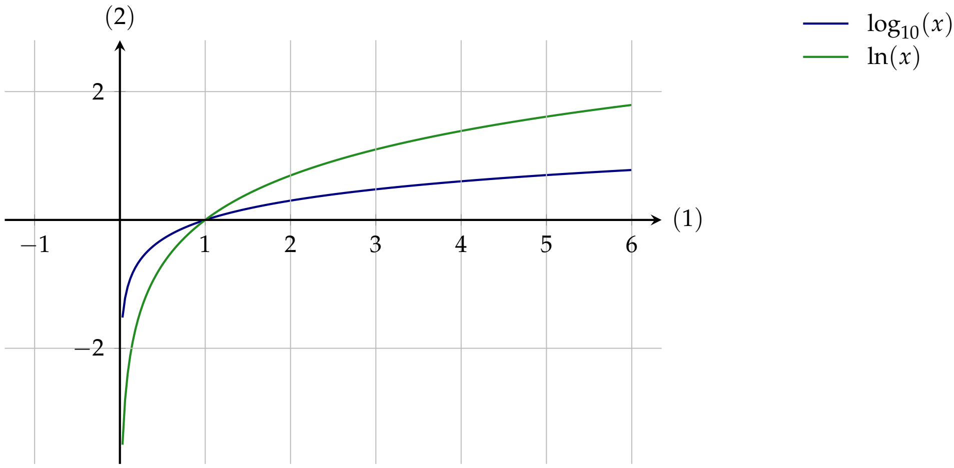


Definition 12 — Logaritmen med grundtal a. Logaritmen med grundtal a er den inverse funktion til eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$. Dette betyder at

$$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a(x)} = x$$

Sætning 5 Funktionen $\ln(x)$ er proportional med $\log_a(x)$, med proportionalitetsfaktor $\ln(a)$.

$$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$$



Logaritmeregnereglerne skal her bruges til at løse ligninger med eksponentialfunktioner og potensfunktioner.

Maple : Den naturlige logaritme.

```
ln(x)
```

Maple : 10-tals logaritmen.

```
log[10](x)
```

Maple : Eksponentialfunktionen e^x.

```
exp(x)
```

Maple : Tallet e.

```
exp(1)
```

Øvelse 47 Brug kommandoen Explore i Maple til, at undersøge logaritmefunktionen $\log_a(x)$ grafisk.

Maple
```
Explore(plot(log[a](x), x = 0 .. 10, -5 .. 4),
   a = 2 .. 10)
```

Øvelse 48 Brug kommandoen Explore i Maple til, at undersøge logaritmefunktionen $\ln(a \cdot x + b) + c$ grafisk.

Maple
```
Explore(plot(ln(a*x+b)+c, x = 0 .. 10, -5 .. 4),
   a = 1 .. 5, b = -5 .. 5, c = -5 .. 5)
```

log kan også indgå i ligninger og udregninger.

Øvelse 49 Udregn $\ln(3) - \ln(6) \cdot \ln(10)$.

a) Skriv udtrykket ind i Maple, men skriv punktum efter hver tal.

b) Brug kommandoen evalf.

c) Brug kommandoen evalf(»udtryk her«,4).

Øvelse 50 Løs ligningen $\ln(3x) = 2$

a) Brug kommandoen solve.

b) Brug kommandoen fsolve.

c) Brug kommandoen solve, men skriv $\ln(3x) = 2.$

3.6 *Mere om eksponentialfunktionen*

Fordoblingskonstanten T_2 er det antal år pengene skal stå på kontoen for, at saldoen fordobles eller sagt på en anden måde, hvor lang tid går der før saldoen er steget med 100%.

Definition 13 — Fordoblingskonstanten. Fordoblingskonstanten T_2 er den konstant der opfylder ligningen

$$f(x+T_2) = 2 \cdot f(x)$$

hvor f er en eksponentiel funktion.

Video med eksempel på anvendelse af fordoblings- og halveringskonstanten.

■ **Eksempel 30** Hvis du fik 6% i rente pr. år, hvor mange år vil der så gå, før saldoen er blevet fordoblet? Det er denne ligning vi skal løse $1{,}06^n = 2$.

$$\begin{aligned} 1{,}06^n &= 2 && \\ \ln(1{,}06^n) &= \ln(2) && \text{den naturlige logaritme anvendes} \\ n \cdot \ln(1{,}06) &= \ln(2) && \text{regnereglen } \ln(a^x) = x \cdot \ln(a) \text{ anvendes} \\ n &= \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)} && \text{ligningen divideres med } \ln(1{,}06) \end{aligned}$$

hvilket er 11,9 år. ■

Dette eksempel kan generaliseres til følgende sætning.

Sætning 6 Fordoblingskonstanten, T_2, for funktionen

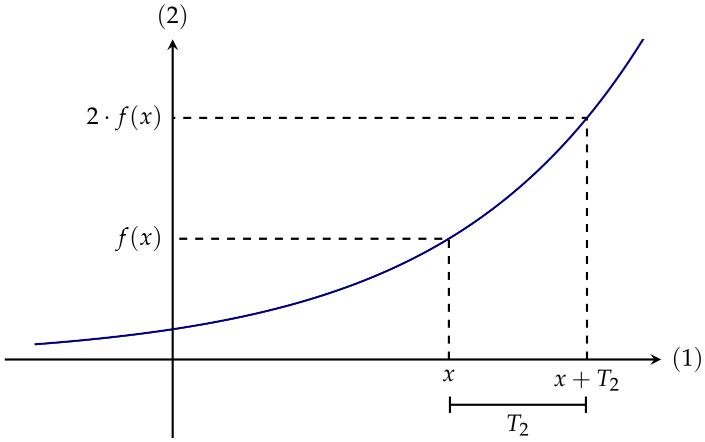
$$f(x) = b \cdot a^x$$

kan bestemmes med formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Video med bevis for formlen for fordoblingskonstanten.

■ **Bevis** Fordoblingskonstanten T_2 er det antal enheder (år) som x-værdien skal vokse med for at y-værdien fordobles.



Dette kan omskrives til ligningen

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

i denne ligning skal T_2 isoleres. Først anvendes funktionsudtrykket for $f(x) = b \cdot a^x$

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

så isoleres T_2.

$$
\begin{aligned}
b \cdot a^{x+T_2} &= 2 \cdot b \cdot a^x && \text{ligningen divideres med } b \\
a^x \cdot a^{T_2} &= 2 \cdot a^x && \text{ligningen divideres med } a^x \\
a^{T_2} &= 2 && \text{den naturlige logaritme anvendes} \\
\ln(a^{T_2}) &= \ln(2) && \text{regnereglen } \ln(a^x) = x \cdot \ln(a) \text{ anvendes} \\
T_2 \cdot \ln(a) &= \ln(2) && \text{ligningen divideres med } \ln(2) \\
T_2 &= \frac{\ln(2)}{\ln(a)}
\end{aligned}
$$

■

Sætning 7 Den eksponentielt aftagende udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $0 < a < 1$ har halveringskonstanten

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

■ **Eksempel 31** Bestem fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 1{,}03^x$. Ved at bruge formlen $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \approx 23{,}4$$

fordoblingskonstanten er 23,4. ■

■ **Eksempel 32** Bestem halveringskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$. Ved at bruge formlen $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$ fås, at

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}7)} \approx 1{,}9$$

halveringskonstanten er 1,9. ■

Video med eksempel på bestemmelse af fordoblingskonstanten.

Video med eksempel på bestemmelse af halveringskonstanten.

Øvelse 51 Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for funktionen f.

a) $f(x) = 34 \cdot 1{,}025^x$

b) $f(x) = 4 \cdot 1{,}3^x$

c) $f(x) = 2 \cdot 11^x$

d) $f(x) = 11 \cdot 32^x$

e) $f(x) = 2 \cdot 1{,}001^x$

f) $f(x) = 34 \cdot 0{,}93^x$

g) $f(x) = 34 \cdot 0{,}03^x$

h) $f(x) = 0{,}2 \cdot x^{0{,}0721}$

Opgaver med fordoblings- og halveringskonstant.

Øvelse 52 Befolkningen i Nepal var i 1998 22,3 mio. I 1999 var den 22,8 mio. Antag at der er tale om en eksponentiel udvikling.

a) Opstil en model for befolkningsudviklingen i Nepal.

b) Bestem fordoblingstiden for befolkningen i Nepal.

c) Bestem befolkningens størrelse i 2015.

d) Bestem den relative forskel mellem modellen og det faktiske befolkningstal i 2015, hvor der var 28,4 mio.

Kilde: Globalis

3.7 *Andengradspolynomium*

Definition 14 Et andengradspolynomium p er en funktion med forskriften

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

hvor $a \neq 0$ og a, b og c er reelle tal.

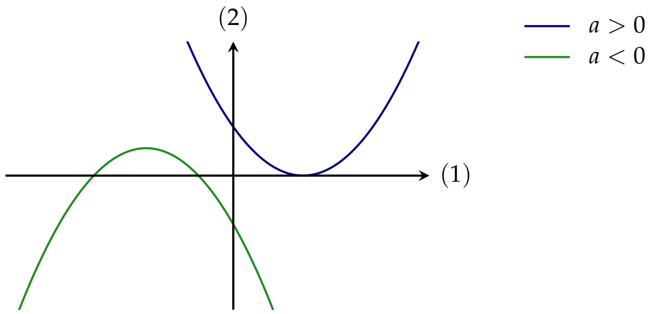
■ **Eksempel 33** Et andengradspolynomium kan se således ud.

$$p(x) = -x^2 + 3x + 1$$

Her er $a = -1$, $b = 3$ og $c = 1$. ■

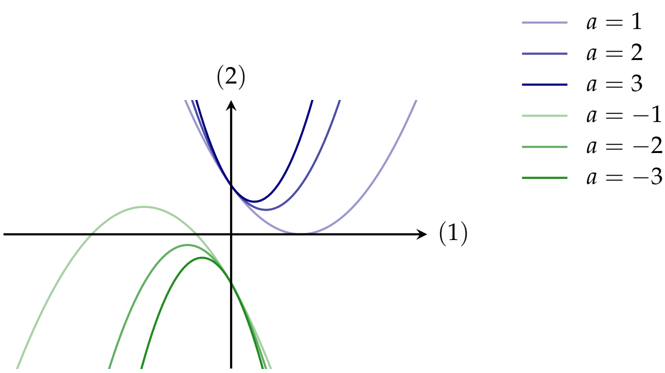
Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel. Konstanterne a, b og c i andengradspolynomiet påvirker hvordan grafen ser ud. Er a positiv vender grene op og er a negativ vender grene ned.

Video der forklarer betydningen af konstanterne for grafens forløb for et andengradspolynomium.



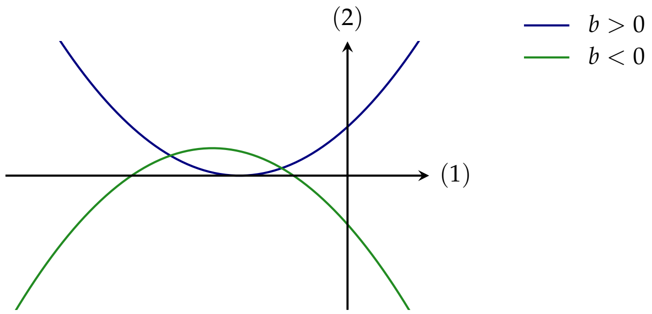
Jo større eller mindre a er, jo hurtigere vokser eller aftager grafen.

Video der forklarer, hvordan grafen for et andengradspolynomium tegnes.

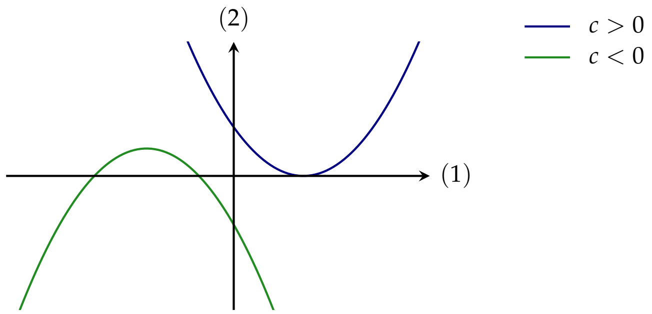


Opgaver hvor grafen for et andengradspolynomium skal skitseres.

b er hældning på grafen i grafens skæringspunkt med 2. aksen.



c er grafens skæringspunkt med 2. aksen.



Opgaver hvor sammenhængen mellem graf og forskrift skal bestemmes.

Øvelse 53 Brug kommandoen Explore til at undersøge grafen for andengradspolynomiet.

Maple
```
Explore(plot(a*x^2+b*x+c, x = -8 .. 8, -20 .. 20),
   a = 1 .. 5, b = -5 .. 5, c = -5 .. 5)
```

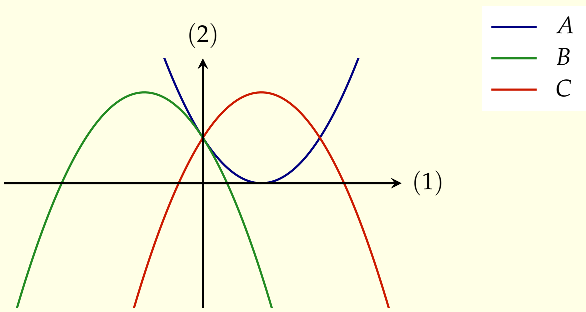
a) Undersøg betydningen af a.

b) Undersøg betydningen af b.

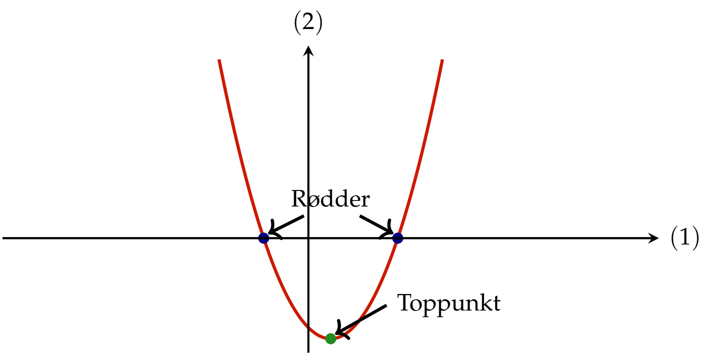
c) Undersøg betydningen af c.

Øvelse 54 Grafen for de tre funktioner f, g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

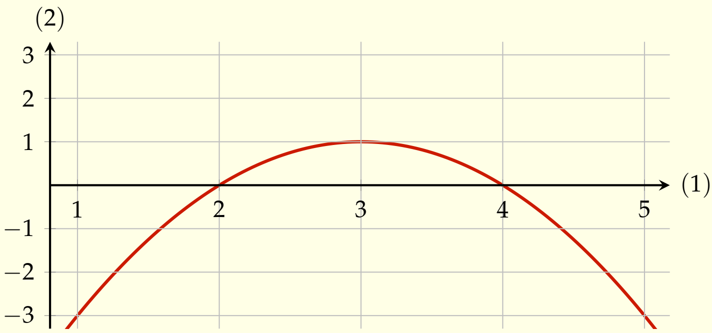
$$f(x) = -x^2 - 4x + 4 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad h(x) = -x^2 + 4x + 4$$



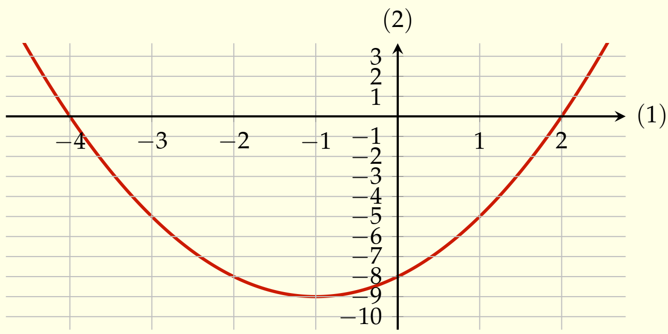
Hvis grafen for polynomiet skærer 1. aksen, kaldes disse skæringspunkter for polynomiets rødder. Det punkt hvor graferne skifter fra at være voksende til at være aftagende, eller omvendt, kaldes for grafens toppunkt.



Øvelse 55 Bestem rødder og toppunkt for parablen.



Øvelse 56 Bestem rødder og toppunkt for parablen.



Rødderne i et andengradspolynomium kan bestemmes ved at løs ligningen $p(x) = 0$. Hvor $p(x)$ er et andengradspolynomium. Sådan en ligning kan se således du.

$$0 = x^2 - 7x + 12$$

Ligningen - der kaldes en andengradsligning - kan løses i Maple, og løsningerne er grafens skæringspunkt med 1. aksen.

Maple

`solve`$(0 = x^2 - 7x + 12)$

$$4, 3$$

Det er ikke alle andengradspolynomia der har skæringspunkter med 1. aksen, og derfor er det heller ikke alle andengradsligninger der har (reelle) løsninger.

Ligningen $x^2 - 2x + 4 = 0$ har ingen løsninger.

Maple
solve($x^2 - 2x + 4 = 0$)

$$1 + I\sqrt{3}, 1 - I\sqrt{3}$$

Maple kommer med en løsning, men der er I i løsningen og derfor er den ikke reel. Kommandoen fsolve kan også bruges, men den vil give et tomt output, fordi der ikke er nogle løsninger.

Maple
fsolve($x^2 - 2x + 4 = 0$)

En tredje metode er, at lade en af tallene være et decimaltal.

Maple
fsolve($x^2 - 2.0x + 4 = 0$)

$$1.0 + 1.732050808\, I, 1.0 - 1.732050808\, I$$

Maple kommer med en løsning, men der er I i løsningen og derfor er den ikke reel.

