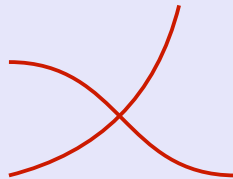


Dennis Pipenbring

Matematik B til A-niveau

- stx 2017



matX
2020

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispipenbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

Matematik B til A-niveau - stx 2017

Bogen er skrevet i tekstbehandlingsprogrammet $\text{\LaTeX}$ og figurerne er lavet i TikZ. Der er billeder som er genereret i GeoGebra og i Maple.

© Dennis Pipenbring, matX ApS 2020

1. udgave

Udgivet af matX ApS

ISBN 978-87-93632-04-2

Forord

Denne bog er skrevet til stx A niveau efter 2017 bekendtgørelsen. Det er skrevet udelukkende til den mundtlige eksamen efter omtalte bekendtgørelse.

Kommentarer, rettelser og forslag til forbedringer eller nye videoer og/eller opgaver sendes til dp@matx.dk.

Indledning

Løsning af ligninger giver tal og løsning af differentiallyigninger giver funktioner. Nye tal frembringes som løsning på ligninger opstillet med kendte tal som koefficienter.

Ligningen

$$2x = 1$$

har løsningen $\frac{1}{2}$, og herved har de naturlige tal 2 og 1 givet et rationelt tal. Ligningen

$$x = 3 + 2x$$

har løsningen -3 , og har de naturlige tal 2 og 3 givet et helt tal (negativt tal). Ligningen

$$x^2 = 2$$

har løsningerne $\pm\sqrt{2}$ og herved har det naturlige tal 2 givet et irrationelt tal $\sqrt{2}$. Ligningen

$$x^2 = -1$$

har løsningen I , og herved har det hele tal -1 givet et komplekst tal I . Der findes også transcendent tal. Det er tal som ikke er løsning til en ligning med rationelle koefficienter. Der kendes ikke mange af disse tal. To af tallene skal vi se på lidt senere. Det er π og e .

Historisk har ligninger skulle give mening i en geometrisk sammenhæng. Dette betyder, at x har været en længde, og derfor altid været positiv og x^2 har været et areal, og derfor også skulle være positivt. Ved at opgive denne mening, har matematikken fået flere muligheder, men det har været på bekostning af, at den er blevet abstrakt og ikke konkret. Brøker, negative tal og komplekse tal giver stadig problemer for mange mennesker, og det er sådan set ikke mærkeligt, fordi de er abstrakte. Det er vanskeligt at gøre sig familiær med disse abstrakte størrelser, med ved at se deres anvendelse i forskellige matematiske situationer fås en

fornemmelse for deres natur. Et andet element, der besværliggør tilegnelsen af matematik er notationen og symboler. Matematik har sin egen semantik. En semantik som i øvrigt er forskellig fra kultur til kultur. Fordelen ved semantikken, er at det bliver muligt at sætte 'ord' på de abstrakte begreber som ellers er meget besværlige at forklare. Et tredje element er en uigennemsigtig blanding af grundlæggende antagelser og påstande.

$$-1 \cdot (-1) = 1$$

er en påstand, der ofte forveksles med en grundlæggende antagelse. En fjerde problemstilling er, at matematisk viden er opbygget over en meget lang periode og det forventes, at man som studerende indenfor matematik sætter sig ind i meget store dele af denne viden. Det tog ca. samme tid at opfinde bilen som differentialregningen, og selvom mange kan køre bil, så er det de færreste som forstår hvordan den virker ud over på et operationelt plan. Men differentialregningen forventes man som studerende at forstå.

Differentialligninger er matematiske modeller af virkeligheden. Den mest simple differentialligning er

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

(5 er et arbitrært tal). Ligningen betyder at ændringen i variabelen y i forhold til ændringen i variabelen x er 5. Det kommer fra engelsk, hvor d er en forkortelse af differential. Løsningen er funktionen

$$f(x) = 5x + C$$

hvor $f(x) = y$ og C er en konstant, der kan bestemmes hvis en initial/begyndelses værdi kendes, hvis $f(2) = 11$ så er $C = 1$ og funktionen er

$$f(x) = 5x + 1$$

I denne bog skal vi se på, teknikken i hvordan ligninger og differentialligninger løses. Hvordan ligninger og differentialligninger opstilles, og hvad deres koblingen til virkeligheden er.



Hvad er en differentialligning?

0.1 Spørg aldrig «Hvorfor?»

Spørgsmålen om hvorfor en ligning divideres med 2, er et dårligt spørgsmål. Der er ingen mening, andet den end at løse ligningen.

Hvorfor opgaven løses, er ikke indenfor matematikkens område at besvare. Ikke nok med at matematik er et abstrakt sprog, med sin egen semantik og uklarhed om de grundliggende antagelse, som er opbygget over flere tusinde år. Det er også meningsløst i sig selv. Meningen ligger altid udenfor matematikken fx at forstå årsagerne til og kunne forudsige klimaforandringer. Eller at kunne bestemme sammenhængen mellem pensionsopsparing, pensionsalder og levetid. Det har mening, men matematikken som bruges til at forstå og forudsige disse sammenhænge har ingen mening.

0.2 Spørg altid «Hvordan?»

I matematik er «hvordan» ultimativt vigtigt at forstå. Det er her algoritmer, modeller, simuleringer og sætninger bringes i spil på en meget præcis og detaljeret måde. Når det ikke er muligt at se «Hvorfor?», kan det virke demotiverende for at lære «Hvordan?». Derfor kan det nogle gange hjælpe at spørge: «I hvilken sammenhæng, er dette udviklet?» Dette kan dog virke bagvendt og det er også snørklet. Det veksler hele tiden mellem virkeligheden og matematik. Fx

Hvor stor er Jorden? → Jorden skal måles → sammenhæng mellem vinkel og længde → sinus og cosinus → sinus og cosinus med stor præcision → rækkeudvikling.

Dette er også løste problemstillinger, hvilket kan få hele projektet til at virke meningsløst. Mange teknikker er programmerede og tilgængelige med blot en operationel forståelse. Dette gælder fx $\sqrt{\quad}$ og differentialregning. Nogle gange bliver problemstillingen også løst på en helt anden måde med teknikker idag end dengang problemstillingen blev løst første gang. Funktionsundersøgelse havde til formål at muliggøre tegningen af grafen for funktion. Funktionsundersøgelsen involverede differentialregning (monotoniundersøgelse), polynomiumsdivision og nulpunktsbestemmelse. Alle disse teknikker er overflødige fordi idag kan grafen for en funktion tegnes meget enkelt med en computer. Dette øger også meningsløsheden. For at undgå al denne meningsløshed er bogen her opbygget med en gennemgående tråd, der har til formål at anskueliggøre vekslingen mellem problemer og løsning. Dette betyder også at den ikke som klassiske bøger er emneopdelt.

Indhold

Forord	3
Indledning	5
0.1 Spørg aldrig «Hvorfor?»	6
0.2 Spørg altid «Hvordan?»	7
1 Renters rente	11
2 Den numeriske løsning - differensligning	15
3 Når den numeriske løsning er den eneste	17
4 Normalt	23
5 Betydningen af middelværdi og spredning	27
6 Konfidensinterval	31
7 Regression	35
8 Binomialfordelingen	41
9 Produktfunktionen	47
10 Middelværdi- og monotonisætningen	51
11 Funktioner af to variable - gradient stationære punkter	55
12 Funktioner af to variable - tangentplan	63
13 Integralregning - $F'(x) = f(x)$	69
14 Integralregning - Integration ved substitution	73
15 Integralregning - Kurvelængde	75

16 Vektorfunktioner - Hastighedsvektor og stedvektor	79
17 Vektorfunktioner - Cirkel	83
18 Mundtlig eksamen	87
18.1 Spørgsmål	88

1

Renters rente

Penge kan hvis de investeres forrentes, det betyder, at du får flere penge tilbage end du investerede. Det ekstra du får kaldes udbytte eller renter. Har du mange penge, kan du få mange flere. Ændringen i din pengemængde dp over tid dt er proportional med pengemængden p . Situation kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot p$$

Altså jo flere penge du har jo flere penge vil du få, hvis k er større end nul.