Øvelse 57 Løs ligningerne

a) $x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4x - 1 = 0$

c) $x^2 - 2x + 12 = 0$

d) $-x^2 - 2x - 12 = 0$

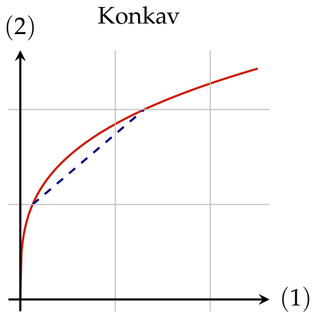
3.8 *Potensfunktion*

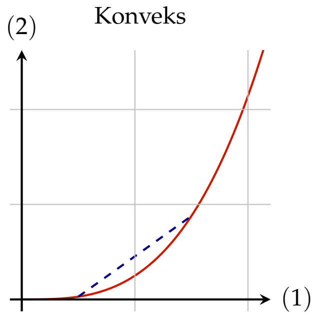
Definition 15 En potensfunktion er en funktion med regneforskriften

$$f(x) = b \cdot x^a$$

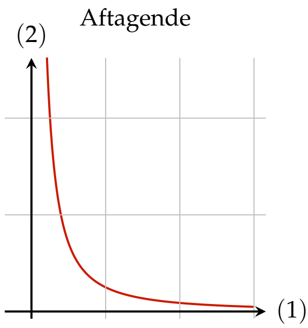
hvor $b > 0$ og både a og b er reelle tal.

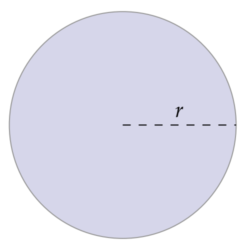
Grafen for en potensfunktion med regneforskrift $f(x) = bx^a$ kan have tre typer af forløb. Forløbet af grafen afhænger af a. Hvis $a > 1$ er grafen voksende og konveks. For a mellem 0 og 1 er grafen for potensfunktionen voksende og konkav.

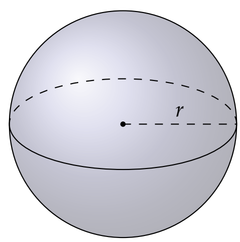




For $a < 0$ er grafen aftagende.







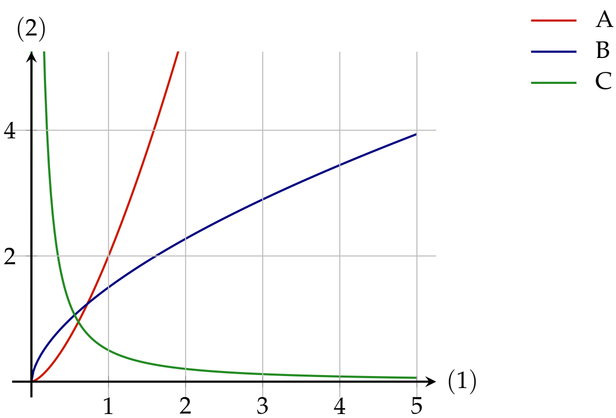
Sammenhængen mellem arealet A og radius r af en cirkel, er et eksempel på en potensfunktion

$$A = \pi \cdot r^2$$

Eller sammenhængen mellem volumen V og radius r af en kugle

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

■ **Eksempel 34** Figuren viser graferne for funktionerne

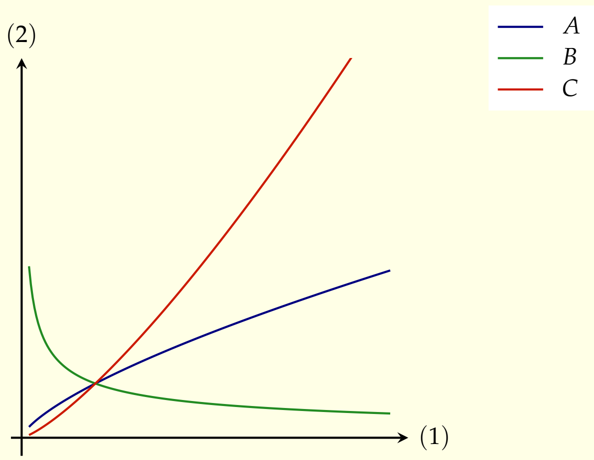


$$f(x) = 1{,}5 \cdot x^{0{,}6} \quad g(x) = 2 \cdot x^{1{,}5} \quad h(x) = 0{,}5 \cdot x^{-1{,}3}$$

A er grafen for g da grafen er konkav og voksende og eksponenten er større end 1 i funktionen f. B er grafen for f da grafen er konveks og voksende og eksponenten er mellem 0 og 1. C er grafen for h, da grafen er konveks og aftagende og eksponenten er mindre end 0. ■

Øvelse 58 Grafen for de tre funktioner f, g og h ses på figuren. Argumentér for hvilken graf der passer med hvilken funktion.

$$f(x) = 1{,}5 \cdot x^{1{,}3} \quad g(x) = 1{,}5 \cdot x^{-0{,}5} \quad h(x) = 1{,}5 \cdot x^{0{,}7}$$

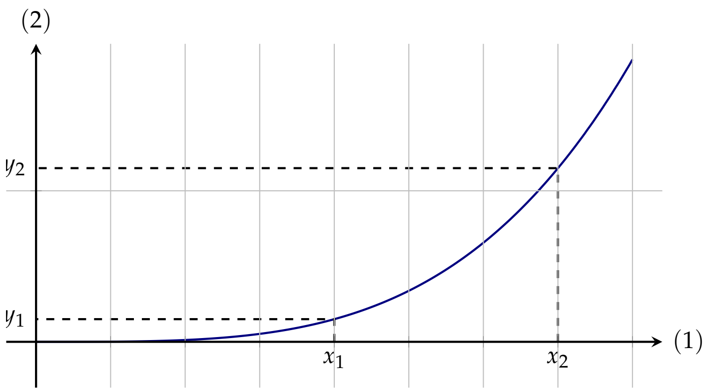


Potensfunktionen er en funktion der beskriver sammenhænge, som fx hvis én billet koster 50 kr. og der sælges 400 og prisen på biografbilletter stiger med 6%, og antallet af solgte billetter falder med 20%. Så vil den nye pris være 53 kr og der vil blive solgt 320 billetter. Inden prisen blev sat op var den samlede indtjening 20 000 kr og efter prisstigningen er den samlede indtjening 16 960 kr.

Vides det, at der er tale om en potensfunktion og kendes to punkter kan regneforskriften findes.

Sætning 8 En potensfunktion med regneforskrift $f(x) = b \cdot x^a$ hvor $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$ så er

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} \qquad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$



Det vides at $f(x_1) = y_1$ og at $f(x) = b \cdot x^a$, disse to udtryk medfører, at $y_1 = f(x_1) = b \cdot x_1^a$ altså, $y_1 = b \cdot x_1^a$. Tilsvarende vil det gælde for $y_2 = b \cdot x_1^a$. Disse to ligninger divideres.

$$\frac{b \cdot x_1^a}{b \cdot x_2^a} = \frac{y_1}{y_2} \qquad \text{brøken forkortes med } b$$

$$\frac{x_1^a}{x_2^a} = \frac{y_1}{y_2} \qquad \text{potensregnereglen } \frac{y^s}{x^s} = \left(\frac{y}{x}\right)^s$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a = \frac{y_1}{y_2} \qquad \text{den naturlige logaritme}$$

$$\ln\left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \qquad \text{logaritmeregnereglen } \ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$a \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \qquad a \text{ isoleres}$$

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \qquad \text{logaritmeregnereglen } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$a = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{\ln(x_1) - \ln(x_2)}$$

Nu kendes a, hvilket bruges til at finde b, fordi

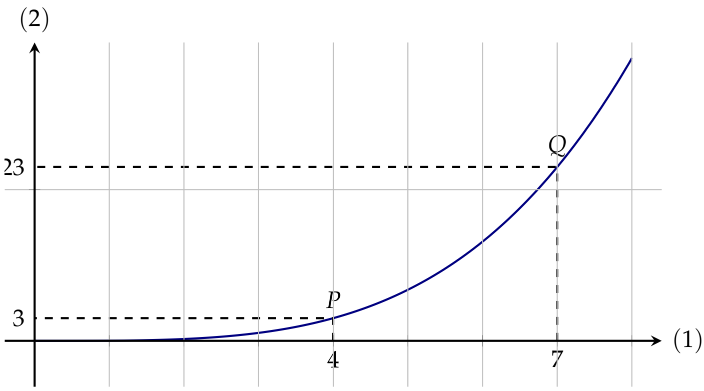
$$b \cdot x_1^a = y_1$$

Og dette medfører, at

$$b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

Video med eksempel på beregning af forskrift, afhængig og uafhængig variabel i en potensfunktion.

■ **Eksempel 35** Grafen for en potensfunktion går gennem punkterne $P(4,3)$ og $Q(7,23)$.



Forskriften for funktionen udregnes ved først at finde a,

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(23) - \ln(3)}{\ln(7) - \ln(4)} = 3{,}64$$

og derefter b: $b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{3}{4^{3{,}64}} = 0{,}0193$. Forskriften bliver

$$f(x) = 0{,}0193 \cdot x^{3{,}64}$$

■

Øvelse 59 Bestem forskriften for en potensfunktion hvis graf går gennem punkterne $(2, 23)$ og $(6, 138)$.

Opgaver hvor forskrift, afhængig og uafhængig variabel skal beregnes for en potensfunktion.

Øvelse 60 I en biograf koster én billet 50 kr og de sælger i gennemsnit 150 billetter til en forstilling. De beslutter at sætte prisen op til 55 kr og derefter sælger de 120 billetter til en forstilling. Det antages at sammenhængen mellem prisen på billetten og antallet af solgte billetter kan beskrives med modellen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor x er prisen på billetterne og $f(x)$ er det gennemsnitlige antal solgte billetter.

a) Bestem a og b i modellen.

b) Bestem ændringen i den samlede indtægt for biografen.

Sætning 9 For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ og for et tal k gælder, at

$$f(x \cdot k) = f(x) \cdot k^a$$

■ **Bevis**

$$\begin{aligned} f(x \cdot k) &= b \cdot (x \cdot k)^a && \text{potensregnereglen } (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \\ &= b \cdot x^a \cdot k^a && f(x) = b \cdot x^a \\ &= f(x) \cdot k^a \end{aligned}$$

■

Det betyder, at når x ændres med en procent p_x, ændres $y = f(x)$ også med en procent p_y. Fra procentregning vides, at et tal ændres en en procent ved at gange det med $p + 1$, hvor p er den procent tallet ønskes ændret med.

■ **Eksempel 36** Ønskes tallet 54 øget med 20 %, beregnes

$$54 \cdot (0{,}20 + 1) = 64{,}8$$

■

Det betyder at sætning 9 betyder

Sætning 10 For potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ gælder at en procentændring i p_x i den uafhængige variabel x medfører en procentændring p_y i den afhængige variabel $y = f(x)$. Sammenhængen mellem p_x og p_y er

$$(1 + p_x)^a = p_y + 1$$

Video med eksempel på beregning af procent-procentvækst.

■ **Eksempel 37** Arealet af en cirkel bestemmes med formlen $A = \pi \cdot r^2$, hvor r er radius på cirklen. Når radius vokser med 30%

$$(1 + 0{,}30)^2 - 1 = 0{,}69$$

vokser arealet med 69%. ■

■ **Eksempel 38** Lad $f(x) = 0{,}3 \cdot x^{4{,}1}$. Antag at x øges med 3 %. Hvor mange procent ændres $f(x) = y$ med?

Sættes $p_x = 0{,}03$ og $a = 4{,}1$ ind i formlen fås

$$p_y = (1 + 0{,}03)^{4{,}1} - 1 = 0{,}129$$

y ændres med 12,9 %. ■

Opgaver hvor procent-procentvækst skal beregnes.

Øvelse 61 Sammenhængen mellem alderen og arealet af en musling kan beskrives med sammenhængen

$$A = 0{,}3 \cdot t^{0{,}9}$$

hvor A er arealet af muslingen og t er alderen af muslingen.

a) Bestem muslingens areal, når alderen er 12.

b) Bestem muslingens alder, når arealet er 0,9.

c) Bestem hvor mange procent arealet øges med, når muslingens alder øges med 25%.

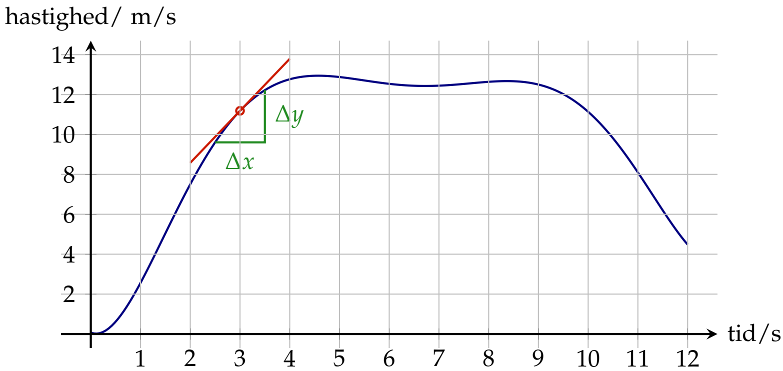
3.9 *Introduktion til differentialregning*

Ideen med differentialregning er at se på *uendeligt* små forskelle[1] i x-værdien. I det følgende ses på et eksempel hvor hastigheden og tiden er målt for 12 sekunderes kørsel i en bil. Bilen kører mellem to lyssignaler. Hastigheden er omregnet fra km/t til m/s. 40 km/t er cirka 11 m/s. Differentialregning kan bruges til at besvare en række spørgsmål om kørslen.

[1] differenser

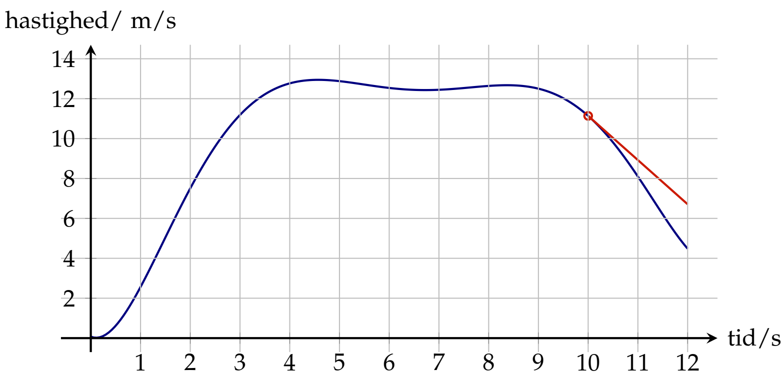
- Hvad er bilens acceleration på et bestemt tidspunkt?
- Hvad ville hastigheden være hvis accelerationen, på et bestemt tidspunkt, fortsatte?
- Hvornår har bilen lokal maksimal og minimal hastighed?
- Hvad er den maksimale og minimale hastighed?
- I hvilket tidsrum er bilens acceleration positiv og i hvilket tidsrum er bilens acceleration negativ?
- Hvor langt er bilen kørt?

Bilens acceleration der i differentialregning generaliseres til væksthastigheden, der kan beregnes for et interval med formlen $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ bliver i differentialregning beregnet i et enkelt punkt og her anvendes formlen $\dfrac{dy}{dx}$.



Væksthastigheden, der i dette tilfælde er accelerationen, ved 3 s er 2,6 m/s^2. Dette beregnes ved at bestemme hældningen af den røde rette linje, der kaldes tangenten, og tangenten er tegnet i punktet hvor $x = 3$. Hældningen af tangenten kan bestemmes ved at aflæse to punkter på tangenten og ikke på grafen for hastigheden.

For at bestemme bilens hastighed, hvis accelerationen er konstant, skal ligningen for tangenten bestemmes. Ligningen for tangenten er ligningen for en ret linje $y = ax + b$, hvor a er hældningen af tangenten og b kan beregnes ved at bruge punktet på grafen, som tangenten er tangent i. I dette tilfælde er punktet ved 10 s og her er hastigheden 11m/s, dette kan også skrives $(10, 11)$.

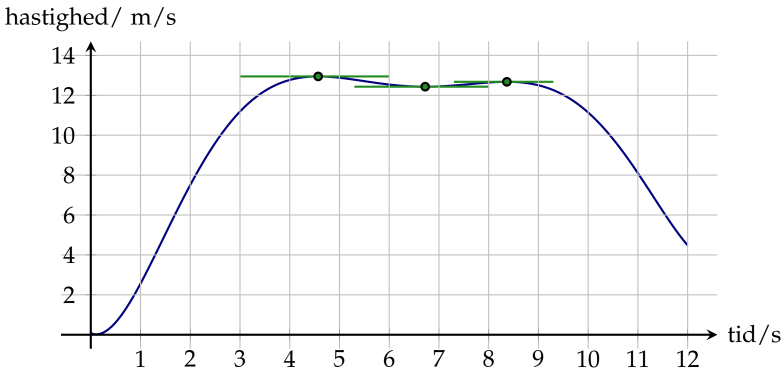


Ligningen for tangenten ved 10 s er $y = -2{,}21x + 33{,}2$. Havde bilen forsat med konstant acceleration ved 10 s, ville bilens hastighed ved 12 s have været

$$-2{,}21\,\mathrm{m/s^2}\cdot 12\,\mathrm{s} + 33{,}2\,\mathrm{m/s} = 6{,}68\,\mathrm{m/s}$$

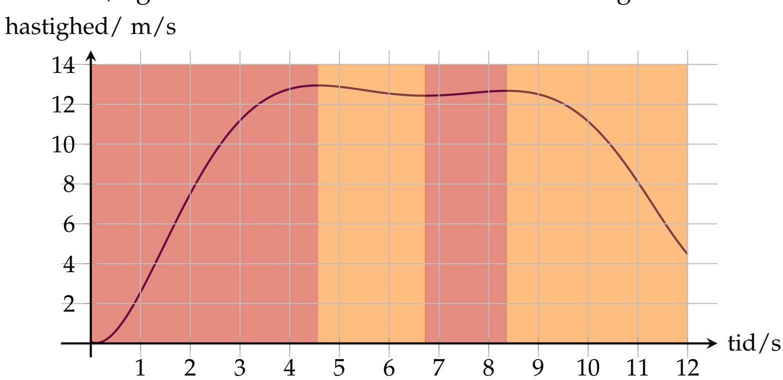
og ikke lidt under 5 m/s, som den faktisk var.