Sætning 1 Differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot p$$

har løsningen

$$p(t) = C \cdot e^{kt}$$

Dette kan fortolkes som

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

hvor $K_n = p(t)$, $K_0 = C$, $n = t$ og $r = e^k - 1$.

Bevis

For at løse denne differentialligning skal vi se på noget teknik. Teknikken kaldes separation af variable.

Dette betyder at den ene variabel t skal være på fx højre side og den anden variabel p skal være på venstre side. Om lidt skal vi se på gyldigheden af denne teknik.

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot p \Rightarrow \int \frac{1}{p} dp = k \int dt$$



Løsning af ligningen $\frac{dp}{dt} = k \cdot p$

Med integrations teknik kan integralerne udregnes.

$$\int \frac{1}{p} dp = k \int dt \Rightarrow \ln(p) = kt + C_1$$

Med logaritmeregneregler kan p isoleres.

$$\ln(p) = kt + C_1 \Rightarrow p = e^{kt+C_1}$$

Med potensregneregler kan højreside reduceres.

$$p = e^{kt+C_1} \Rightarrow p = C_2 \cdot e^{kt}$$

Nu er differentialligningen løst, men resultatet er ikke fortolket. Ligningen kan omskrives til.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Her er $p = K_n$ pengemængden til tiden $t = n$, $K_0 = C_2$ er pengemængden til tiden $t = 0$, $e^k = (1 + r) \Rightarrow r = e^k - 1$ hvor r kaldes renten. Det betyder, at hvis k er mindre end nul, så er renten negativ. Dette kaldes en fortolkning. Her bliver de abstrakte symboler oversat til hverdagsprog. Det er først nu der er mening med de matematiske udregninger.



I afsnittet blev anvendt en teknik som blev kaldt 'separation af variable' til løsning af differentialligningen. Dette teknik består generelt i følgende

Sætning 2

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

hvor $f(x) = y$ og $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ er løsningen til denne differentialligning. Hvis $h(y) \neq 0$ kan ligningen omskrives til

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

Bevis

Denne omskrivning har følgende mellemregninger, hvor $G(x)$ er stamfunktion til $g(x)$ og H er stamfunktion til $\frac{1}{h(y)}$.



Gennemgang af beviset for separation af variable

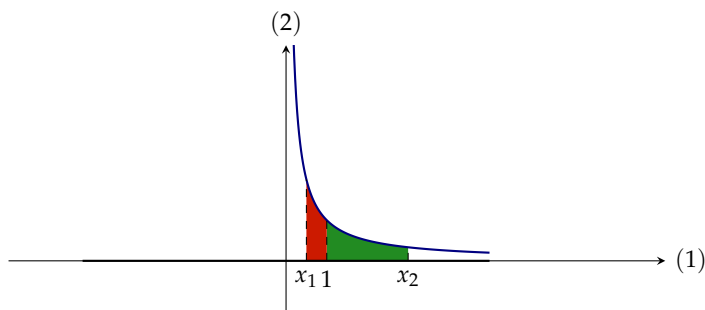
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= g(x) \cdot h(y) \\
f'(x) &= g(x) \cdot h(f(x)) \\
\frac{1}{h(f(x))} \cdot f'(x) &= g(x) \\
H'(f(x)) \cdot f'(x) &= G'(x) \\
H(f(x))' &= G'(x) \\
H(f(x))' - G'(x) &= 0 \\
(H(f(x)) - G(x))' &= 0 \\
H(f(x)) - G(x) &= k \\
H(f(x)) &= G(x) + k \\
H(y) &= G(x) + k \\
\int \frac{1}{h(y)} dy &= \int g(x) dx
\end{aligned}$$

■

I beviset er også en anden definition til beregning af $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$. Dette følger af definitionen af $\ln(x)$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

Arealet af det røde område er $-\ln(x_1)$ og arealet af det grønne område er $\ln(x_2)$.



Definition af den naturlige logaritme

Dette viser hvordan løsning af en differentialligning, giver en ny funktion, som i dette tilfælde var $\ln(x)$.

2

Den numeriske løsning - differensligning

I praksis tilskrives renter med periodiske mellemrum og ikke kontinuert. Dette svarer til at løse differentialligningen numerisk. Som eksempel på dette ses på den mest simple udgave af ligningen.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Som eksempel kan vi sige at pengene tilskrives renter 4 gange over en periode på 2 år. Dette betyder at der skal tilskrives renter hvert halve år $\Delta x = 0.5$ og pengemængden til tiden $t = 0$ er 100. Udregningen vil se således ud

$$\begin{aligned}t_n &= n \cdot \Delta x \\ y_{n+1} &= y_n + y_n \cdot \Delta x\end{aligned}$$

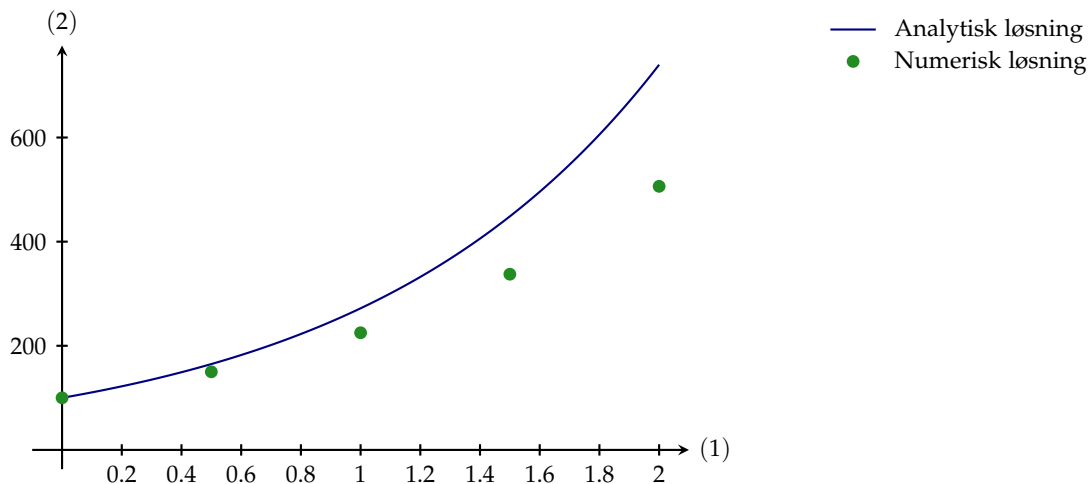
Lad $y_0 = 100$ og lad $\Delta x = 0.5$.

$$\begin{aligned}y_0 &= 100 \\ t_0 &= 0 \cdot 0.5 = 0 \\ y_1 &= 100 + 100 \cdot 0.5 = 150 \\ t_1 &= 1 \cdot 0.5 = 0.5 \\ y_2 &= 150 + 150 \cdot 0.5 = 225 \\ t_2 &= 2 \cdot 0.5 = 1 \\ y_3 &= 225 + 225 \cdot 0.5 = 337.5 \\ t_3 &= 3 \cdot 0.5 = 1.5 \\ y_4 &= 337.5 + 337.5 \cdot 0.5 = 506.25 \\ t_4 &= 4 \cdot 0.5 = 2\end{aligned}$$



Numerisk løsning af en differentialligning

Fra udregningen ovenfor ved vi, at renten er $r = e^1 - 1$ som i dette tilfælde er $e^1 - 1 \approx 1.72$. De to løsninger til ligningen kan bedst sammenlignes grafisk.



Problemet med den numeriske metode er, at den afviger mere og mere fra den analytiske metode. Jo mindre skridt Δx der tages jo mere præcis bliver den numeriske metode.

3

Når den numeriske løsning er den eneste

SIR-modellen er en lagermodel, hvor lageret er antallet af smittede (Infectious) personer. Der er de modtagelige (Susceptible), der kan smittes. Der er dem som er immune (Recovered). Det er en dejlig simpel model, som let kan udvides. Fx kan sandsynligheden for at blive smittet og blive rast være afhængige af tiden, i den simple model er de konstante. Der skal også indføres flere grupper fx døde eller vaccinerede, hvis man vil behandle emnet flokimmunitet. Summen af personer er også konstant, hvilket betyder at der ikke sker nogle fødsler, invandring eller udvandring. Dette kunne passende være et emne, der kunne behandles matematisk.

Hver af de tre grupper har deres egen differentialligning, men differentialligningerne er afhængige af hinanden. Derfor kaldes de et system af koblede differentialligninger.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \cdot S \cdot I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \cdot S \cdot I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= -\gamma \cdot I\end{aligned}$$

Bemærk at

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Dette system af koblede differentialligninger kan ikke løses analytisk, er den eneste vej frem en numerisk løsning. Derfor omskrives differentialligningerne til en numeriske beregning.



Opstilling af SIR-model

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + (-\beta \cdot S_n \cdot I_n) \cdot \Delta t \\
I_{n+1} &= I_n + (\beta \cdot S_n \cdot I_n - \gamma \cdot I_n) \cdot \Delta t \\
R_{n+1} &= R_n + (\gamma \cdot I_n) \cdot \Delta t \\
t_n &= n \cdot \Delta t
\end{aligned}$$

β er smitteraten. $S_n \cdot I_n$ er antallet af muligt møder mellem modtagelige og smittede personer. β er derfor en sammensætning af sandsynligheden for at en modtagelig og en smittet mødes og sandsynligheden for at blive smittet ved et møde. Matematisk er der ingen grund til at adskille disse sandsynligheder. Bemærk at

$$S_n + I_n + R_n = S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1}$$

γ er sandsynligheden for at blive immun/rask. $\frac{1}{\gamma}$ er tiden som man er smittet.

I følgende eksempel er $\Delta x = 1$, $S_0 = 50$, $I_0 = 1$. Herefter vil følgende kunne beregnes.

n	t	S	I	R
0	0.0	50.0	1.0	0.0
1	1.0	49.50	1.40	0.1
2	2.0	48.807000	1.953000	0.240
3	3.0	47.85379929	2.710900710	0.4353000
4	4.0	46.55653030	3.737079624	0.7063900710
5	5.0	44.81667569	5.103226269	1.080098033
6	6.0	42.52957932	6.880000009	1.590420660
7	7.0	39.60354426	9.118035069	2.278420661
8	8.0	35.99247921	11.81729662	3.190224168
9	9.0	31.73914118	14.88890499	4.371953830
10	10.0	27.01353060	18.12562507	5.860844329

I følgende eksempel er $\Delta x = 0.5$, $S_0 = 50$, $I_0 = 1$. Herefter vil følgende kunne beregnes.



Eulers metode i Maple



Eulers metode på CoVid-19

n	t	S	I	R
0	0.0	50.0	1.0	0.0
1	0.5	49.75	1.2	0.05
2	1.0	49.4515	1.438500000	0.11
3	1.5	49.09582009	1.722254914	0.181925
4	2.0	48.67304250	2.058919755	0.2680377457
5	2.5	48.17197306	2.457043211	0.3709837335
6	3.0	47.58016996	2.925994147	0.4938358941
7	3.5	46.88407347	3.475790934	0.6401356015
8	4.0	46.06927728	4.116797575	0.8139251482
9	4.5	45.12098784	4.859247141	1.019765027
10	5.0	44.02471768	5.712554940	1.262727384
11	5.5	42.76724959	6.684395286	1.548355131
12	6.0	41.33788358	7.779541530	1.882574895
13	6.5	39.72993467	8.998513364	2.271551972
14	7.0	37.94238293	10.33613944	2.721477640
15	7.5	35.98149413	11.78022127	3.238284612
16	8.0	33.86214432	13.31056002	3.827295676
17	8.5	31.60852380	14.89865254	4.492823677
18	9.0	29.25390173	16.50834198	5.237756304
19	9.5	26.83923466	18.09759195	6.063173403
20	10.0	24.41060707	19.62133994	6.968053000

Bemærk at resultatet ændres som følge af de mere detaljerede beregninger. Jo mindre Δx bliver jo mere præcise bliver beregningerne. For at forstå dette ses lidt nærmere på, den grafiske fortolkning af hvad der bliver beregnet.

t	S	t	S	t	S
0	50	0	50	0	50
1	49.50	0.5	49.75	0.25	49.875
		1	49.4515	0.5	49.73784375
				0.75	49.58742952
				1	49.42257251

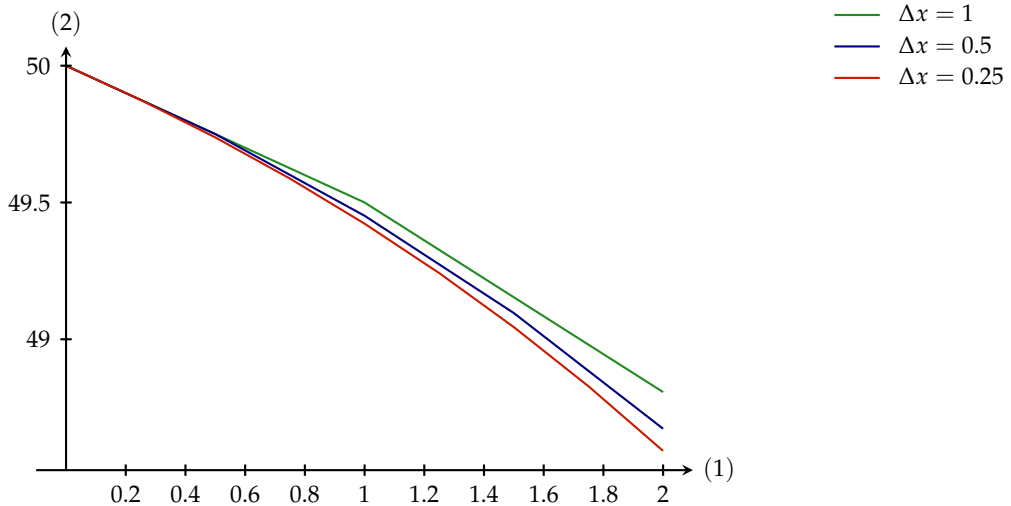
I eksemplet hvor Δx er 1, er hældningen af linjen der starter i $t = 0$ for S .

$$\frac{49.5 - 50}{1 - 0} = -0.5$$

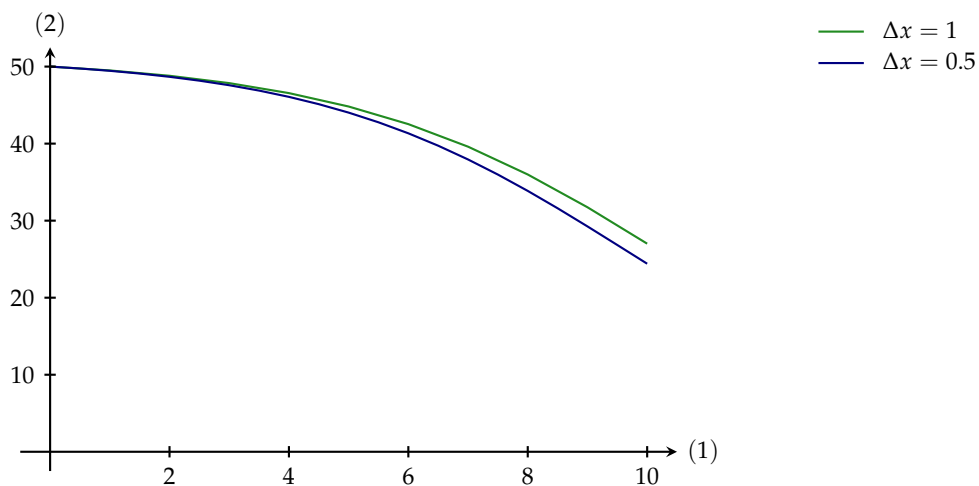
I eksemplet hvor Δx er 0.5, er hældningen af linjen der starter i $t = 0$ for S .

$$\frac{49.75 - 50}{0.5 - 0} = -0.5$$

Som det ses er hældningen ens.