Bilens lokale maksimale og minimale hastighed, der i differentialregning generaliseres til lokale ekstrema, kan bestemmes som de tidspunkter hvor accelerationen er 0. Det er de tidspunkter, hvor hældningen af tangenten er 0, hvilket betyder at tangenten er parallel med 1. aksen.



De lokale ekstrema er ved 4,57, 6,72 og 8,37 sekunder.

I nogle tidsintervaller har bilen en positiv acceleration og i nogle tidsintervaller har bilen en negativ acceleration, i differentialregning generaliseres dette til funktionens monotoniforhold. Det betyder en bestemmelse af, for hvilke x-værdier funktionen er voksende, og for hvilke x-værdier funktionen er aftagende.



Funktionen er voksende når x er i intervallerne $[0; 4{,}56]$ og

[6,72; 8,37] og aftagende når x er i intervallerne [4,56; 6,72] og [8,37; 12].

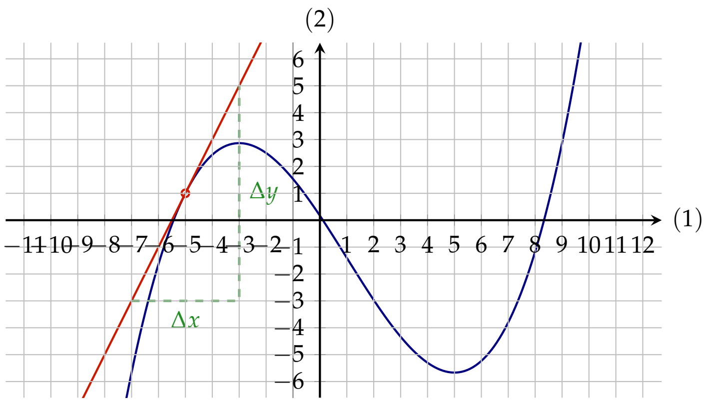
Det hele handler om at bestemme hældningen af tangenten til grafen i et punkt.

- Hældningen af tangenten er væksthastigheden i punktet,
- hældningen af tangenten kan sammen med punktet bruges til at bestemme ligningen for tangenten,
- hvis hældningen af tangenten er 0, har funktionen et lokalt ekstrema,
- hvis hældningen af tangenten er positiv er funktionen voksende, og hvis den er negativ er funktionen aftagende.

Det centrale er at bestemme hældningen af tangenten.

Video med eksempel på grafisk bestemmelse af hældning af tangent.

■ **Eksempel 39** Bestem hældningen af tangenten i punktet $(-5, 1)$ grafisk.

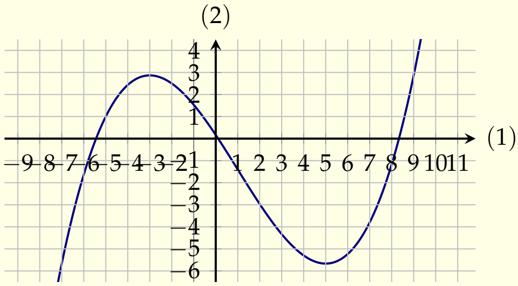


Ved først at tegne tangenten i punktet (−5,1) og derefter at aflæse de to punkter $(-7, -3)$ og $(-3, 5)$ er det muligt at bestemme hældningen af tangenten.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-(-3)}{-3-(-7)} = \frac{8}{4} = 2$$

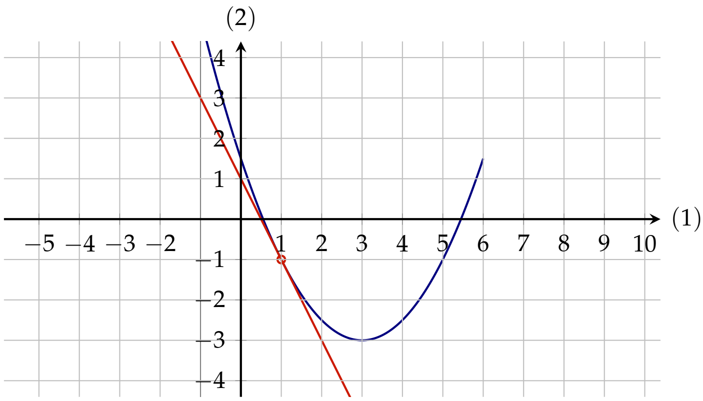
■

Øvelse 62 Bestem hældningen af tangenten i punktet $(7, -4)$.



Opgaver med grafisk bestemmelse af tangentens hældning.

■ **Eksempel 40** Bestem ligningen af tangenten i punktet $(1, -1)$.



Først tegnes tangenten i punktet $(1, -1)$. Herefter aflæses et punkt $(-1, 3)$. Hældningen a på tangenten bliver så

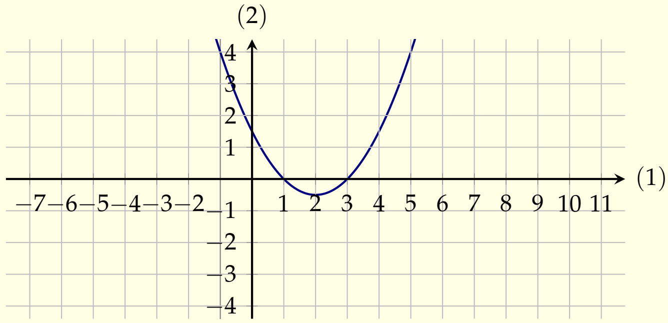
$$a = \frac{-1-3}{1-(-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ved at indsætte punktet $(1, -1)$ i tangentens ligning $y = ax + b$ sammen med hældningen fås, at

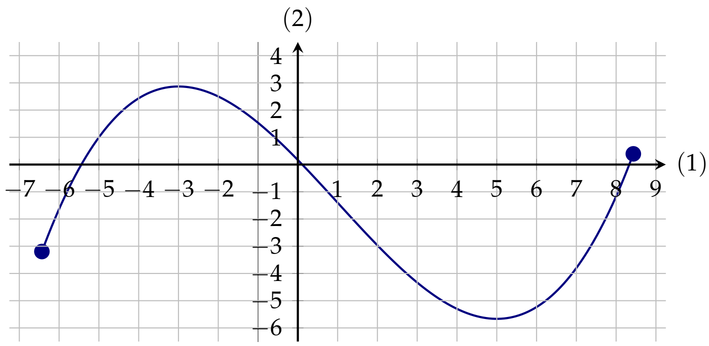
$$\begin{aligned} -1 &= -2 \cdot 1 + b && a = -2, y = -1, x = 1 \\ -1 &= -2 + b && \text{reducering} \\ -1 + 2 &= b && \text{2 lægges til ligningen} \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Tangentens ligningen er $y = -2x + 1$. ■

Øvelse 63 Bestem ligningen for tangenten i punktet $(3, 0)$.

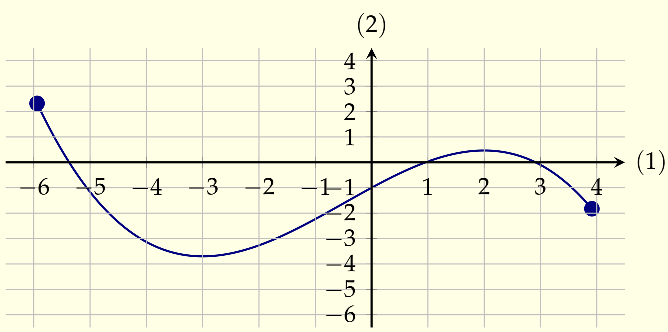


■ **Eksempel 41** Bestem lokale ekstrema for funktionen

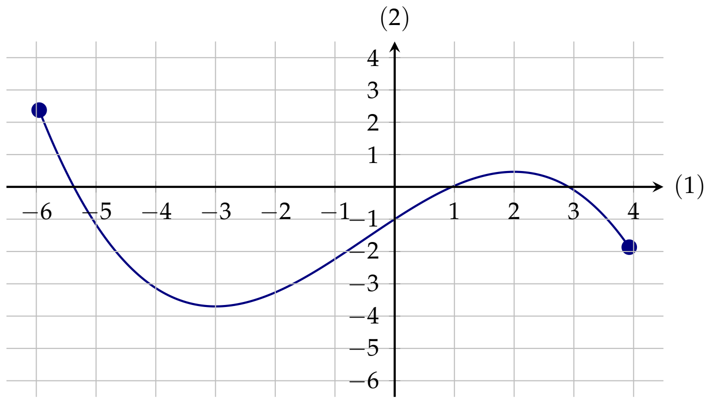


På grafen ses at ved $x = -3$ har funktionen et lokalt maksimum og ved $x = 5$ har funktionen et lokalt minimum. ■

Øvelse 64 Bestem lokale ekstrema for funktionen hvis graf ses på figuren.

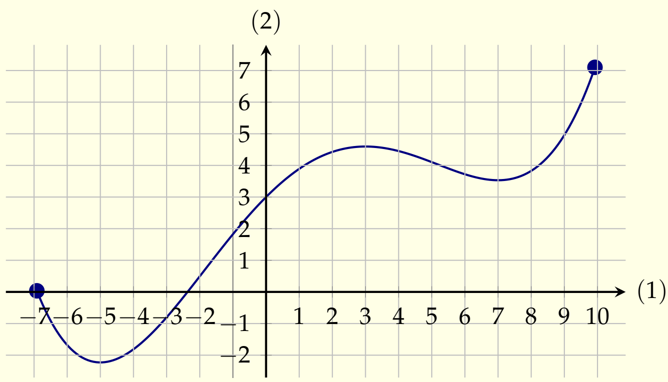


■ **Eksempel 42** Bestem monotoniforhold for funktionen.



Fra -6 til -3 er funktionen aftagende og fra -3 til 2 er funktionen voksende og fra 2 til 4 er funktionen aftagende. ■

Øvelse 65 Bestem monotoniforhold for funktionen.



Video med eksempel på grafisk bestemmelse af monotoniforhold.

Opgaver hvor monotoniforhold skal bestemmes grafisk.

3.10 *Eksamensspørgsmål*

a) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + b$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt.

b) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for eksponentialfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt. Bevis formlerne til beregning af fordoblings- og halveringskonstanten.

c) Gennemgå betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb for potensfunktionen med forskriften $f(x) = b \cdot x^a$. Bevis formlerne til beregning af a og b når netop to punkter på grafen er kendt. Bevis formlen til beregning af procentvækst.

d) Gennemgå betydningen af konstanterne a, b og c for grafens forløb for andengradspolynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$. Bevis formlen til beregning af rødderne.

4
Opsparing og lån

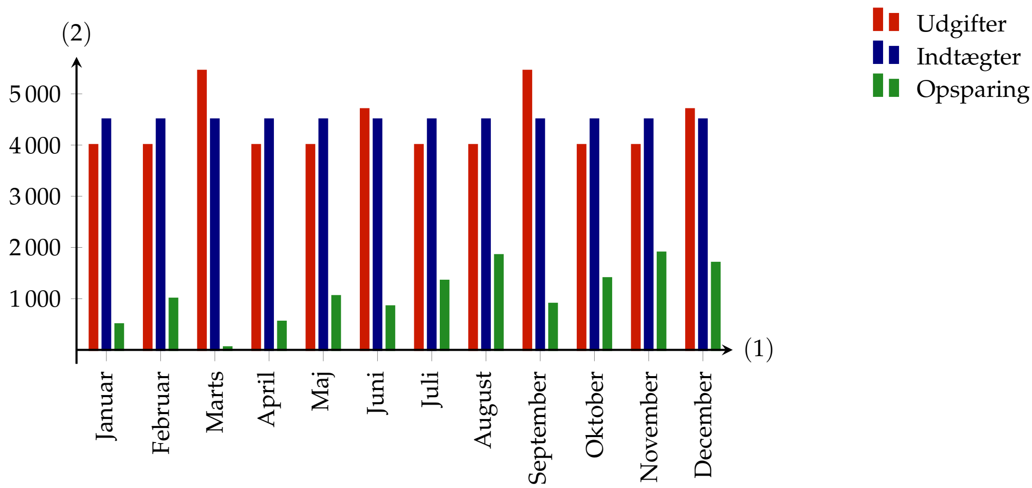
Grunden til at det er en god idé at spare op, er at der på den korte bane vil komme perioder hvor udgifterne er større end indtægten. Nogle udgifter betales fx kun hver tredje måned eller to gange om året. Mens indtægten er hver måned. Den mest simple form for opsparing, hvor det blot er penge, der ikke er blevet brugt.

■ **Eksempel 43** I følgende eksempel ses på indtægter og udgifter får et år.

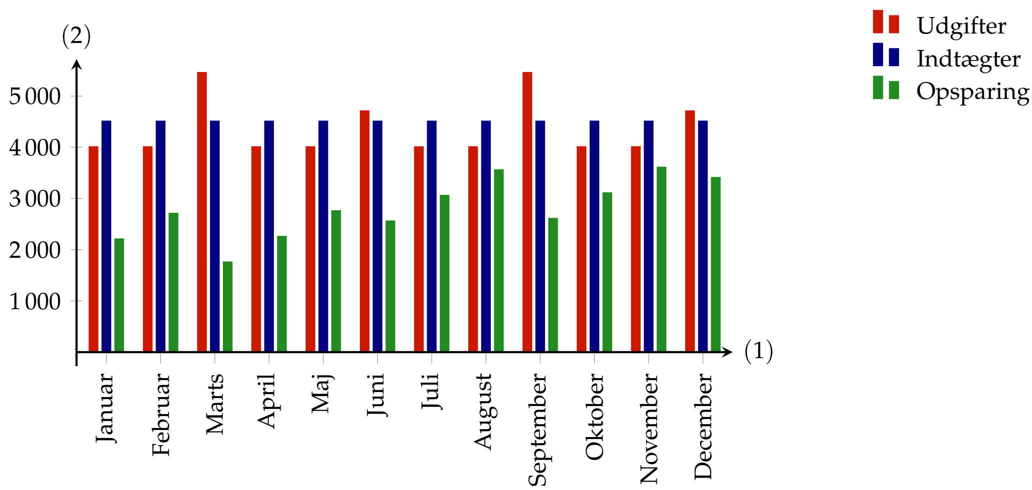
Måned	Mad	Husleje	Forskring	El	Udgifter	Indkomst	Opsparing
Januar	1000	3000			4000	4500	500
Februar	1000	3000			4000	4500	1000
Marts	1000	3000	750	700	5450	4500	50
April	1000	3000			4000	4500	550
Maj	1000	3000			4000	4500	1050
Juni	1000	3000		700	4700	4500	850
Juli	1000	3000			4000	4500	1350
August	1000	3000			4000	4500	1850
September	1000	3000	750	700	5450	4500	900
Oktober	1000	3000			4000	4500	1400
November	1000	3000			4000	4500	1900
December	1000	3000		700	4700	4500	1700

Det ses, at det er nødvendigt at spare op i januar og februar fordi i marts skal penge bruges til forsikring og el. Hvis pengene ikke var blevet sparet op, ville det være nødvendigt at låne penge for at betale regningerne til el og forsikring. Lånet skulle så betales tilbage i de følgende måneder. Hvis de samlede udgifter over året var over 1 700 større, ville der blive opbygget en gæld der ikke kunne betales tilbage.

Grafisk vil året se således ud.



Hvis opsparingen ikke bliver brugt vil det følgende år se således ud. Selvom opsparingen ikke er særligt stor hver måned, er den allerede efter 2 år næste lige så stor om indkomsten i en enkelt måned.



■

Indtægter kan være løn, SU, dagpenge, renterindtægt, udbytte, lejeindtægter, overskud fra en virksomhed og ligende.

Udgifter kan være skat, renteudgifter, lejeudgifter, serviceydelser (transport, frisør, tandlæge, børnepasning, osv.), cykel, bil, ferierejser, mad osv.

Det er som sagt vigtigt, at indtægterne samlet set er større end udgifterne. Men hvorfor, hvad er meningen? En opsparing skal bruges til at gøre dig uafhængig af et lønnet arbejde og offentlig støtte. Hvis du ikke bliver uafhængig, så i hvert fald mindre afhængig. Det betyder, at din indkomst kommer fra renterindtægt, udbytte, lejeindtægter, overskud fra en virksomhed og ligende. For at få denne type af indtægt skal der bruges penge på at købe aktiver som fast ejendom, aktier og obligationer. Eller du skal bruge tid på at skabe intellektuel ejendom (fx youtube video, kunst, litteratur, opfindelser) eller opbygge din egen virksomhed. Det betyder også at du ikke skal have udgifter til fx gæld og at du generelt skal have så få udgifter som muligt. Hvis du vil være økonomisk uafhængig skal du have aktiver. Hvor mange aktiver skal du have, for at være økonomisk uafhængig afhænger af hvor mange udgifter du har og afkastet af dine aktiver? Din opsparing skal altså bruges til at købe aktiver. Dine aktiver giver dig et afkast der afhænger af hvor meget du har.

■ **Eksempel 44** Du har sparet 10 000 kr op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget får du så pr. år?

$$10\,000 \cdot 0{,}03 = 300$$

Det giver dig 300 kr om året. ■

300 kr virker ikke af meget, men hvis du ikke bruger pengene med det samme, men spare dem op sammen med de 10 000 kr vil det bliver til mange flere penge. For at regne ud hvor mange bruges kapitalfremskrivning formlen.

Sætning 11 — Kapitalfremskrivning.

$$K_n = K_0 \cdot (r+1)^n$$

K_n er kapitalen K_0 vokset til efter n terminer til renten r.

■ **Eksempel 45** Du har sparet 10 000 kr op og køber et aktiv der giver dig 3 % i afkast om året.