Men efter 0.5 knækker grafen med $\Delta x = 0.5$ og efter 0.25 knækker grafen med $\Delta x = 0.25$.

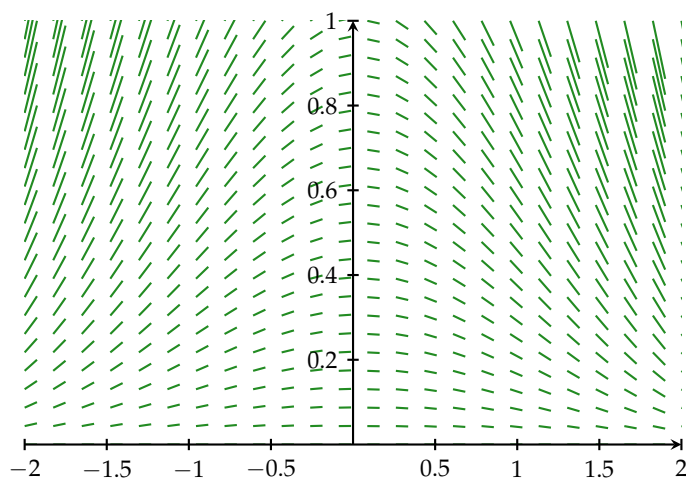


Her ses grafen af S for t i intervallet $[0, 10]$ med $\Delta x = 0.5$ og 1 . Som det ses kommer grafer længere og længere fra hinanden.

4

Normalt

En meget vigtig fordeling i statistik - normalfordelingen - har også sit udspring i en differentialligning. Data er normalfordelt hvis frekvensen y af x falder proportionalt med afstanden mellem x og 0. Fx hvis frekvensen $y(x)$ er stor og x er stor falder frekvens meget. Her ses et plot hvor hver linje viser ændringen i frekvensen, i det pågældende punkt.



Denne type af plot kaldes et linjeelementsplot. Hver linje repræsenterer tangenten til den løsningskurve, der vil gå gennem mindpunktet i linjen.

Frekvensen skal altså opfylde følgende differentialligning.

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$$

hvor $y(x)$ er frekvensen af x . dy/dx er hældningen af linjeelementerne i plottet.

Sætning 3 Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$$

har løsningen

$$y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

med det rette valg af C kan dette fortolkes som tæthedsfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bevis

For at løse denne differentialligningen anvendes igen teknikken om separation af variable.

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int x dx$$

Med integrations teknik kan integralerne udregnes.

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int x dx \Rightarrow \ln(y) = -\frac{x^2}{2} + k$$

Med logaritmeregneregler isoleres y .

$$\ln(y) = -\frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2} + k}$$

Med potensregneregler kan højreside reduceres.

$$y = e^{-\frac{x^2}{2} + k} \Rightarrow y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Hvis $f(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ skal være en tæthedsfunktion / frekvensfunktion, skal det gælde at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Denne betingelse kan bruges til at bestemme værdien af C til $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Funktionen bliver

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Løsning af differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

Ligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

løses ved først at bestemme stamfunktionen til

$$\int C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Her ses en ny funktion erf der kaldes error function / fejl funktionen. Denne funktion er defineret som

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Derefter indsættes grænserne.

$$\frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\infty}{\sqrt{2}}\right) - \frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{-\infty}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

Udtrykket faktorerises og reduceres

$$\frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot (\operatorname{erf}(\infty) - \operatorname{erf}(-\infty)) = 1$$

Nu udnyttes at $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ og $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$.

$$\frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot (1 - (-1)) = 1$$

Udtrykket reduceres.

$$\frac{C \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot 2 = 1$$

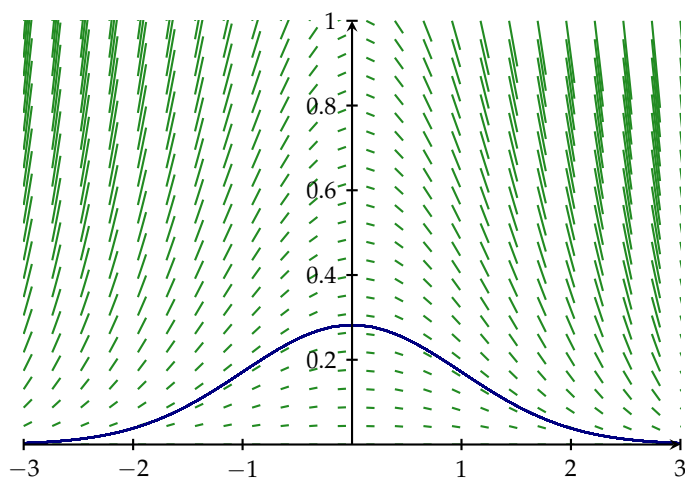
Udtrykket reduceres.

$$C \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

C isoleres.

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

■

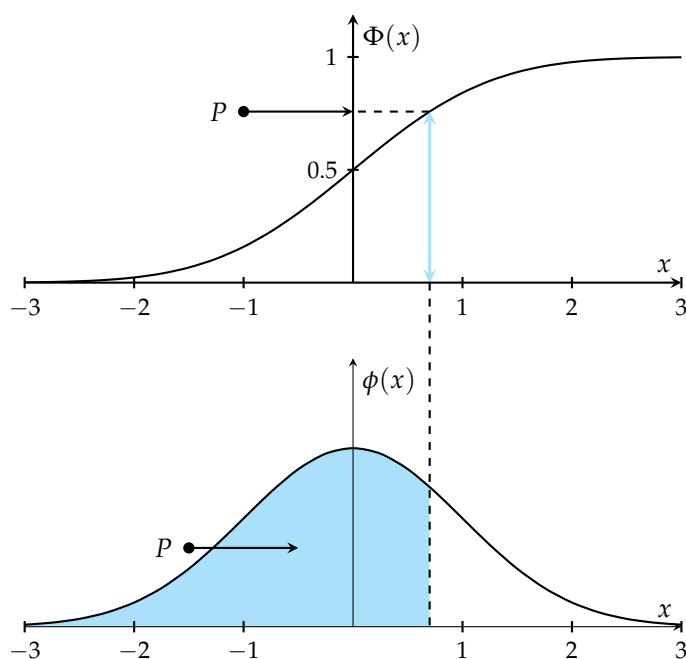


I dette plot ses ud over linjeelementerne også en enkelt løsningskurve, der går gennem punktet $(0, 1/\sqrt{2\pi})$. Denne kurve er specielt idet den er standard normalfordelingen.

5

Betydningen af middelværdi og spredning

Normalfordelingen er den vigtigste fordeling i statistik. Der er to parametre i en normalfordeling. Middelværdien μ og spredningen σ . Normalfordelingen noteres $N(\mu, \sigma)$.



En standard normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(0, 1)$ har tæthedsfunktionen

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

og fordelingsfunktionen

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Sætning 4 En normalfordelt stokastisk variabel Z med middelværdi $\mu \in]-\infty, \infty[$ og spredning $\sigma \in]0, \infty[$ kan beskrives som

$$Z = \sigma X + \mu$$

hvor $X \sim N(0, 1)$.

Bevis

Først bevises at Z har middelværdi μ . $Z = \sigma X + \mu$, det betyder at

$$E(Z) = E(\sigma X + \mu) = E(\sigma) \cdot E(X) + E(\mu) = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu$$

Her har jeg brugt regneregler for middelværdien.