Hvor meget har du så efter 20 år?

$$10\,000 \cdot (1+0{,}03)^{20} = 18\,061$$

Efter 20 år har du 18 061 kr. ■

I maple bruges den finansielle solve. N står for antallet af terminer, der i dette tilfælde er år. R% er renten i procent og NV er nutidsværdien af de penge du giver for aktivet. Bemærk at NV er negativt fordi du giver penge for det. FV er fremtidsværdien på de 18 061, som er positivt fordi du får pengene.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 20, R% = 3, NV = -10000)
```

$$FV = 18061.11235$$

■ **Eksempel 46** Du har købt et aktiv til 10 000 kr og sælger det efter 20 år til 15 000 kr.

Hvad er aktivet årligt blevet forrentet med?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for r.

$$10\,000 \cdot (1+r)^{20} = 15\,000$$

Din årlige rente har været 2,05 %. ■

I Maple bruges den finansielle solve. Med $N = 20$ fordi antallet af terminer/år er 20 og $NV = -10000$ fordi der indsættes 10 000 kr, som du ikke længere har til rådighed. $FV = 15000$ er den værdi som pengene har i fremtiden dvs om 20 år.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 20, NV = -10000, FV = 15000)
```

$$R\% = 2.048015365$$

■ **Eksempel 47** Det bedste aktiv du kan købe giver 10 % i årligt afkast, du skal om 5 år bruge 70 000 kr .

Hvor meget skal du købe af aktivet for at have 70 000 kr om 5 år?

Tallene indsættes i ligningen og denne løses for K_0.

$$K_0 \cdot (1 + 0{,}1)^5 = 70\,000$$

Du skal købe for 43 465 kr. ■

I maple bruges den finansielle solve.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 5, FV = 70000, R% = 10)
```

$$NV = -43464.49261$$

Øvelse 66 Line har indsat 3 000 kr på en opsparingskonto til 5 % i rente.

a) Hvor meget vil der stå på kontoen efter 3 år?

b) Hvor mange år går der inden der står mindst 5 000 kr på kontoen?

■ **Eksempel 48** Du har årlige udgifter for 250 000 kr. Du kan investere i et aktiv der giver 7 % i afkast om året. Hvor meget skal du investere for at det dækker dine udgifter og du er økonomisk uafhængig og ikke behøver anden indkomst?

For at løse opgaven opstilles denne ligning.

$$250\,000 = x \cdot 0{,}07$$

Ligningen løses og det giver 3,6 mio. kr. ■

For at have 3,6 mio. kr. at investere skal der spare meget op. Typisk vil det ikke være muligt at gøre dette på en gang, men løbene over flere år. For at regne dette ud anvendes opsparingsannuitet.

Sætning 12 — Opsparingsanniutet.

$$K = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

K kapital efter at der hver termin n er indbetalt y kr til en fast rente på r.

■ **Eksempel 49** Du spare 500 kr op om måneden til 0,1 % i månedlig rente (1,2 % i årlig rente). Hvor mange penge vil du have efter 20 år?

De 20 år er 240 måneder.

$$500 \cdot \frac{(1+0{,}001)^{240} - 1}{0{,}001} = 135\,548$$

Efter 240 måneder hvor der samlet er opsparet 120 000 kr, vil der på grund af renterne være 135 548 kr. ■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette. Her er NV 0 fordi der ikke er sparet nogle penge op endnu og PMT er -500 fordi der hver måned skal betales 500 til opsparingen.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 240, R% = .1, PMT = -500, NV = 0)
```

$$FV = 135548.3555$$

Grunden til at det er en stor fordel at blive økonomisk uafhængig er, at alle når til et tidspunkt hvor det ikke er muligt eller behageligt at arbejde fordi du er nedslidt mentalt eller fysisk, eller fordi dit arbejde er blevet automatiseret og du har ikke energi til at uddanne dig til et nyt arbejde. Et arbejdsliv fra 25 til 65 år. Dette er 40 år. Dette giver 480 måneder.

■ **Eksempel 50** Hvor stor bliver en opsparing med en årlig rente på 5 %, og en månedlig opsparing på 2 500 kr.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{Årlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{månedlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0{,}05} - 1 = 0{,}00407$$

Nu kan den samlede opsparing udregnes

$$500 \cdot \frac{(1 + 0{,}00407)^{480} - 1}{0{,}00407} = 3{,}7\,\text{mio.}$$

■

I maple kan den finansielle solver TVM også bruges til at udregne dette.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 480, R% = 0.407, PMT = -2500, NV = 0)
```

$$FV = 3701550.265$$

Øvelse 67 Agnetes forældre lavede en børneopspring til hende da hun blev født. De indsætter 3 000 kr hvert år og hun kan hæve pengene når hun bliver 18 år.

a) Hvor mange penge kan Agnete hæve hvis banken giver 3 % i rente?

b) Hvor mange af pengene er renter?

c) Efter 8 år beslutter Agnetes forældre, at de vil investere pengene i stede for at få 3 % i rente. Her får de 5 % i rente. Hvor meget kan Agnete hæve mere end hvis forældre ikke havde investeret pengene i aktier?

En opsparing på 2 500 kr, kan virke meget stor hvis indkomsten kun er 4 500 kr. Derfor vil en typisk person opsparer mere senere i livet hvor indkomsten typisk er større og mindre i starten hvor indkomsten er lille. Dette gør at beregningen ikke er helt så simpel.

Øvelse 68 Med baggrund i statiskbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en typisk person vil spare op og med udgangspunkt i en rente på 5 % udregne hvad den samlede opsparing vil blive.

a) Find statisik på den gennemsnitlige indkomst i aldersgrupper i statisikbanken.

b) Antag af personen kan opspare 15% af den del af indkomsten der er over 200 000 kr. Bestem hvor stor opsparingen vil være i de forskellige aldersgrupper. Brug opsparingsanniutetsformlen med udgangspunkt på 0 i hver aldersgruppe. Antag at renten er 5 % om året.

c) Antag at personen arbejder til hun er 65 år. Brug kapitalfremskrivning til at beregne hvad opsparingen i hver aldersgruppe er når personen er 65 år. Antag at renten er 5 % om året.

d) Hvilken aldersgruppe har bidraget mest til den samlede opsparing?

e) Hvad er den samlede opsparing?

f) Lav en model i dit IT-værktøj hvor du kan ændre på parameterne: Alder for økonomisk uafhængighed, årlig rente, den procentvise andel af indkomsten der spares op.

g) Benyt modellen til at lave en opsparing der giver en alder for økonomisk uafhængighed på 50 kr.

Ofte vil du i løbet af dit liv optage et større lån til et hus og bil. Sådan et lån vil du ikke kunne tilbagebetale på en gang, sådan som du ellers gør når du låner af dine venner eller familie. Realkreditforeningen eller instituttet vil også kræve renter og gebyrer i den periode hvor du skylder dem penge. For at lave en udregning af hvad du skal betale løbene og hvor meget de endnu skylder bruges gældsanniutetsformlen.

Sætning 13 — Gældsanniutet.

$$H = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y kr er hvor meget der skal indbetales hver termin (ydelsen) n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r.

■ **Eksempel 51** Du har lånt 1,5 mio. til et hus til en rente på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlig afdrag.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1+0{,}03} - 1 = 0{,}002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen der skal løses for at svare på spørgsmålet er altså

$$1\,500\,000 = y \cdot \frac{1-(1+0{,}002466)^{-360}}{0{,}002466}$$

Det giver et månedlig afdrag på 6 292 kr. Hertil kommer sikkert nogle forskellige gebyrer og bidrag. ■

I maple bruges den finansielle solve. Bemærk at ydelsen er negativ fordi det er penge du skal betale, mens hovedstolen er positiv fordi det er penge du »får«.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(N = 360, R% = 0.2466, NV = 1500000, FV = 0)
```

$$PMT = -6291.101719$$

Det er også muligt at vende problemstillingen.

Øvelse 69 Du har lånt 1,9 mio. til et hus til en rente på 2,5 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem det månedlig afdrag.

■ **Eksempel 52** Du har i dit budget plads til at afdrage 5 000 kr til et hus og renten er på 3 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0{,}03} - 1 = 0{,}002466$$

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen der skal løses for at svare på spørgsmålet er altså

$$H = 5\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}002466)^{-360}}{0{,}002466}$$

Det giver et samlet beløb på ca. 1,2 mio. ■

Med maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(PMT = -5000, R% = 0.2466, N = 360, FV = 0)
```

$$NV = 1192160.028$$

Øvelse 70 Du har i dit budget plads til at afdrage 8 000 kr til et hus og renten er på 4 % pr. år og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem hvor meget du kan låne.

Eller du kan se på det efter du har lånt pengene og sidder med den månedlig regning.

■ **Eksempel 53** Du har lånt 2,5 mio. til dit hus og betaler 8 500 kr i afdrag hver måned og det tilbagebetales i løbet af 30 år.

Bestem den månedlige effektive/faktiske rente.

På 30 år er der 360 måneder. Ligningen der skal løses for at svare på spørgsmålet er altså

$$2\,500\,000 = 8\,500 \cdot \frac{1-(1+r)^{-360}}{r}$$

Det giver en månedlig rente på 0,00116. Denne rente kan omregnes til en årlig med formlen

$$r_{\text{årlig}} = (r_{\text{månedlig}} + 1)^{12} - 1$$

$$r_{\text{årlig}} = (0{,}00116 + 1)^{12} - 1 = 0{,}014$$

Den årlige rente er 1,4 %. ■

Med maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver. FV den fremtidlige værdi er 0 fordi lånet er betalt tilbage.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(NV = 2500000, N = 360, FV = 0, PMT = -8500)
```

$$R\% = 0.1160672092$$

Øvelse 71 Du vil købe en bil til 300 000 og får et tilbud på lån hvor du skal betale 5 000 kr hver måned i 7 år.

a) Hvad kommer bilen til at koste dig samlet over de 7 år?

b) Hvad er dine månedlige omkostninger i procent?

c) Din månedlige rente er 0,75 %. Hvad betaler du i gebyr pr. måned?

d) Hvad er dine årlige omkostninger i procent (ÅOP)?

Fordi du er blevet fyret fra dit job kan det være, at banker bliver nød til at lave en ny tilbagebetalingplan på lånet til dit hus.

■ **Eksempel 54** Du har en restgæld (ny hovedstol) på 0,7 mio. og betaler 8 500 kr i afdrag hver måned og til 5 % i rente, efter at du er blevet fyret kan du nu kun betale 3 500 kr

Bestem hvor mange måneder du skal bruge på at betale .

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0{,}05} - 1 = 0{,}004074$$

Ligningen der skal løses for at svare på spørgsmålet er altså

$$700\,000 = 3\,500 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}004074)^{-n}}{0{,}004074}$$

Det giver 415 måneder. ■

Med maple vil dette kunne udregnes med den finansielle solver.

Maple : Finansiel solver.

```
with(Gym):
TVM(PMT = -3500, R% = 0.4074, FV = 0, NV=700000)
```

$$N = 414.7647670$$

Men et lån kan også være afdragsfrit. Det betyder lidt forenklet at der kun betales renterne i en periode. Ved et lån på 700 000 kr. til en rente på 4 % betales der derfor

$$700\,000 \cdot 0{,}04 = 28\,000$$

Det giver en månedlig betaling på ca. 2 334 kr., men der er så heller ikke afdraget på gælden og hovedstolen er derfor 700 000 kr.

I eksemplet er restgælden kendt, og det er fordi det er muligt at udregne den løbene i gennem afbetalingen af hele lånet. En sådan tabel kaldes en amortisationstabel. I tabellen er der fem koloner. Den første kolonne viser hvilken termin der er tale om og den næste viser hvilken ydelse er på lånet, det vil sige hvor meget låntager (dig) i alt betaler til långiver (banken). Den næste viser renterne der skal betales i denne termin. Den næste viser afdraget på hovedstolen og den sidste viser restgælden.

For at kunne udregne tallene i amortisationstabellen skal fire værdier være kendt: Hovedstolen, renten, ydelsen og antallet af terminer. Som det ses af formlen

$$H = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

H er det samlede beløb der lånes (hovedstolen) og y kr er hvor meget der skal indbetales hver termin (ydelsen) n er antallet af terminer og lånet forrentes med renten r. Er det kun nødvendigt at kende tre af disse for at kunne beregne den sidste. Ofte er det hovedstolen, renten og antallet af terminer der er kendt.

Hovedstol	1 700 000 kr
Antal terminer	360
Årlig rente	2,5 %

Først udregnes den månedlige rente med formlen

$$r_{\text{månedlig}} = \sqrt[12]{1 + r_{\text{årlig}}} - 1$$

$$\sqrt[12]{1 + 0{,}025} - 1 = 0{,}00206$$

Tallene kan nu indsættes i formlen og ydelsen beregnes.

$$1\,700\,000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}00206)^{-360}}{0{,}00206} = 6692.159691$$

Ydelsen bliver så 6 693, da det er mest praktisk af runde op. Det betyder, at den sidste termin bliver lidt mindre end de andre.

Renten udregnes ved at tage den månedlige rente af restgælden

$$\text{Rente} = 1\,700\,000 \cdot 0{,}00206 = 3\,502$$

Afdraget er ydelsen minus renten

$$\text{Afdrag} = \text{Ydelse} - \text{Rente}$$

$$\text{Afdrag} = 6\,693 - 3\,502 = 3\,191$$

Den nye restgæld er den gamle restgæld minus afdraget.

$$1\,700\,000 - 3\,191 = 1\,696\,809$$

Termin	Ydelse	Rente	Afdrag	Restgæld
0	-	-	-	1 700 000,00
1	6 693	3 502,00	3 191,00	1 696 809,00
2	6 693	3 495,43	3 197,57	1 693 611,42
3	6 693	3 488,84	3 204,16	1 690 407,27
4	6 693	3 482,24	3 210,76	1 687 196,51
5	6 693	3 475,62	3 217,38	1 683 979,13
⋮				
356	6 693	67,79	6 625,21	26 282,33
357	6 693	54,14	6 638,86	19 643,47
358	6 693	40,47	6 652,53	12 990,94
359	6 693	26,76	6 666,24	6 324,70
360	6 337,73	13,03	6 324,70	0

I Maple kan amortisationstabellen skrives med brug af kommandoerne renteAmort, afdragAmort og balanceAmort. I alle kommandoerne skal hovedstolen, ydelsen, renten i % og terminnummeret bruges. For at vise alle terminerne laves en sekvens hvor alle terminerne udregnes ved at lade n gå fra 1 til 360. Grunden til at latex er med, er for at få Maple til at lave en line pr. linje i tabellen og n og 6693 er kun med for at de skal passe med tabellen ovenfor.

Maple : Amortisationstabel.

```
with(Gym):
seq(latex([n, 6693,
renteAmort(1700000, 6693, .206, n),
afdragAmort(1700000, 6693, .206, n),
balanceAmort(1700000, 6693, .206, n)
]), n = 1 .. 360)
```

Som du sikkert kan fornemme er der ikke tale om en simpel situation, fordi der ofte i en 30-årige periode kan ske større ting i ens liv, der gør at sådanne lån ikke bliver afviklet efter bogen. Det kan være flytning, arbejdsløshed, skilsmisse, børn og ligende.

Derfor er det vigtigt hele tiden at kende den aktuelle restgæld, eller i det mindste at kunne beregne den.

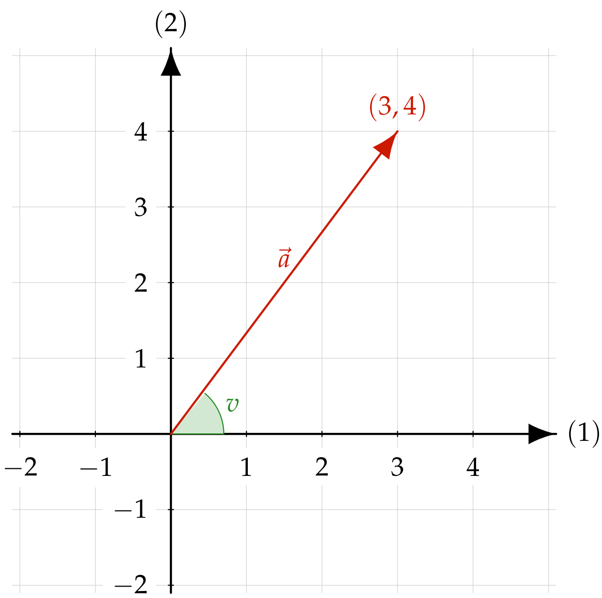
Øvelse 72 Med baggrund i statiskbankens data om sammenhæng mellem alder og personlig indkomst skal du med beregninger vise hvor meget en gennemsnitsperson vil kunne låne med udgangspunkt i en rente på 5 %.

a) Antag af personen kan bruge 30% af den del af indkomsten der er over 150 000 kr. til afbetaling på et lån. Bestem hvor stor et lån der kan optages i de forskellige aldersgrupper.

b) Hvordan vil afbetalingen af et lån på 3,5 mio. forløbe for en gennemsnitsperson?

5 Vektorer

En vektor er en størrelse med retning. Geometrisk angives vektorer som pile, hvor længden af pilen er størrelsen på vektoren og retningen er vektorens retning i et koordinatsystem i forhold til vinklen mellem vektoren og 1. aksen.



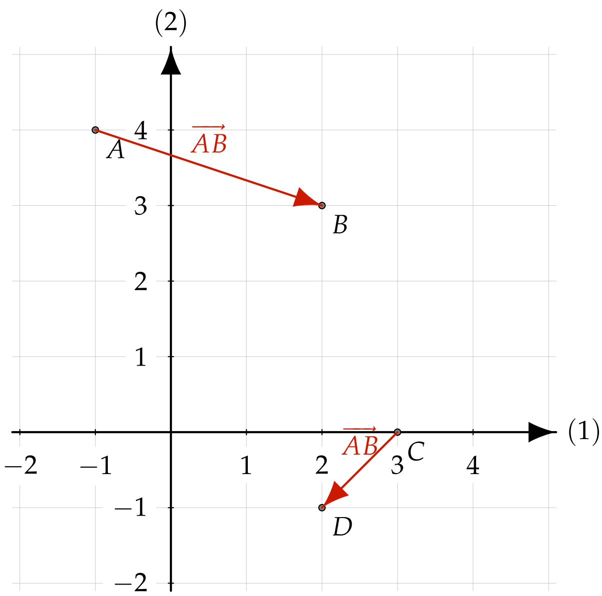
Aritmetisk angives de med koordinatsæt. En vektor består af lige så mange komponenter som der er dimensioner i det rum vektoren er. Det betyder at der er to komponenter a_x og a_y, for en vektor i to dimensioner. Vektoren og komponenterne i vektoren skrives ofte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ eller } \vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$ for, at det er muligt at se forskel på en vektor og et punkt, der angives som $(3,4)$.

Vektorer bruges især til to ting. For det første bruges vektorer til at repræsentere forskellige fysiske størrelser fx trækkraft eller tyngdekraft eller vind. Det væsentlige er, at det vektorer kan beskrive skal ikke 'bare' være en størrelse, som fx det blæser med 2 m/sek. eller der er 40 kr på min konto eller der er en elektrisk strøm på 25 volt eller tyngdekraften er på 9,43 N osv. Udover at der skal være tale om en størrelse skal der også være tale om en retning, så vinden blæser med 2 sek/m fra NNV (Nord-nord-vest) eller tyngdekraften trækker i retning mod Jorden også kaldet ned. De 40 kr. på min konto har ikke nogen retning, saldoen kan godt ændre sig men, i sig selv har saldoen ingen retning.

En vektor kan defineres ud fra to punkter. Punkterne A, B, C og D, kan bruges til at definere



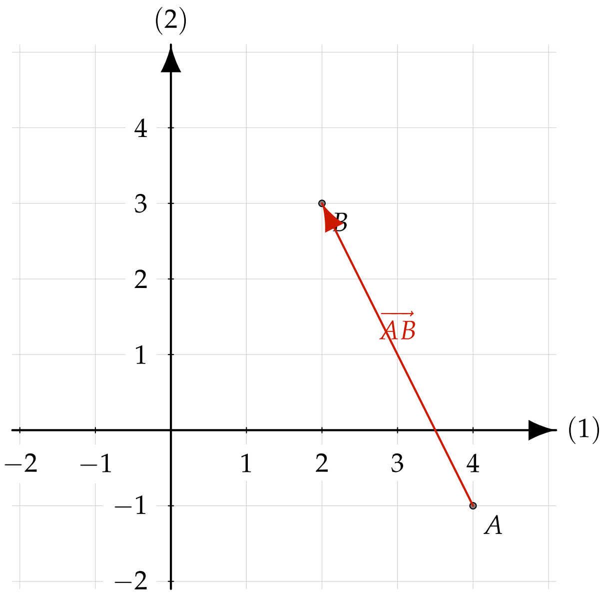
En vektor navngives med deres endepunkter fx $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$. En vektor er den kortest afstand mellem de to punkter.

En vektor kan defineres ud fra to punkter.

Definition 16 — Vektor mellem to punkter. En vektor fra $A(A_x,A_y)$ til $B(B_x,B_y)$ har følgende komponenter

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix}$$

■ **Eksempel 55** En vektor $\overrightarrow{AB}$ fra $A(4,-1)$ til $B(2,3)$.



Vektor $\overrightarrow{AB}$ er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

Øvelse 73 Bestem en vektor fra punktet A til B.

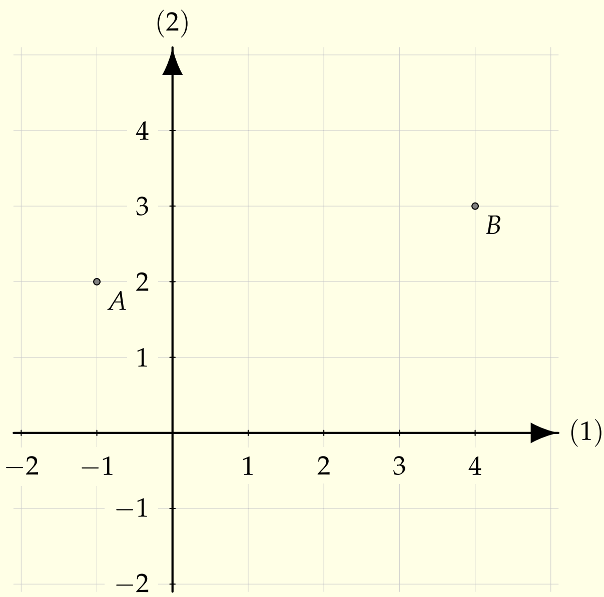
a) $A(2,4)$ til $B(-3,2)$

b) $A(-2,2)$ til $B(3,-3)$

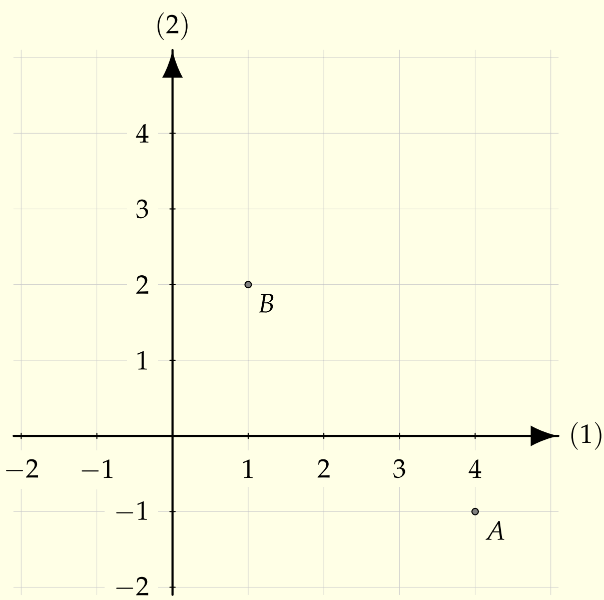
c) $A(0,1)$ til $B(1,-5)$

d) $A(-3,10)$ til $B(-4,8)$

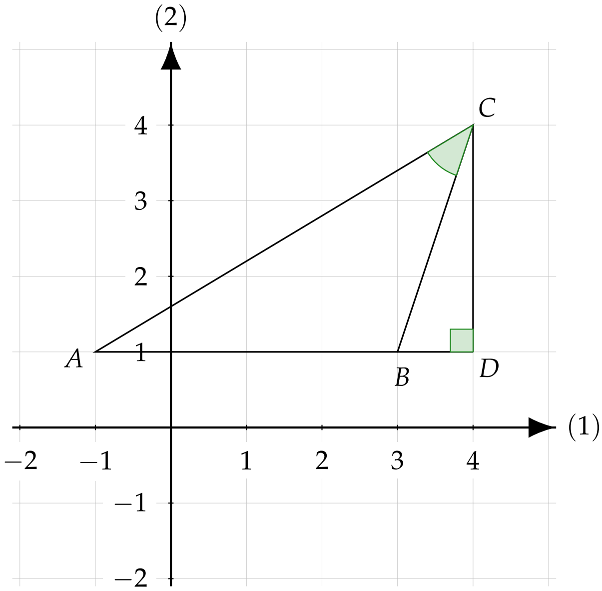
Øvelse 74 Bestem en vektor fra A til B.



Øvelse 75 Bestem en vektor fra A til B.

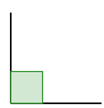


Vinklerne i en polygon navngives efter de punkt vinkelspidsen ligger i her C. Hvis der er tvivl om hvilken der er tale om, navngives vinklen med de tre punkter der skaber vinklen, med den aktuelle vinkel i midten her vinkel ACB.

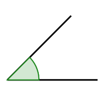


En vinkel er en brøkdel af en cirkel, en vinkel måles i grader, en hel cirkel har 360°. Vinkler inddeles i fire typer.

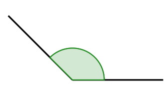
Lige vinkel 180°



Ret vinkel 90°

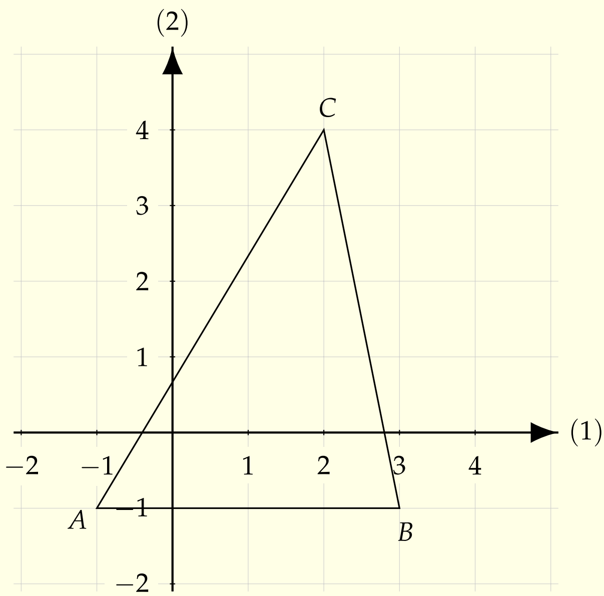


Spids vinkel $< 90°$

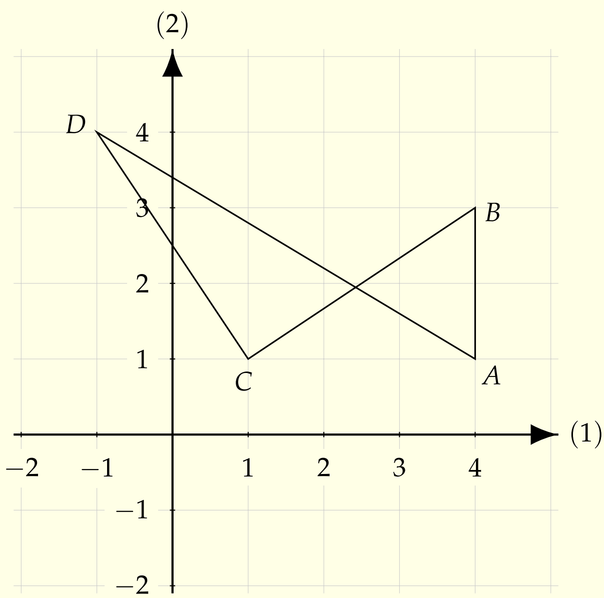


Stump vinkel $> 90°$

Øvelse 76 Bestem de tre vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.



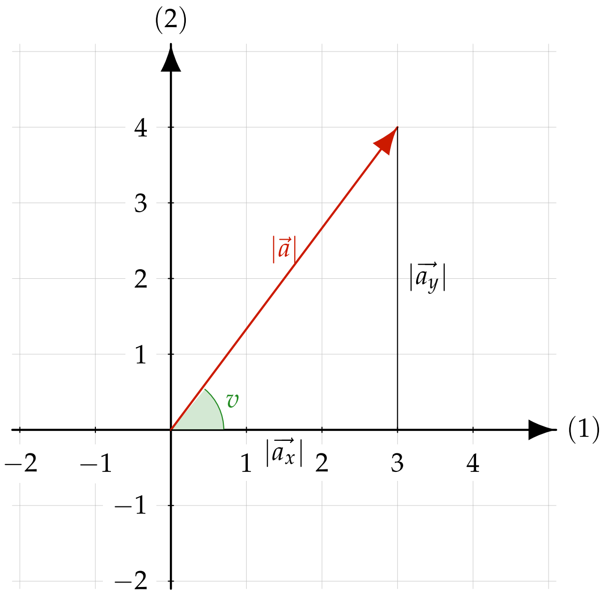
Øvelse 77 Bestem vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.



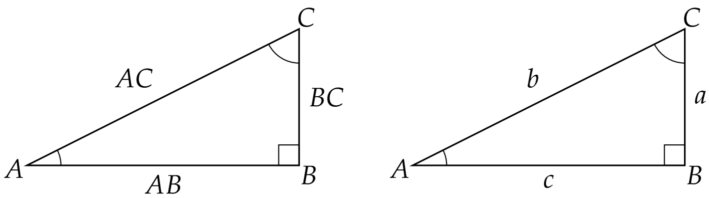
5.1 Længden af en vektor

Længden af en vektor $\overrightarrow{AB}$ skrives $|\overrightarrow{AB}|$. Længden af en vektor kan bestemmes ved at se på den retvinklede trekant, hvor længden af vektoren er længden af hypotenusen. Længden af kateterne i den retvinklede trekant, er længden af vektorens x og y komponent $\vec{a_x}$ og $\vec{a_y}$.

Video der gennemgår definition og længde af en vektor.



Den retvinklede trekant er en trekant med én ret vinkel. Det rette vinkel markeres med en □ som markeringen af vinklen. Vinkler der ikke er rette markeres med en cirkelbue. Trekanten navngives efter de tre punkter fx trekant ABC eller $\triangle ABC$. Siderne i trekanten navngives efter endepunkterne på siderne eller efter det modstående punkt, men med lille bogstav så der ikke opstår forvirring om punkter og sider. Det lille bogstav kan betyde længden af siden eller være navnet på siden.

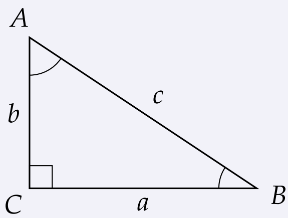


Nu skal ses på nogle af reglerne for en retvinklet trekant. Vi skal se på Pythagoras' sætning, beregning af areal og forholdsberegning. Tilsidst defineres sinus og cosinus, de bruges til at beregne vinkler og længden af sider i den retvinklede trekant. Den retvinklede trekant er udgangspunktet for udregninger i vilkårlige trekanter.

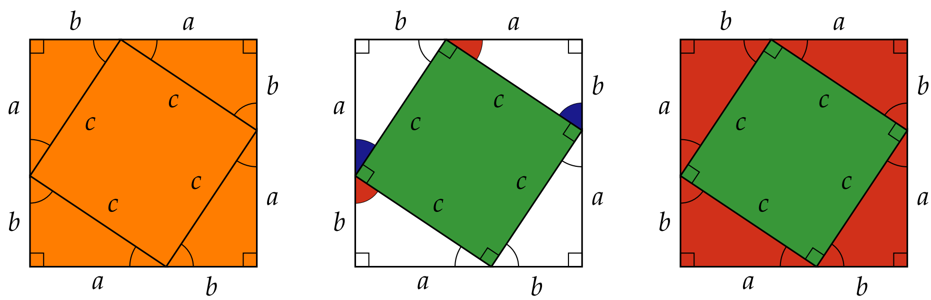
Bevis for Pythagoras' sætning

Sætning 14 — Pythagoras sætning. For en retvinklet trekant ABC hvor vinkel C er ret vil

$$c^2 = a^2 + b^2$$



■ **Bevis** I beviset bruges følgende figurer.



Firkanten markeret med gult er et kvadrat fordi, det har fire rette vinkler og de fire sider er lige lange $(a + b)$. Derfor vil arealet af dette kvadrat være

$$(a+b)\cdot(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

Fordi vinkelsummen i en trekant er 180°, og den rette vinkel er 90°, er summen, af de to resterende vinkler i hver trekant, 90°. Det betyder, at summen to vinkler der ligger overfor hinanden også er 90°. Det betyder, at vinklen i den lille firkant er 90°. Den lille firkant markeret med grønt, er altså et kvadrat. Da sidelængden i det lille kvadrat c, er arealet

$$c^2$$

Summen af arealet af de fire trekanter og det lille kvadrat er

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + c^2 = 2ab + c^2$$

Dette areal er det sammen som arealet af det store kvadrat, derfor er

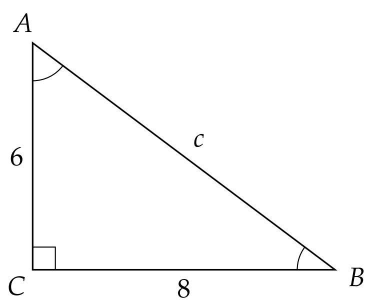
$$2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Det kan reduceres til

$$c^2 = a^2 + b^2$$

■

■ **Eksempel 56** I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af b er 6 og længden af a er 8.
Bestem længden af c.

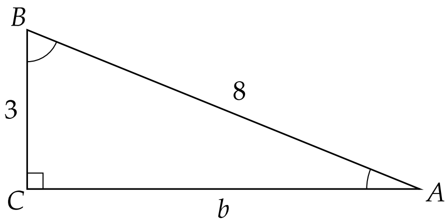


$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + 8^2 \\ c^2 &= 36 + 64 \\ c^2 &= 100 \\ c &= \pm 10 \end{aligned}$$

Den negative løsning er ikke muligt, da længder er positive. Længden af c er derfor 10. ∎

Video med eksempler på anvendelse af Pythagoras sætning.

∎ Eksempel 57 I $\triangle ABC$ er vinkel C ret, længden af c er 8 og længden af a er 3.
Bestem længden af b.



Opgaver hvor Pythagoras sætning skal anvendes.

Oplysninger fra opgaven indsættes i Pythagoras' sætning

$$\begin{aligned} 8^2 &= 3^2 + b^2 \\ 64 &= 9 + b^2 \\ 64 - 9 &= b^2 \\ 55 &= b^2 \\ b &= \pm\sqrt{55} \end{aligned}$$

Da den negative løsning ikke er mulige, da længder er positive, er $b = \sqrt{55}$. ∎

Video med eksempel på beregning af længden af en vektor og bestemmelse af en parameter i en vektor så længden af vektoren har en given længde.

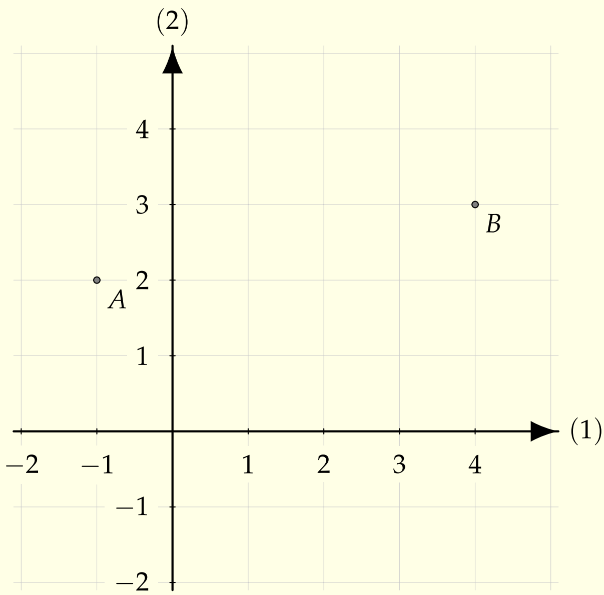
Nu kan størrelsen af en vektor bestemmes, ved Pythagors' sætning.