Derefter bevises at Z har spredning σ der er det samme som, at $Var(Z) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned} Var(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= E((\sigma X + \mu)^2) - \mu^2 \\ &= E(\sigma^2 X^2 + \mu^2 + 2\sigma\mu X) - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \cdot E(X^2) + \mu^2 + 2\sigma\mu E(X) - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \cdot E(X^2) + 2\sigma\mu \cdot 0 \\ &= \sigma^2 \cdot E(X^2) \\ &= \sigma^2 \cdot (Var(X) + E(X)^2) \\ &= \sigma^2 \cdot (1 + 0^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$



Regneregler for middelværdi

Sætning 5 $Z \sim N(\mu, \sigma)$ har tæthedsfunktionen

$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

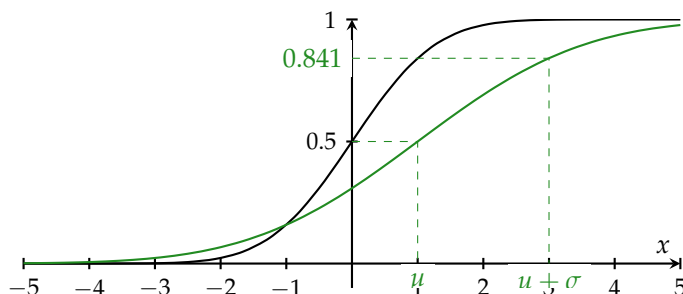
og fordelingsfunktionen

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

Forskellen på Z og X ses bedst på grafen for fordelingsfunktionen. Middelværdien kan aflæses ved $\Phi(\mu) = 0.5$ og spredningen

kan aflæses ved $\Phi(\mu + \sigma) = 0.841$. Det skyldes at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0.841$$



Bevis

Det udnyttes at $Z = \sigma X + \mu$, til at vise at $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

$$F(x) = P(Z \leq x) = P(\sigma X + \mu \leq x) = P(\sigma X \leq x - \mu) = P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Nu vises at $\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2} dv$. Definitionen af $\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ er

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Ved at udnytte at $v = \sigma t + \mu$ og derfor er $\frac{dv}{dt} = \sigma$ og ved isolering af dt fås, at

$$dt = \frac{1}{\sigma} dv$$

Dette indsættes ind i integralet.

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{1}{\sigma} dv$$

Da σ er en konstant, er den uafhængig af integrationen.

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dv$$



Fordelingsfunktionen for normalfordelingen

Da $v = \sigma t + \mu$ kan t isoleres.

$$v = \sigma t + \mu \Leftrightarrow v - \mu = \sigma t \Leftrightarrow \frac{v - \mu}{\sigma} = t$$

Dette indsættes ind i integralet.

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

Til sidst skal også grænserne omregnes. Den nedre grænse $t = -\infty$ og da σ positiv vil også $v = \sigma t + \mu = -\infty$. Den øvre grænse er $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$. Dette indsættes i $v = \sigma t + \mu$, for at beregne den tilsvarende v -værdi.

$$v = \sigma \frac{x - \mu}{\sigma} + \mu = x - \mu + \mu = x$$

Dette indsættes i integralet.

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

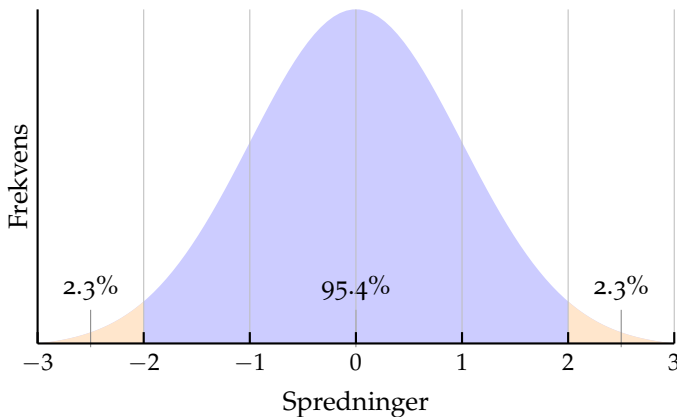
Tæthedsfunktionen f fås ved differentiation af F .



6

Konfidensinterval

Normalfordelingen har, som alle fordelinger, et konfidensinterval. Et konfidensinterval deler en fordeling i tre dele. På figuren ses normalfordelingen inddelt i tre intervaller. Det midterste interval $[-2\sigma, 2\sigma]$ kaldes 95%-konfidensintervallet. I nogle bøger vil dette interval angives til $[-1.96\sigma, 1.96\sigma]$, fordi det mere præcist giver 95%. De to orange områder udgør ca. 5% af det samlede areal mellem kurven og førsteaksen. Det blå område udgør ca. 95% af det samlede areal mellem kurven og førsteaksen, det er derfor det kaldes for 95%-konfidensintervallet.



Det ovenstående kan formuleres i følgende sætning.

Sætning 6 Lad X være normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ , da vil

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

Bevis

Først anvendes formelen $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$,
den giver at

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right)$$

I tællerne er $\mu - \mu = 0$

$$\Phi\left(\frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-2\sigma}{\sigma}\right)$$

Brøkerne kan forkortes med σ

$$\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-2\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

Formlen for fordelingsfunktionen $\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \phi(x) dx$ anvendes
og det giver, at

$$\Phi(2) - \Phi(-2) = \int_{-\infty}^2 \phi(x) dx - \int_{-\infty}^{-2} \phi(x) dx$$

Indskudssætningen for integraler giver, at

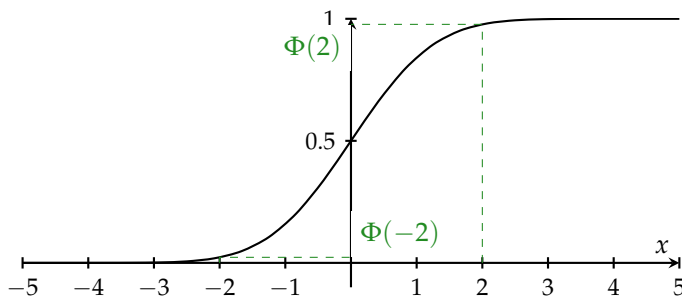
$$\int_{-\infty}^2 \phi(x) dx - \int_{-\infty}^{-2} \phi(x) dx = \int_{-2}^2 \phi(x) dx$$

Funktionen for $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ indsættes

$$\int_{-2}^2 \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Udregning i Maple giver at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9544997360$$



Normale udfald i normalfordelingen



Et konfidensinterval bruges til at afgøre om et givent udfald er sandsynligt. Hvis udfaldet ligger i konfidensintervallet, har vi tillid (konfidens) til at udfaldet.

7

Regression

I de tilfælde hvor det ikke kun er en men to kontinuerte variable, hvor sammenhængen skal undersøges, er det muligt at lave regression. Ved en lineær regression undersøges om en variabel Y afhænger af en variabel X . For at undersøge sammenhængen, bestemmes først en model for denne sammenhæng. Modellen vil have formen $y = ax + b$, hvor a og b skal bestemmes med de datapar (x_i, y_i) der er indsamlet for at undersøge denne sammenhæng.

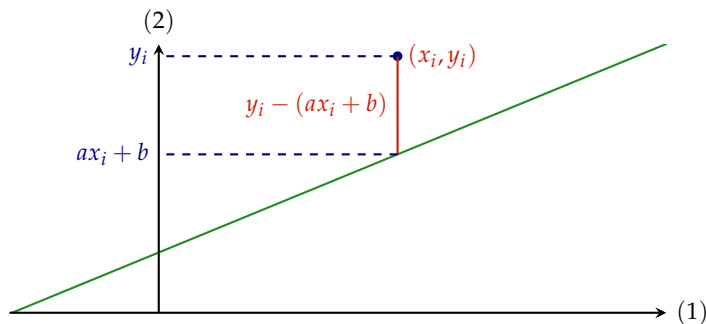
Sætning 7 Ved lineær regression til punkterne (x_i, y_i) , med mindste kvadraters metode, kan a og b i forskriften $y = ax + b$ bestemmes med

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y} x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x} x_i)} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

Bevis

Summen af kvadratet på residualerne $r_i = y_i - (ax_i + b)$ skal være mindst mulig

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$



For at bestemme de værdier a og b hvor $S(a, b)$ er mindst muligt differentieres S både med hensyn til a og b .

$$0 = \frac{dS(a, b)}{da} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b)$$

$$0 = \frac{dS(a, b)}{db} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

Først benyttes $0 = -2 \sum (y_i - ax_i - b)$ til at bestemme b .

$$0 = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

Ligningen divideres med -2 .

$$0 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

Summen udregnes af tre led hver for sig.

$$0 = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b$$

Anden led faktorerises og tredje led omskrives fra summen af n b 'er til $n \cdot b$.

$$0 = \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot b$$

$n \cdot b$ trækkes fra.

$$n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i$$

Ligningen divideres med n .