Sætning 15 Størrelsen eller længden af en vektor kan beregnes med formlen

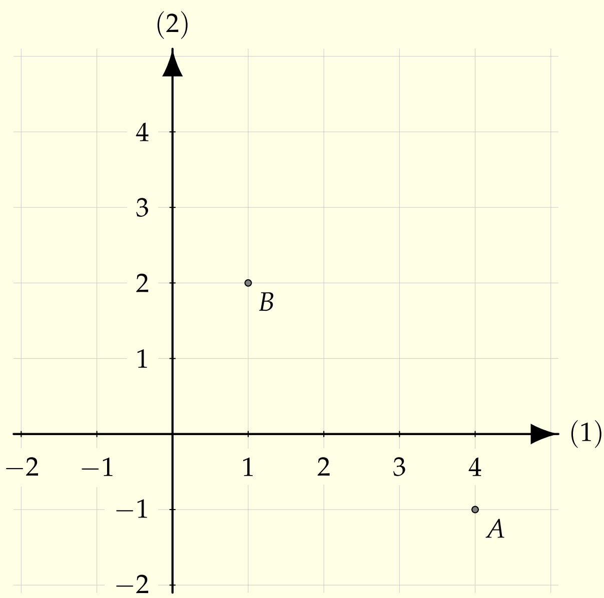
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

hvor a_x og a_y er størrelsen af komponenterne i $\vec{a}$.

Øvelse 78 Bestem længden af en vektor fra A til B.



Øvelse 79 Bestem længden af en vektor fra A til B.



Øvelse 80 Bestem længden af en vektor fra punktet A til B.

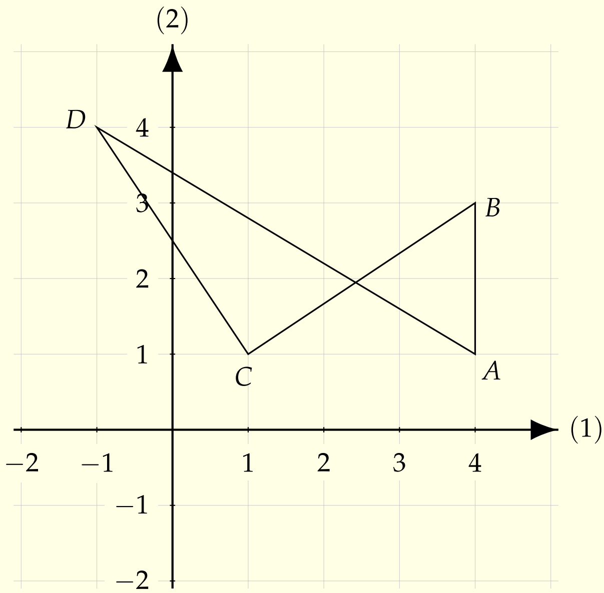
a) $A(2,4)$ til $B(-3,2)$

b) $A(-2,2)$ til $B(3,-3)$

c) $A(0,1)$ til $B(1,-5)$

d) $A(-3,10)$ til $B(-4,8)$

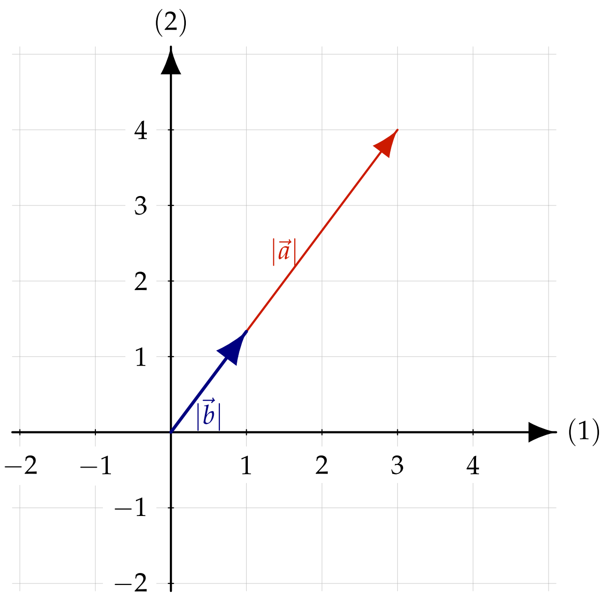
Øvelse 81 Bestem længden af vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$.



5.2 *Vektor aritmetrik*

En størrelse som ikke har en retning og derved er repræsenteret ved et enkelt tal kaldes en skalar. To vektorer der har samme retning[1] men ikke samme længde, er proportionale og proportionalitetfaktoren er en skalar.

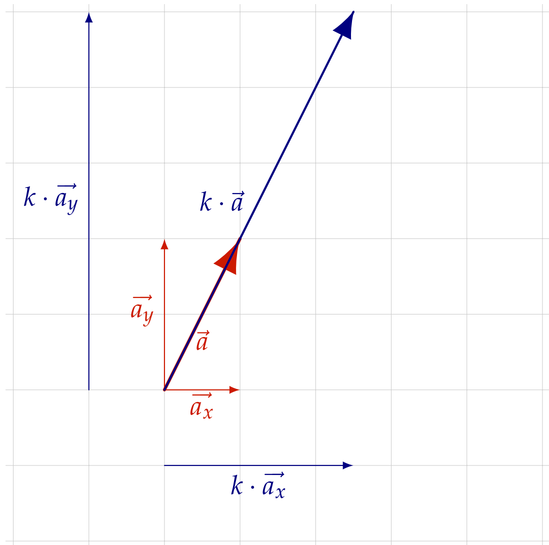
[1] parallelle vektorer



Video hvor skalarmultiplikation, vektor addition og subtraktion og determinant gennemgås.

Definition 17 — Skalar multiplikation. En skalar multipliceres på en vektor på følgende måde.

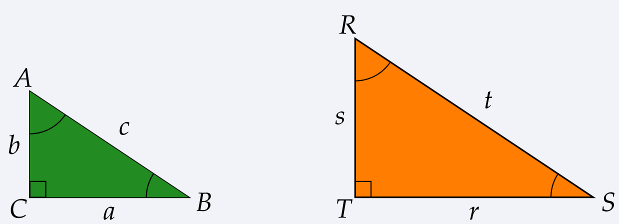
$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$



Det er derfor muligt at beregne en vektors x og y komponenter, hvis en vektor med samme retning er kendt. For at undersøge dette ses igen på retvinklede trekanter.

Definition 18 To trekanter kaldes ensvinklede hvis alle deres vinkler er parvis ens.

Sætning 16 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede retvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F.



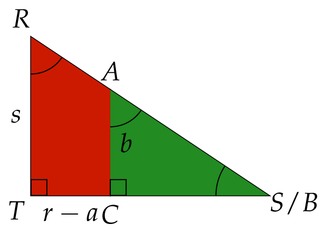
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

■ **Bevis** Arealet af trekant ABC er

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

og arealet af trekant RST er

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r$$



Arealet af trapezen $ACTR$ er

$$\frac{s+b}{2} \cdot (r-a)$$

Arealet af trekant RST er også summen af den lille trekant (grøn) og trapezen (rød) $ACTR$.

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot r = \frac{s+b}{2} \cdot (r-a) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Ved at gange med 2, kan det reduceres til

$$s \cdot r = (s+b) \cdot (r-a) + a \cdot b$$

Ved at gange de to paranteser ud, kan det omskrives til

$$s \cdot r = s \cdot r - s \cdot a + b \cdot r - a \cdot b + a \cdot b$$

Her går $a \cdot b$ og $s \cdot r$ ud

$$0 = -s \cdot a + b \cdot r$$

$s \cdot a$ lægges til

$$s \cdot a = b \cdot r$$

Der divideres med $s \cdot r$

$$\frac{s \cdot a}{s \cdot r} = \frac{b \cdot r}{s \cdot r}$$

Brøkerne forkortes

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$$

Dette beviser den første del af sætningen. For at vise den anden del anvendes Pythagoras' sætning. For trekant ABC gælder at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ved at gange med s^2, bliver det til

$$a^2 \cdot s^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

Vi har lige vist at $s \cdot a = b \cdot r$ og så vil $a^2 \cdot s^2 = b^2 \cdot r^2$.

$$b^2 \cdot r^2 + b^2 \cdot s^2 = c^2 \cdot s^2$$

b^2 kan sættes udenfor parentes på venstre side.

$$b^2 \cdot (r^2 + s^2) = c^2 \cdot s^2$$

Det følger af Pythagoras' sætning, at $r^2 + s^2 = t^2$.

$$b^2 \cdot t^2 = c^2 \cdot s^2$$

Da alle størrelser er positive kan dette omskrives til

$$b \cdot t = c \cdot s$$

Der divideres med $t \cdot s$

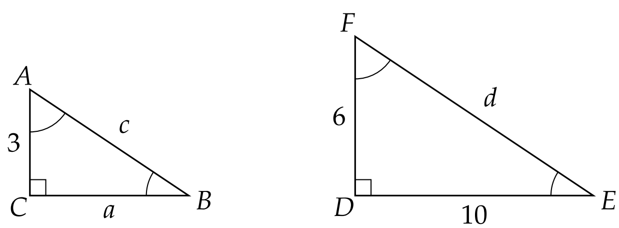
$$\frac{b \cdot t}{t \cdot s} = \frac{c \cdot s}{t \cdot s}$$

Brøkerne forkortes

$$\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$$

Dette beviser den anden del af sætningen. ∎

∎ **Eksempel 58** De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.
Bestem længden af a.



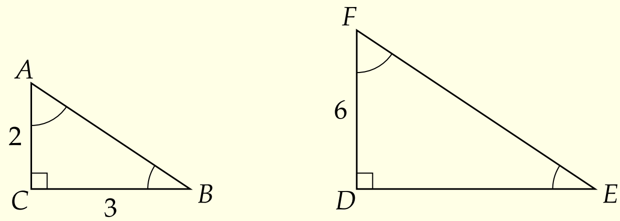
Forholdet mellem de to trekanter er $\frac{3}{6}$, det betyder at

$$a = \frac{3}{6} \cdot 10 = 5$$

■

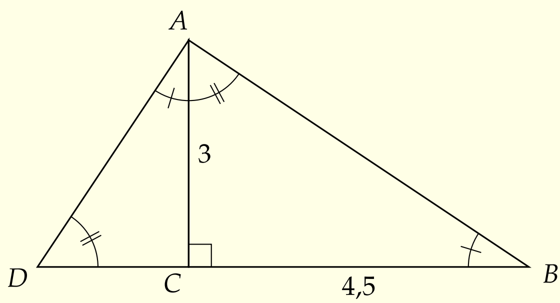
Øvelse 82 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|DE|$.



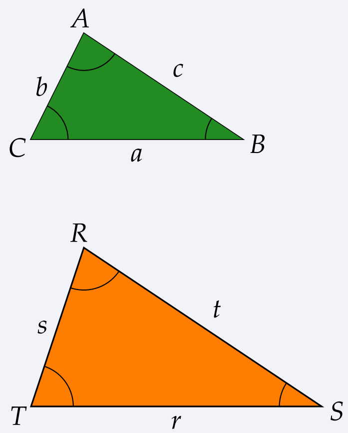
Øvelse 83 De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er oplyst på figuren.

Bestem $|AB|$ og $|CD|$.



Størrelsesforhold er ikke kun konstant for retvinklede trekanter, det gælder også for trekanter der ikke er retvinklede.

Sætning 17 Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter er konstant. Konstanten kaldes forstørrelsesfaktor F.



$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t} = F$$

Definition 19 — Determinant. Determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ mellem to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ er

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Sætning 18 To vektorer er parallelle hvis og kun hvis deres determinant er 0.

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b}) = 0$$

■ **Bevis** To vektorer, der er forskellige fra nul-vektoreren $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$, er parallelle hvis og kun hvis $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{a},\vec{b}) &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x && \text{Definition 19} \\
&= a_x \cdot k \cdot a_y - a_y \cdot k \cdot a_x && \vec{a} = k \cdot \vec{b} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Video med eksempel på afgørelse af om to vektorer er parallelle og bestemmelse af en parameter så to vektorer bliver parallelle.

■ **Eksempel 59** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle -3, 5 \rangle$$

Bestem determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22$$

■

■ **Eksempel 60** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \langle 2, t \rangle \quad \vec{b} = \langle 1, 5 \rangle$$

Bestem værdien en af t der gør $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

Først bestemmes determinanten

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 - t \cdot 1 = 10 - t$$

Hvis de to vektorer skal være parallelle skal determinanten være 0.

$$0 = 10 - t$$
$$t = 10$$

Når $t = 10$ er de to vektorer parallelle. ■

Øvelse 84 Bestem determinanten for de to vektorere.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 0, 5 \rangle$.

Øvelse 85 Bestem værdien af t så de to vektorer er parallelle.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1, t \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle t, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, 5 \rangle$.

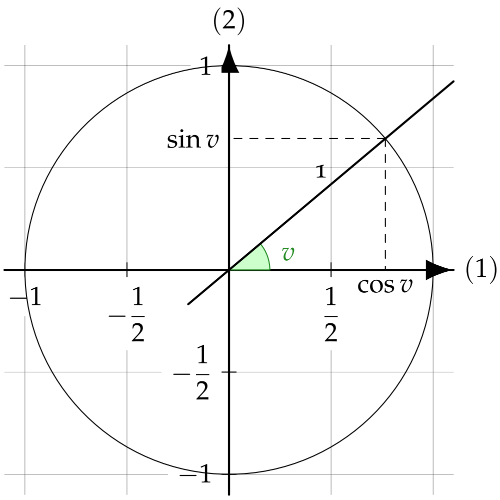
Opgaver hvor værdien af t skal bestemmes så de to vektorer er paralllelle.

For at undersøge vinklen mellem 1. aksen og en vektor bruges sinus og cosinus

Sinus og cosinus er defineret ud fra enhedscirklen. Enhedscirklen er en cirkel med radius 1 og med centrum i (0,0).

Definition af sinus og cosinus

Definition 20 Sinus til en vinkel, v, er defineret som y-koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linie som skærer x-aksen i $(0{,}0)$ og danner vinklen v med x-aksen.



Definition 21 Cosinus til en vinkel, v, er defineret som x-koordinaten til skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette linie som skærer x-aksen i $(0{,}0)$ og danner vinklen v med x-aksen.

Sætning 19 For alle vinkler v gælder at

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

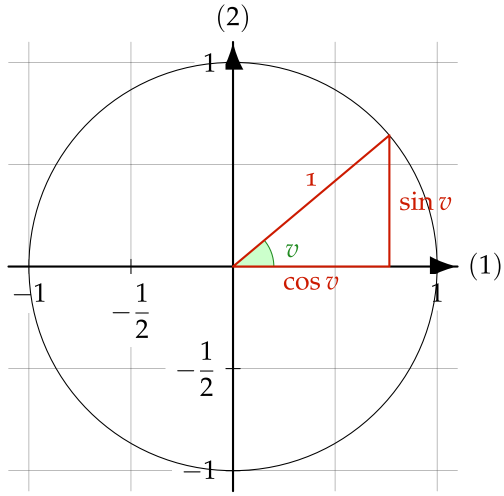
■ **Bevis** Ved at bruge Pythagoras sætning på trekanten markeret med rødt fås

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1^2$$

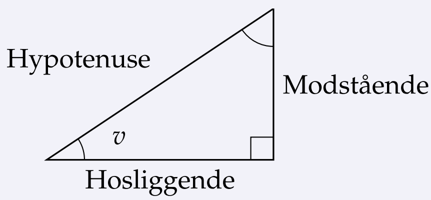
Da $1^2 = 1$

$$\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$$

■



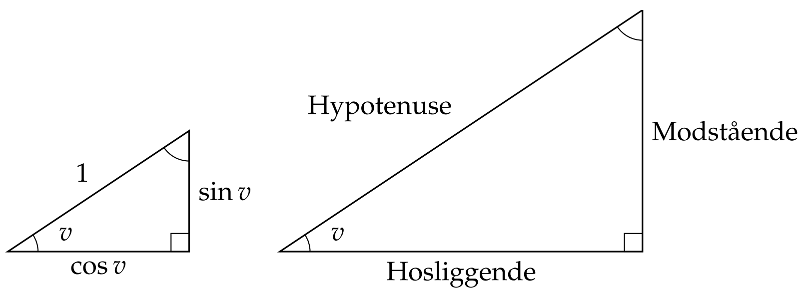
Definitionen af sinus og cosinus kan udvides til alle retvinklede trekanter ved at bruge forholdsberegning.



Sætning 20

For den retvinklede trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



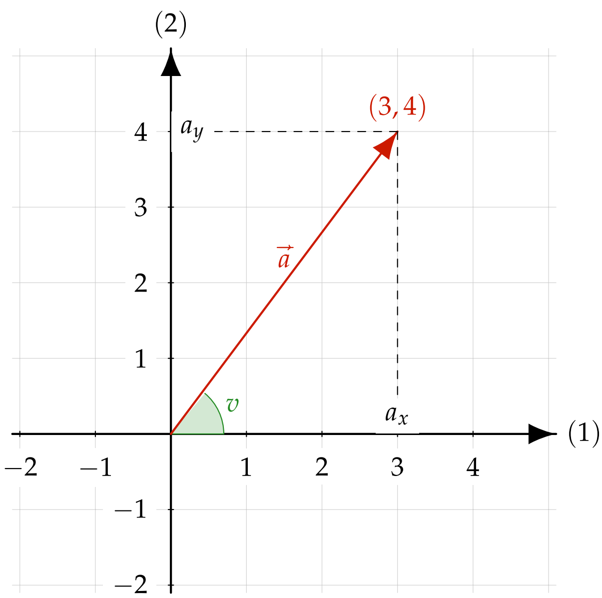
Forholdet mellem siderne i de to trekanter er

$$\frac{\text{Hypotenuse}}{1} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

Ved at se på forholdende to og to kommer følgende ligninger hvor sin og cos kan isoleres.