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Gennemsnittet af y_i -værdierne er $\bar{y}_i$ og gennemsnittet af x_i -værdierne er $\bar{x}_i$.

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Nu kendes sammenhængen mellem punkterne (x_i, y_i) og b . Denne sammenhæng kan benyttes til at bestemme sammenhængen mellem punkterne (x_i, y_i) og a . Ligningen $\frac{dS(a, b)}{da} = 0$ benyttes.

$$0 = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b)$$



Bevis for formlerne til beregning af a og b i en lineær regression med mindste kvadraters metode

Ligningen divideres med -2 .

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b)$$

x_i ganges ind i parentesen.

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i)$$

$b = \bar{y} - a\bar{x}$ indsættes.

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - (\bar{y} - a\bar{x})x_i)$$

x_i ganges ind i parentesen.

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - \bar{y}x_i + a\bar{x}x_i)$$

Ligningen opdeles i led med og uden a .

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y}x_i) + \sum_{i=1}^n (-ax_i^2 + a\bar{x}x_i)$$

Led med a faktorerises.

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y}x_i) - a \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}x_i)$$

$a \sum (x_i^2 - \bar{x}x_i)$ lægges til.

$$a \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}x_i) = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y}x_i)$$

Ligningen divideres med $\sum (x_i^2 - \bar{x}x_i)$.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y}x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}x_i)}$$

Nu er sammenhængen mellem punkterne (x_i, y_i) og a bestemt.

Til sidst skal det bestemmes om der er tale om et minimum. For at bestemme det bestemmes

$$\frac{d^2 S(a, b)}{da^2} = d \left(\sum_{i=1}^n -2 \cdot x_i \cdot (y_i - ax_i - b) \right) / da = \sum_{i=1}^n 2x_i^2$$

$$\frac{d^2 S(a, b)}{db^2} = d \left(\sum_{i=1}^n -2 \cdot (y_i - ax_i - b) \right) / db = \sum_{i=1}^n 2$$

$$\frac{d^2 S(a, b)}{da db} = d \left(\sum_{i=1}^n -2 \cdot x_i \cdot (y_i - ax_i - b) \right) / db = \sum_{i=1}^n 2x_i$$

Hvis

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{d^2 S(a, b)}{da^2} \\ 0 &< \frac{d^2 S(a, b)}{da^2} \cdot \frac{d^2 S(a, b)}{db^2} - \frac{d^2 S(a, b)^2}{da db} \end{aligned}$$

er der tale om et lokalt minimum.

$$\sum_{i=1}^n 2x_i^2 > 0$$

da x_i^2 er altid positivt. Nu undersøges den anden ulighed. Denne ulighed kan reduceres.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n 2 - \left(\sum_{i=1}^n 2x_i \right)^2 &> 0 \\ 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1 - 4 \left(\sum_{i=1}^n 2x_i \right)^2 &> 0 \\ 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1 &> 4 \left(\sum_{i=1}^n 2x_i \right)^2 \end{aligned}$$

For at bevise at denne ulighed ses på følgende andengradspolynomium

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) x + \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n (x_i x - 1)^2$$

Da $f(x) > 0$ vil diskriminanten for $f(x)$ være negativ. Diskriminanten er

$$\left(-2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^n 1 < 0$$

Denne ulighed kan reduceres til

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^n 1 < 0$$

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 < 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^n 1$$

Heraf ses det ønskede.



Efter at modellen er bestemt laves modelkontrol. En undersøgelse af hvor god en model der er tale om. Den første metode til at undersøge om modellen er god, er ved at plote modellen sammen med de data der ligger til grund for modellen. Et plot af residualerne mod den forklarende variabel (X) kan anvendes til at se om der er systematiske afvigelser fra modellen. I residualplottet kan det også ses om der er atypiske observationer, der kaldes outliers. Så kan korrelationskoefficienten R^2 beregnes. Den er et mål for sammenhængen mellem de to variable X og Y . Det er også muligt at beregne et konfidensinterval for de to parametre a og b i modellen. Hvis konfidensintervallet for a (hældningskoefficienten) indeholder nul, betyder det at der ikke er sammenhæng mellem de to variable. Det er også mulig at undersøge om residualerne er normalfordelt - som det bør være.

Binomialfordelingen

Binomialfordelingen er en særlig fordeling der forekommer når der laves en serie af uafhængige Bernoulliforsøg. En binomialfordelt stokastisk variabel $S \sim b(n, p)$ er summen af $n \geq 1$ Bernoulliforsøg med en successandsynlighed p mellem 0 og 1. Sammenhængen mellem binomialfordelingen og normalfordelingen er defineret i den centrale grænseværdisætning. Den siger at sandsynligheden for at få mindre end r succeser af n mulige i binomialfordelingen er lig med sandsynligheden for at få en værdi der mindre end r i normalfordelingen med samme middelværdi og med samme spredning som i binomialfordelingen. Når n nærmer sig uendelig.

Sætning 8 — Den centrale grænseværdisætning. Lad X_i være $n \geq 1$ uafhængige Bernoulliforsøg med successandsynlighed p mellem 0 og 1 og $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Så gælder der for $x \in] - \infty, \infty[$, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$$

Dette betyder, at der kan laves en normalfordelingsapproximation til binomialfordelingen med middelværdi $\mu = n \cdot p$ og spredning $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$. Dette viser sig særligt praktisk for større værdier af $n > 500$, hvor det kan være problematisk at udregne $P(X \leq x)$ fordi det kræver stor regnekraft. Men nu til beskrivelsen af relevante formler, der kan bruges til at udfører beregninger med binomialfordelingen.

Der er to dele binomialkoefficienten og binomialsandsynligheder. Binomialkoefficienten antallet af måder hvorpå, der kan udtages r forskellige elementer, fra en mængde med n forskellige

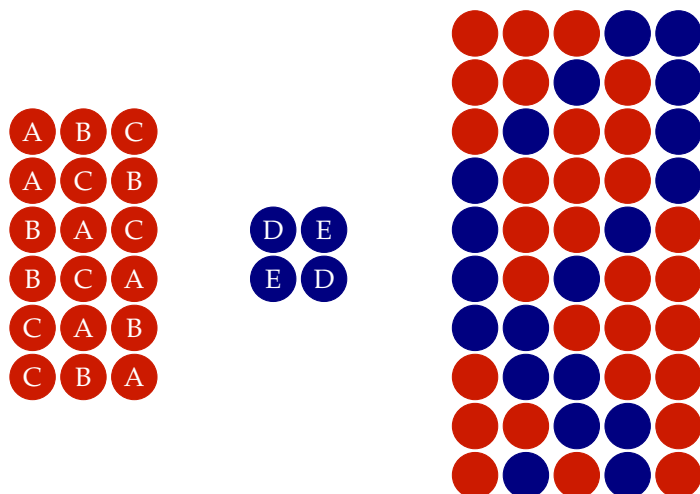
elementer.

Sætning 9 Binomialkoefficienten har formelen

$$K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Bevis

Formlen indses nemmest ved at se på situationen fra synspunktet hvor der er n elementer som alle er forskellige. Der er derfor $n!$ måder de kan udvælges på. Så anvendes multiplikationsprincippet på opdelingen af de n elementer i to grupper. Den ene gruppe indeholder r elementer. Den anden gruppe indeholder så $n - r$ elementer. Opdelingen kan illustreres med farver. Da alle elementerne er unikke har de hver et bogstav. Som eksempel ses på 5 cirkler.