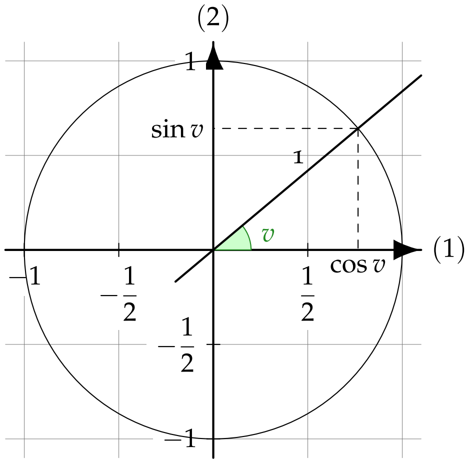
$$\text{Hypotenuse} = \frac{\text{Modstående}}{\sin v} \text{ og Hypotenuse} = \frac{\text{Hosliggende}}{\cos v}$$

$$\sin v = \frac{\text{Modstående}}{\text{Hypotenuse}} \text{ og } \cos v = \frac{\text{Hosliggende}}{\text{Hypotenuse}}$$



Forholdet mellem vinklen v, og størrelsen af komponenterne $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$, ses på enhedscirklen

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= |\vec{a}| \cdot \cos(v) \\ \vec{a}_y &= |\vec{a}| \cdot \sin(v) \end{aligned}$$



■ **Eksempel 61** Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a} = \langle 3{,}4\rangle$ og 1. aksen.

Først bestemmes længden af vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Nu kan vinklen bestemmes med ligningen $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(v)$, hvor v isoleres.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13^\circ$$

■

■ **Eksempel 62** Vinklen mellem en vektor $\vec{a} = \langle t{,}4\rangle$ og 1. aksen er 30°.

Bestem værdien af t.

Først anvendes ligningen $a_y = |\vec{a}| \cdot \sin(v)$. Ved at indsætte de værdier der er kendt fremkommer følgende ligning.

$$4 = \sqrt{4^2 + t^2} \cdot \sin(30^\circ)$$

Denne ligning løses i et værktøjsprogram og løsningerne til ligningen er $t = 6.928$ og $t = -6.928$. ■

Øvelse 86 Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1. aksen.

a) $\vec{a} = \langle 1{,}2\rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1{,}4\rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 0{,}1 \rangle$. d) $\vec{a} = \langle 3{,}0 \rangle$.

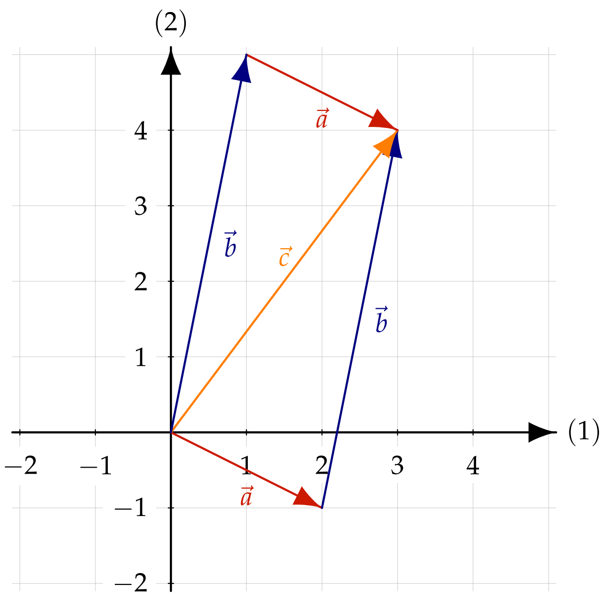
Øvelse 87 Bestem t så vinklen mellem vektoren $\vec{a}$ og 1. aksen er 40°.

a) $\vec{a} = \langle t{,}2 \rangle$. b) $\vec{a} = \langle -1{,}t \rangle$.

To vektorer kan lægges sammen og resultatet, kaldes den resulterende vektor.

De to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ lægges sammen og den resulterende vektor bliver $\vec{c}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

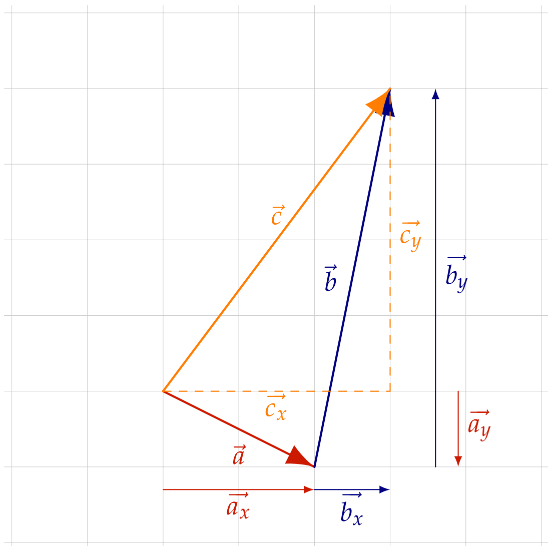


Bemærk at det giver samme resultat, om det er $\vec{a} + \vec{b}$ eller $\vec{b} + \vec{a}$.

Definition 22 — Vektor addition. Summen af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ er summen af størrelsen af hhv. x- og y-komponenterne.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$



Bemærk at $\vec{a_y}$ og $\vec{b_y}$ har modsat fortegn i eksemplet, og derfor peger pilene i hver sin retning.

■ **Eksempel 63** Bestem summen af $\vec{a} = \langle 1, -3 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -5, 7 \rangle$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

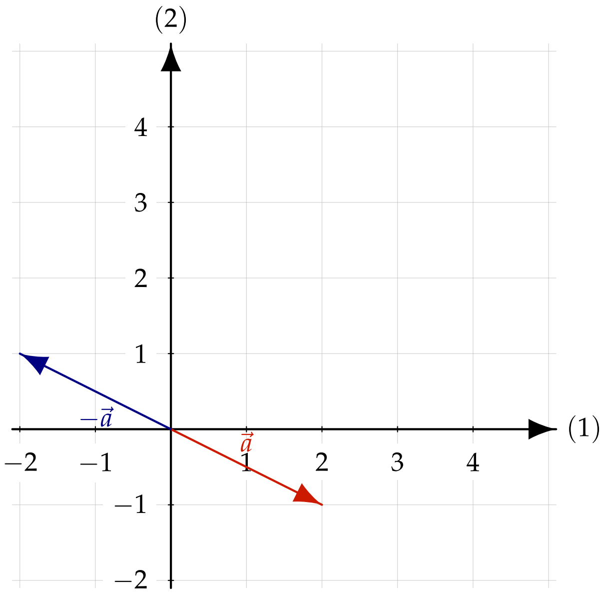
Øvelse 88 Bestem summen af de to vektorerer.

a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$.

En vektor som har samme størrelse som $\vec{a}$ men modsat retning betegnes $-\vec{a}$.



Definition 23 — Vektor subtraktion. Ved beregning af $\vec{a} - \vec{b}$ forstå

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$

■ **Eksempel 64** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestem $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 \\ -2 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Øvelse 89 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

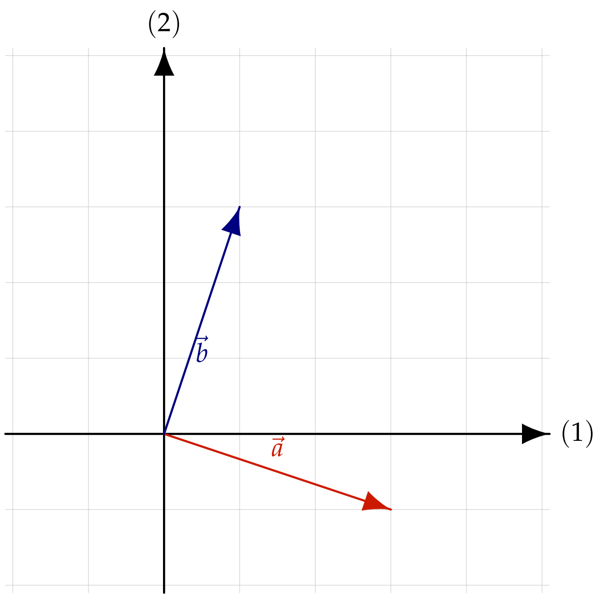
Bestem $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Øvelse 90 To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestem $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} - \vec{b}$.

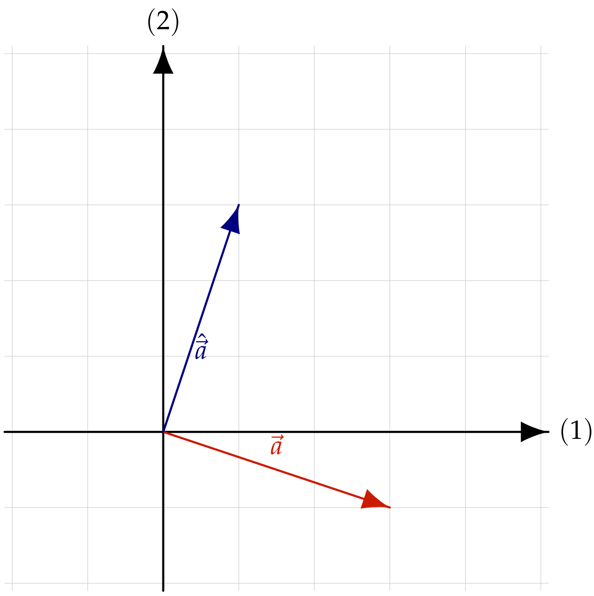
Definition 24 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis vinklen mellem dem er $90°$.



En vektor har flere vektorer der er orthogonal til dem, men fælles for dem er at de alle er proportionale. Det vil sige, at hvis $\vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$ så vil alle ortogonale vektorer til $\vec{a}$ kunne skrives som $k \cdot \vec{b}$ hvor k er en skalar.

Definition 25 En **tværvektor** til en vektor $\vec{a}$ er en vektor som står vinkelret på $\vec{a}$ drejet i mod uret retning. En tværvektor kaldes $\hat{a}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \hat{a} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$



Definition 26 — Skalarprodukt. Skalarproduktet mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Sætning 21 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er **ortogonale** hvis og kun hvis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Video med bevis for formler til beregning af vinklen mellem to vektorer.

■ **Bevis** To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale hvis og kun hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Deres skalarprodukt er derfor

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot k \cdot (-a_y) + a_y \cdot k \cdot a_x$$

Ved reduktion fås at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -k \cdot a_x \cdot a_y + k \cdot a_x \cdot a_y$$

Det ses nu tydeligt at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

■

■ **Eksempel 65** To vektorer er givet ved

Opgaver hvor t skal bestemmes så to vektorer er ortogonale.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -t \\ 12 \end{pmatrix}$$

Bestem t så de to vektorer er ortogonale.

Først beregnes deres skalarprodukt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t \cdot (-t) + 3 \cdot 12$$

Skalarproduktet skal være 0 for at vektorerne er ortogonale og derfor er det følgende ligning der skal løses.

$$0 = -2t^2 + 36$$

$t = \sqrt{18}$ og $t = -\sqrt{18}$ er begge løsninger til ligningen. ■

Sætning 22 Vinklen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som ikke er 0, opfylder at

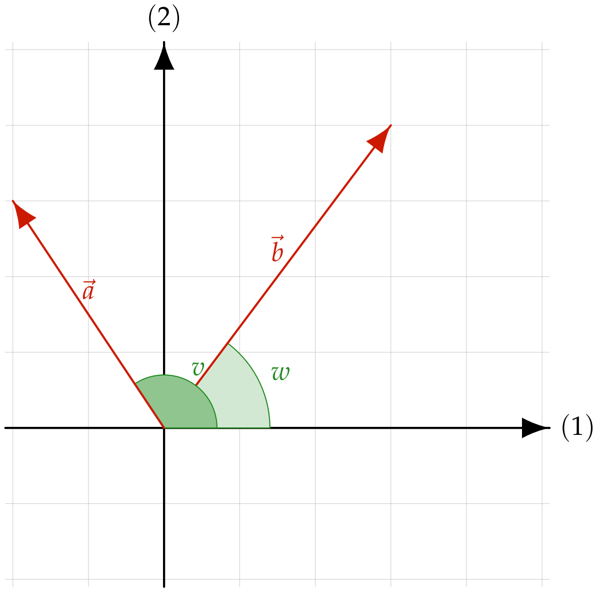
$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

■ **Bevis** I følge definitionen af skalarproduktet er

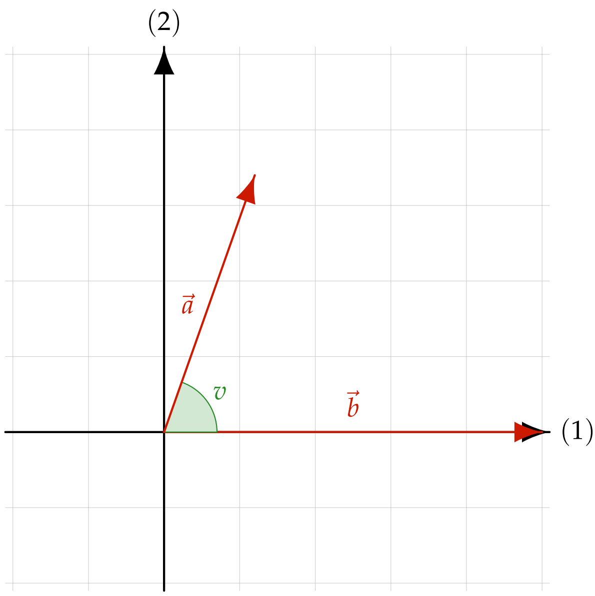
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w$$



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. aksen.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0$$

Da $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 1$, hvilket kan indses ved at se på definitionen af sinus og cosinus på enhedscirklen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

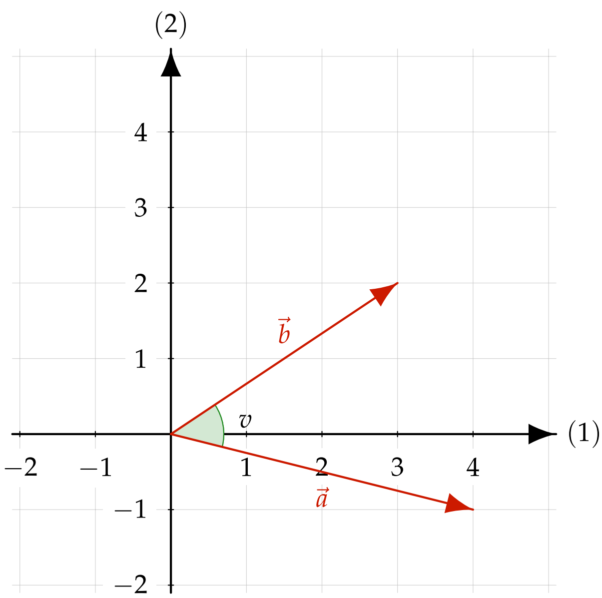
Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

■

■ **Eksempel 66** Bestem vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



For at udregne vinklen bruges formlen

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos v$$

Tallene fra de to vektorer indsættes.

$$\frac{4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot |\sqrt{3^2 + 2^2}|} = \cos v$$

Efter udregning giver det

$$\frac{10}{\sqrt{17} \cdot |\sqrt{13}|} = \cos v$$

Ved omregning til decimaltal

$$0{,}6726727940 = \cos v$$

Det giver en vinkel på 47,7°. ■

I Maple vil udregningen af vinklen kunne gøres med kommandoen vinkel.

Maple

```
with(Gym):
vinkel(<4,-1>,<3,2>)
```

47.72631098

Øvelse 91 Bestem vinklen mellem af de to vektorer.

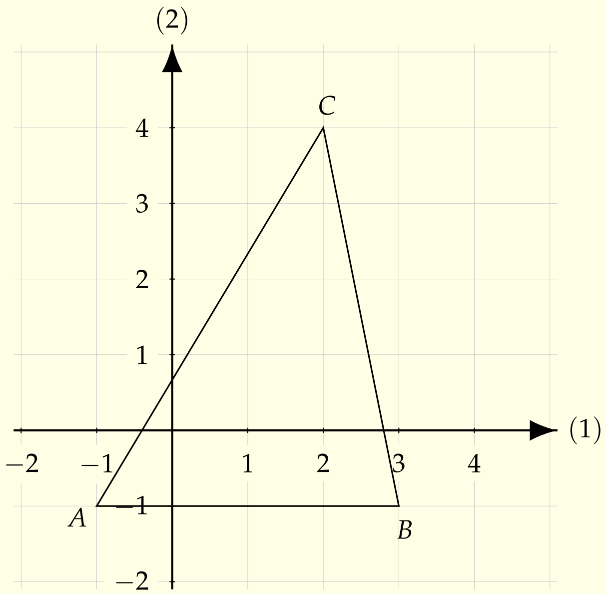
a) $\vec{a} = \langle 4, 5 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$.

b) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$.

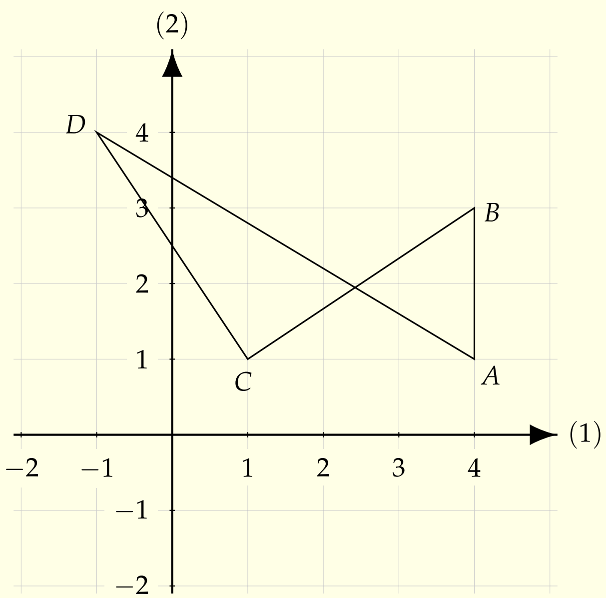
c) $\vec{a} = \langle 1, 0 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -1, 2 \rangle$.

d) $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 0, 5 \rangle$.