Binomialkoefficienten

Gruppen med r elementer kan udvælges på $r!$ måder og gruppen med $n - r$ elementer kan udvælges på $(n - r)!$. Der er $K(n, r)$ måder som r elementer kan udtages af n elementer. Multiplikationsprincippet giver så at

$$n! = r! \cdot (n - r)! \cdot K(n, r)$$

i denne ligningen isoleres $K(n, r)$.

$$K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$



Dette resultat skal bruges til at bestemme binomialsandsynligheden $P(X = r)$.

Sætning 10 Sandsynlighedsparameteren er p og antalsparameteren er n for den stokastiske variabel X . Da er sandsynligheden for at få netop r succeser ud af n mulige

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

Sandsynlighederne kan ganges fordi de enkelte udfald er uafhængige.



Eksempelvis har



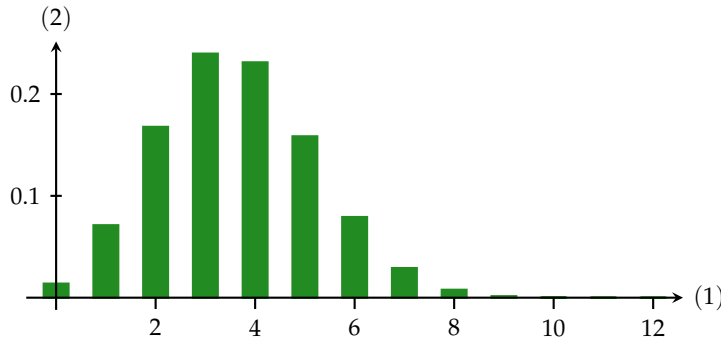
Sandsynligheden

$$p \cdot p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p)$$

Da 3 kan vælges ud af 5 mulige på 10 måder, skal denne sandsynlighed ganges med 10. Det er fordi binomialsandsynligheden $P(X = 3)$ er sandsynligheden for at få 3 succeser ud af 5 mulige, den siger ikke noget om, at det skal ske i en bestemt rækkefølge. Grafen for denne sandsynlighedsfunktion kan vises med et pindediagram. På (1)-aksen er r og på (2)-aksen er $P(X = r)$.



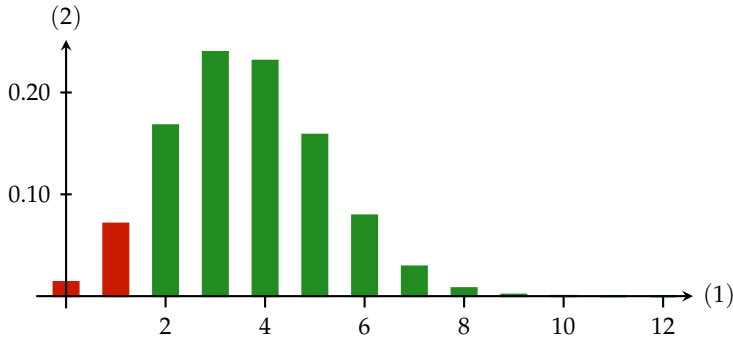
Binomialsandsynligheder



Tabellen for $X \sim b(12, 0.3)$ er

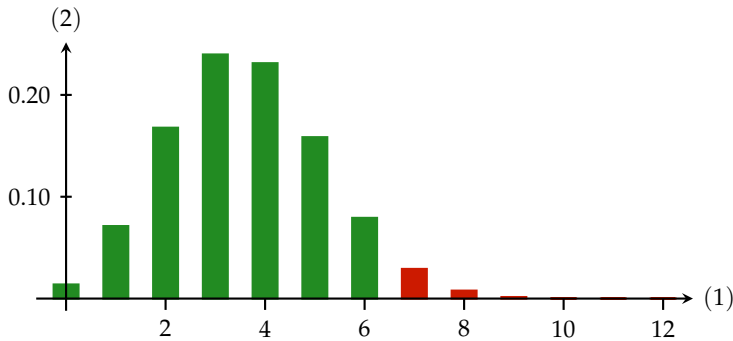
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = r)$	1.4	7.1	16.8	24.0	23.1	15.8	7.9	2.9	0.8	0.1	0.02	0.00	0.00

Grafen kan illustrere hvordan en binomialtest fungerer. Ved en binomialtest vælges et signifikansniveau. Som eksempel vælges 10 %. Ved en venstresidet test er det kritiske område de værdier som står længst til venstre, hvor summen tilsammen er mindre end 10 %.



Her er det kritiske område $\{0,1\}$. Det betyder, at i det tilfælde hvor et udfald kun indeholder 0 eller 1 succeser forkastes nulhypotesen.

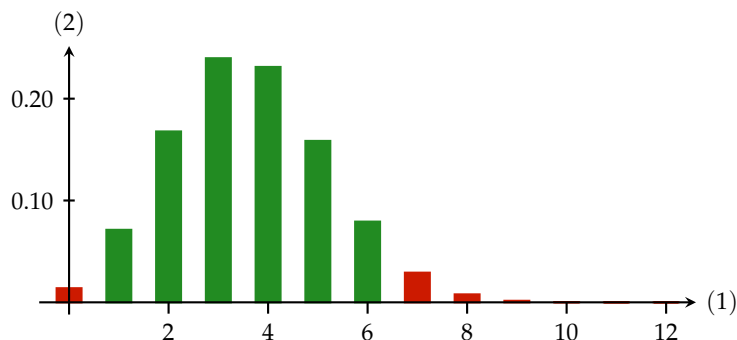
Ved en højresidet test er det kritiske område de værdier som står længst til højre, hvor summen tilsammen er mindre end 10 %.



Her er det kritiske område $\{7,8,\dots,12\}$. Det betyder, at i det tilfælde hvor et udfald indeholder 7 eller flere succeser forkastes nulhypotesen.

Ved en tosidet test deles signifikansniveauet i to lige store dele og der udføres samtidig en venstre og højresidet test, med det

halve signifikansniveau.



Her er det kritiske område $\{0\}$ og $\{7, 8, \dots, 12\}$.

I det følgende vil vi vise at $\mu = E(X) = np$ for en binomialfordelt stokastisk variabel X .

Sætning 11 Hvis X er en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p . Da er middelværdien μ .

$$\mu = E(X) = np$$

Bevis

For at vise dette skal vi først vise at

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Altså at middelværdien af summen af to stokastiske variabler er det samme som summen af middelværdien for sammen stokastiske variabler.



$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) \cdot P_{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot P_{i,j} + y_j \cdot P_{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot P_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j \cdot P_{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i \cdot 1 + \sum_{j=1}^m y_j \cdot P_j \cdot 1 \\
 &= E(X) + E(Y)
 \end{aligned}$$

Bevis for $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

En binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n, p)$ er summen af n Bernoulliforsøg. Et Bernoulliforsøg er et forsøg hvor der er to udfald 1 og 0 og sandsynlighedstabellen for et Bernoulliforsøg er

$B = x_i$	1	0
$P(B = x_i)$	p	$1 - p$

Det betyder at middelværdien er

$$E(B) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Nu kan middelværdien af den binomialfordelte stokastiske variabel X bestemmes.

$$\begin{aligned} E(X) &= E(B_1 + \dots + B_n) \\ &= E(B_1) + \dots + E(B_n) \\ &= p + \dots + p \\ &= n \cdot p \end{aligned}$$



$E(X) = np$ for en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p



9

Produktfunktionen

For at kunne løse differentiaalligninger, er det nødvendigt at have kendskab til en række metoder til differentiation og integration. Differentiation og integration anvendes dog ikke udelukkende til at løse differentiaalligninger. I det følgende præsenteres en række anvendelser og centrale redskaber når der arbejdes med differentiation og integration.

Produktfunktionen $(f \cdot g)(x)$ er defineret ved at

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Sætning 12 Produktfunktionen $(f \cdot g)(x)$ har differentialkvotienten

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Bevis

For at vise dette anvendes definitionen af differentialkvotienten

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definitionen anvendes på produktfunktionen.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h}$$

Så anvendes definitionen af produktfunktionen

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

I tælleren lægges $f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$ til.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{h}$$



Bevis for produktreglen

Tælleren opdeles i to faktorer.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h}$$

Brøkreknereglerne $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ og $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ anvendes.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Regnereglerne $\lim f(x) + g(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$ og $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ anvendes.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Grænseværdierne udregnes.