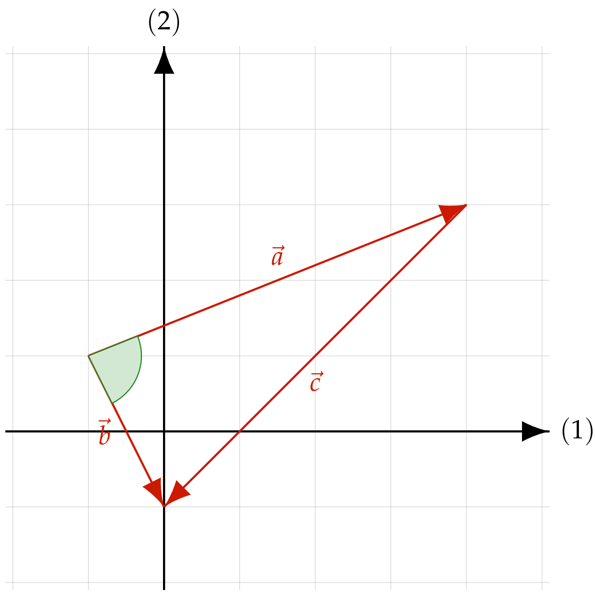
Øvelse 92 Bestem de tre vinkler i figuren.



Øvelse 93 Bestem de seks indre vinkler i figuren.



I nogle tilfælde kendes kun længden af vektorerne. Når sådanne problemstillinger kommer, kan ovenstående formel ikke bruges. Det er nødvendigt med en formel der kun gør brug af længderne af vektorerne. Se på følgende problemstilling. Tre vektorer udgør siderne i en trekant ABC.



Bemærk at

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Ved at kvadrere begge sider fås at

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{c}^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}^2$$

Fra den tidligere sætning haves at $|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{a} \cdot \vec{b}$, dette indsættes i ligningen.

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos v = \vec{c}^2$$

Bemærk at $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Dette kan formuleres i følgende sætning.

Sætning 23 — Cosinusrelationerne. I trekanten ABC hvor a, b og c er længden af de tre sider og A, B og C er de tre vinkler i trekanten, gælder følgende

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

■ **Eksempel 67** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 5$, $|BC| = 7$ og $|AC| = 9$, bestem vinklen mellem siderne AB og BC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos v = 9^2$$

Ved at løse denne ligning fås vinklen til $95{,}7^\circ$. ■

■ **Eksempel 68** I en trekant ABC har siderne følgende længder $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ og vinklen mellem dem er 40°, bestem længden af siden AC i trekanten.

Ved at bruge formlen ovenfor fås at

$$6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot \cos 40^\circ = |AC|^2$$

Ved at udregne dette fås $|AC|$ til 3,9. ■

I maple kan denne type problemstillinger løses med kommandoen trekantsolve

Maple

```
with(Gym):
trekantsolve(c = 6, a = 4, B = 40, "ABC")
```

$$\{A = 41.21140419, C = 98.78859577, b = 3.902546187\}$$

For at løse problemstillinger hvor to vinkler og én side er kendt som dette

Opgaver hvor vinkler i trekant hvor tre sider er kendt skal bestemmes.

Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant hvor to sider og en mellemliggende vinkel er kendt.

Maple

```
with(Gym):
trekantsolve(c = 7, A = 25, B = 40, "ABC");
```

$$\{C = 115.0000000, a = 3.264153603, b = 4.964663589\}$$

bruger Maple følgende sætning.

Sætning 24 For to vektorer $\vec{a} = \langle a_x, a_y \rangle$ og $\vec{b} = \langle b_x, b_y \rangle$ gælder at

$$\frac{det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

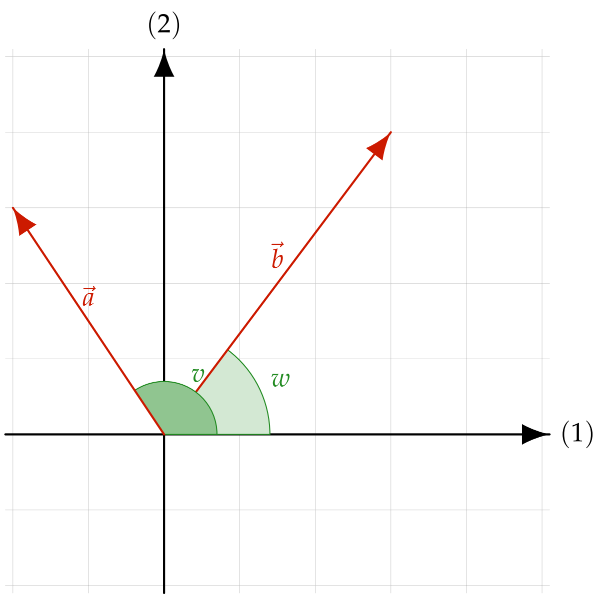
hvor v er vinklen mellem de to vektorer.

■ **Bevis** I følge definitionen af determinanten er

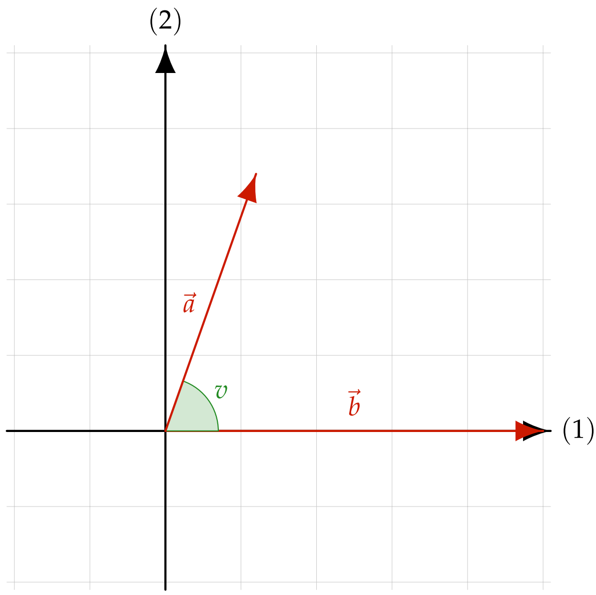
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Ved at anvende vinkeldefinitionen $\vec{a} = \langle |a_x| \cdot \cos v, |a_y| \cdot \sin v$ på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ fås

$$det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin w + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos w$$



Koordinatsystemet kan drejes så den ene vektor ligger parallelt med 1. aksen.



$$det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \cos v \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0 + |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0$$

Da $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 1$, hvilket kan indses ved at se på definitionen af sinus og cosinus på enhedscirklen.

$$det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \sin v \cdot |\vec{b}|$$

Ombytning af to faktorer

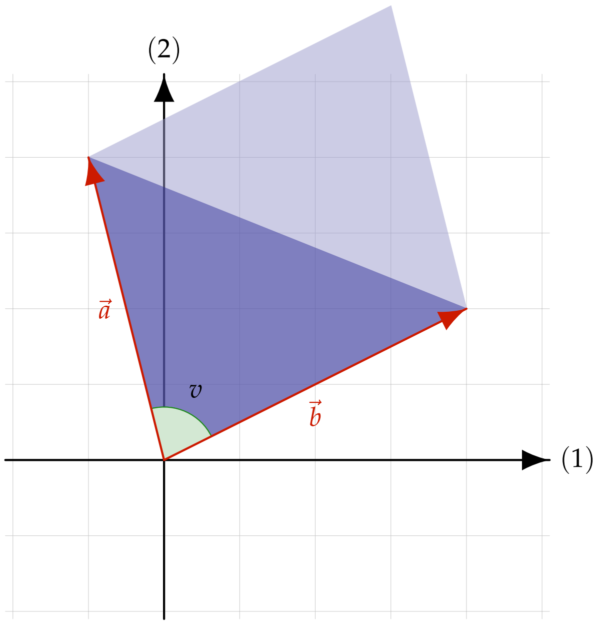
$$det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$$

Afslutningsvis divideres med $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, hvorefter det ønskede opnås.

$$\frac{det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sin v$$

■

To vektorer vil 'udspænde' et areal, som enten kan være en trekant eller et parallelogram. Arealet af parallelogrammet er dobbelt så stort som arealet af trekanten.

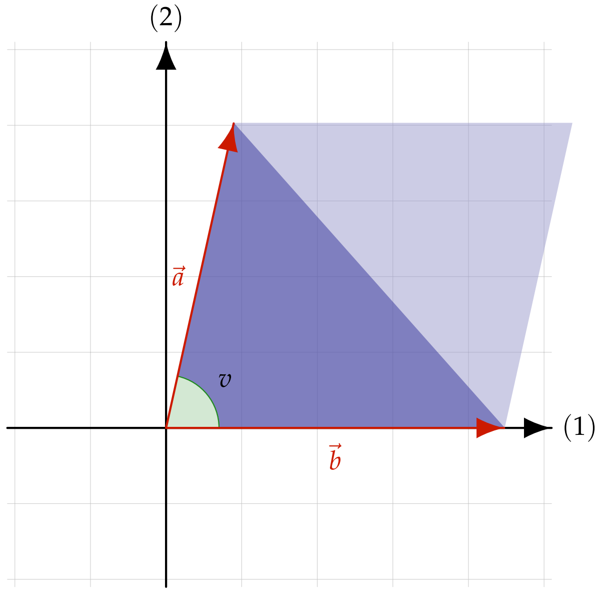


Sætning 25 For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder at

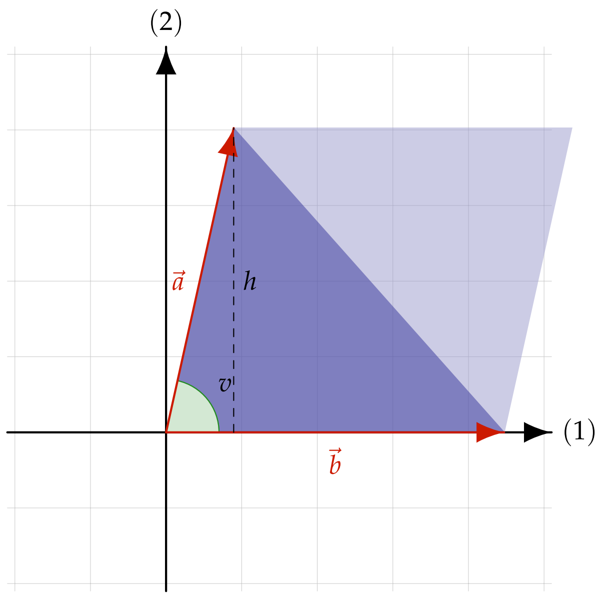
$$P_{\text{Areal}} = |\det(\vec{a},\vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Hvor P_{Areal} er arealet af det parallelogram de to vektorer udspænder.

■ **Bevis** Som det tidligere er set drejes koordinatsystemet således, at en af vektorerne er parallel med 1. aksen.



Derefter bestemmes højden i parallelogrammet.



Arealet af parallelogrammet er højden gange længden grundlinjen. Højden er y-komponenten af $\vec{a}$ der er $|\vec{a}| \cdot \sin v$ og længden grundlinjen er $|\vec{b}|$. Derfor bliver arealet af parallelogrammet

$$P_{\text{Areal}} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$$

■

Denne sætning kan blandt andet bruges til at regne følgende problemstilling.

■ **Eksempel 69 — To sider og et areal.** En stumpvinklet trekant har to sider med længderne 4 og 9, og arealet af trekanten er 15.

Bestem vinklen mellem de to sider?

Tallene fra opgaven sætte ind i formlen $P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin v$.

$$15 = 1/2 \cdot 4 \cdot 9 \sin v$$

Dette giver en vinkel på $56{,}44^\circ$, men da trekanten er stumpvinklet er vinklen $180 - v$. Så vinklen er $123{,}56^\circ$. ■

I Maple vil ligninger kunne løses med følgende kommandoer

Maple

```
with(Gym):
solve(15 = 9*(1/2*4)*Sin(v))
```

56.44269024

```
180-56.44269024
```

123.5573098

Denne sætning 25 kan bruges til at vise følgende

Sætning 26 — Sinusrelationerne. For en trekant ABC gælder der, at

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

■ **Bevis** Fra ovenstående sætning haves, at arealet af en trekant kan udregnes som produktet af produktet af to sidelængder og sinus til deres mellemliggende vinkel delt med 2. Dette kan fordi der er tre hjørner beregnes på tre måder, der alle er lig hinanden - fordi

Opgaver hvor areal af parallellogram skal bestemmes

Opgaver hvor arealet udspændt af to vektorer er kendt og en parameter t skal bestemmes.

Video hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.

Opgaver hvor en vinkel skal bestemmes når to sider og et areal er kendt.

det er arealet af den samme trekant, der beregnes.

$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin C = 1/2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin B = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin A$

Ligningerne kan reduceres ved at dele med en halv gange produktet af alle tre sidelængder.

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin C}{1/2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{1/2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin B}{1/2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin A}{1/2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$$

Efter reduceringen fås udtrykket

$$P_{\text{Areal af trekant}} = \frac{\sin C}{|\vec{c}|} = \frac{\sin B}{|\vec{b}|} = \frac{\sin A}{|\vec{a}|}$$

■

Denne sætning giver mulighed for at beregne problemstillinger hvor to eller tre vinkler er kendt.

Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant hvor to sider og en ikke mellemliggende vinkler er kendt.

■ **Eksempel 70 — To vinkler og en side.** En trekant har en side AB med længden 28 og to tilstødende vinkler på $A = 50°$ og $B = 60°$.

Bestem længden af siden BC.

Først bestemmes den modstående vinkle til siden AB, det er vinkel C.

$$\angle C = 180° - 50° - 60° = 70°$$

Nu kan længden af $BC = a$ bestemmes med formlen $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a}$.

$$\frac{\sin 70°}{28} = \frac{\sin 50°}{a}$$

Det giver en sidelængde af BC på 22,8. ■

Opgaver hvor sider og vinkler skal bestemmes i en trekant hvor én side og to vinkler er kendt.

■ **Eksempel 71 — Tre vinkler og arealet.** I en trekant er de tre vinkler $A = 50°$, $B = 100°$ og $C = 30°$. Arealet af trekanten er 25.

Bestem længden af de tre sider.

Tallene sættes ind i de tre ligninger

$P_{\text{Areal af trekant}} = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin C = 1/2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin B = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin A$

Det giver

$25 = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin 30° = 1/2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin 100° = 1/2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin 50°$

Løsningen til dette ligningssystem er $a = 8{,}8$, $b = 11{,}3$ og $c = 5{,}8$.
■

I maple kan dette ligningsystem løses med kommandoen solve. Bemærk at der også er en løsning hvor a, b og c er negative, men dette giver ikke mening geometrisk og derfor ses bort fra denne løsning.

Maple

```
with(Gym):
solve([25 = (1/2)*a*b*Sin(30), 25 = (1/2)*a*c*Sin(100),
25 = (1/2)*b*c*Sin(50)])
```

$$\{a = 8.819648028, b = 11.33832095, c = 5.756616412\},$$

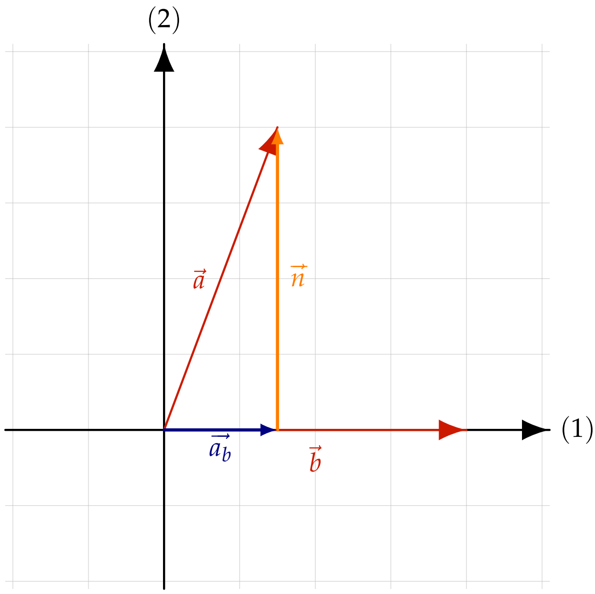
$$\{a = -8.819648028, b = -11.33832095, c = -5.756616412\}$$

Sætning 27 Vektor $\vec{a}$ projekteret på vektor $\vec{b}$ giver projektionsvektoren $\vec{a_b}$, som er givet ved formlen

$$\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

■ **Bevis** Først bemærkes at $\vec{a_b} = k \cdot \vec{b}$. Som tidligere anbringes den ene vektor for syns skyld parallelt med 1. aksen.

Video med bevis for formlen for projektion af en vektor på en anden vektor.



Af tegningen ses det, at

$$\vec{a} = \vec{a_b} + \vec{n}$$

Ved at gange med $\vec{b}$ fås, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a_b} \cdot \vec{b} + \vec{n} \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{b}$ og $\vec{n}$ er ortogonale, er deres skalarprodukt 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a_b} \cdot \vec{b}$$

Da $\vec{a_b} = k \cdot \vec{b}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot |\vec{b}|^2$$

Herefter divideres med $|\vec{b}|^2$.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = k$$

Deraf følger at

$$\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

∎

■ **Eksempel 72** To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Tallene indsættes i formlen $\vec{a_b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a_b} = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot (-3)}{4^2 + (-3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{20 - 3}{16 + 9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{17}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det giver en projektionsvektor $\vec{a_b} = \langle 2.72, -2.04 \rangle$. ■

I Maple kan problemstillingen løses med kommandoen proj.

Maple : Projektionsvektor.

```
with(Gym):
proj(<5,1>,<4, -3.>)
```

$$\begin{pmatrix} 2.72 \\ -2.04 \end{pmatrix}$$

Øvelse 94 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Beregn længden af $\vec{a}$.

b) Beregn længden af $\vec{b}$.

c) Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

d) Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

e) Beregn længden af projektionen af vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

f) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Øvelse 95 To vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Beregn længden af $\vec{b}$ når $t = 4$.

b) Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når $t = 3$.

c) Beregn værdien af t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

d) Beregn arealet af det parallelogram som $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder når $t = 2$

e) Beregn værdien af t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lige lange.

f) Beregn værdierne af t, så $\vec{a}$ er tre gang så lang som $\vec{b}$.

g) Bestem værdien af t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

h) Beregn værdien af t, så arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 42.

Har du brug får hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.

https://www.youtube.com/dennispipenbring

På min hjemmeside

http://matx.dk

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.