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$



Dette resultat kan benyttes til at vise, at differentialkvotienten for x^n er $n \cdot x^{n-1}$.

Sætning 13 Differentialkvotienten for x^n er $n \cdot x^{n-1}$

Bevis

Dette kan vises ved induktion. I et induktionsbevis er der tre trin. I det først trin vises at påstanden er korrekt for én værdi af n - i dette tilfælde n . I andet trin vises at $n \Rightarrow n + 1$. Hvis påstanden er sand for n så er den også sand for $n + 1$. I tredje trin konkluderes, at hvis den er sand for fx $n = 1$ og at det er sandt at $n \Rightarrow n + 1$, så er det sandt for alle naturlige tal. Men det er ikke vist at det er sandt for alle reelle tal eller negative tal.

Trin 1

Først vises at det er sandt for $n = 1$.

$$(x^1)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

Sætningen siger at

$$x^1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$



Bevis ved induktion for at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ for $n \in \mathbb{N}$

Sætningen giver det korrekte svar og derfor er det vist at den er sand for værdien $n = 1$.

Trin 2

Nu vises at $n \Rightarrow n + 1$.

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)'$$

Dette udtryk kan differentieres med produktreglen.

$$(x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Bemærk at reglen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ blev brugt i udregningen.

$$(x \cdot x^n)' = x^n + n \cdot x^n$$

Dette kan faktorerises.

$$(x \cdot x^n)' = (n + 1) \cdot x^n$$

Sætningen siger at det skal give

$$(x^{n+1})' = (n + 1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n + 1) \cdot x^n$$

Sætningen giver det korrekte svar og derfor er det vist at $n \Rightarrow n + 1$.

Trin 3

Nu kan det konkluderes at sætningen gælder for alle tal $1, 2, 3, \dots$

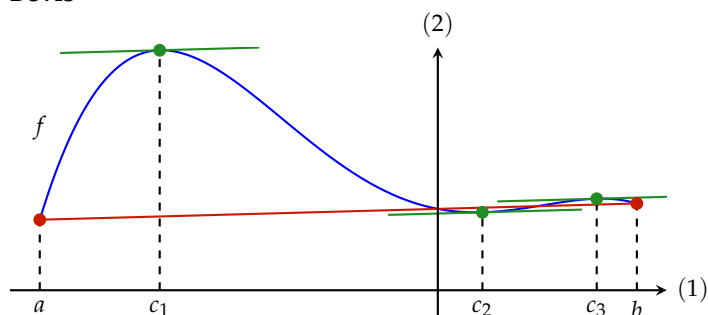


Middelværdi- og monotonisætningen

Sætning 14 — Middelværdisætningen. Hvis f er en kontinuert funktion på intervallet $[a, b]$ så vil der findes mindst en værdi c i intervallet $]a, b[$ så

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bevis

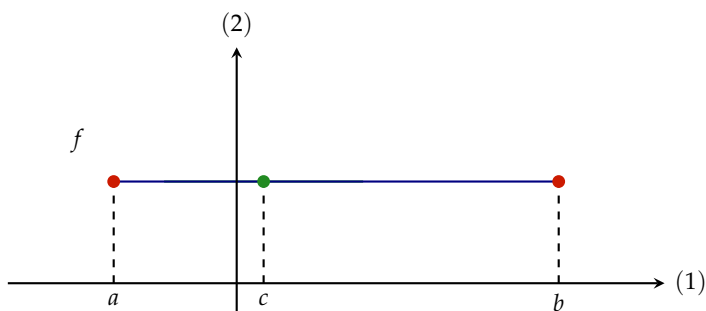


Først antager vi at $f(a) = f(b)$ og vi vil vise at der findes mindst en værdi c så $f'(c) = 0$.

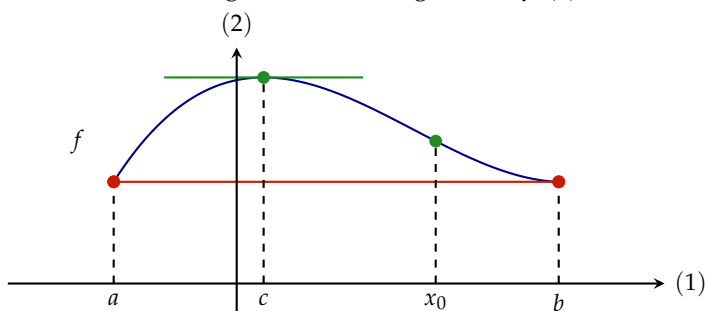
Først antager vi at $f(a) = f(b)$ og at funktionen er konstant. Så vil f være konstant og så er $f'(x) = 0$ i alle punkter og derfor også i $f'(c)$.



Bevis for middelværdisætningen

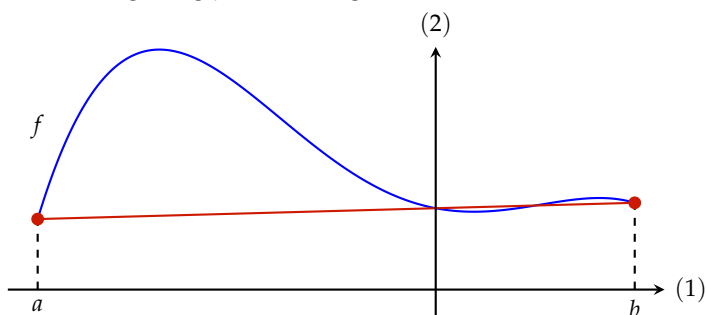


Vi kan nu antage at der findes en værdi x_0 hvor funktionens værdien $f(x_0)$ er forskellig fra $f(a)$ og $f(b)$. Det betyder at der vil findes et maksimum eller et minimum. Dette maksimumssted eller minimumssted er c og derfor vil der gælde at $f'(c) = 0$.



Dette skal nu bruges til at vise middelværdisætningen.

Vi starter med at bestemme forskriften for den rette linje, der går gennem a og b . Forskriften for en ret linje er $y = \alpha x + \beta$. Hvor α er hældningen og β er skæringen med 2. akse.



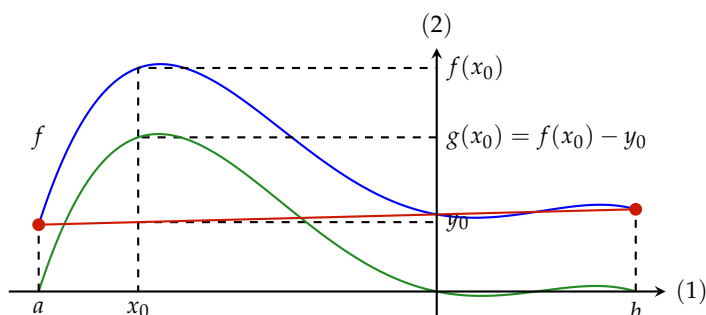
$$\alpha = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Dette kan sammensættes til følgende ligning

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot x - \beta$$

Nu konstrueres en ny funktion g som er $g(x) = f(x) - y$. Denne nye funktion vil have forskriften

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot x - \beta \right)$$



Denne funktion differentieres

$$g'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right)$$

For denne funktion gælder at $g(a) = g(b)$ og derfor vil der findes mindst et c hvor $g'(c) = 0$, i følge det tidligere viste. Værdien for c indsættes i $g'(x)$

$$g'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right)$$

Da $g'(c) = 0$ bliver det til

$$0 = f'(c) - \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right)$$

Efter at $f'(c)$ lægges til fås det ønskede.

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

■

Sætning 15 — Monotonisætningen. Hvis f er en kontinuert funktion på intervallet I så vil

$f(x)$ er voksende for $x \in I \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

$f(x)$ er aftagende for $x \in I \Leftrightarrow f'(x) < 0$.



Bevis for monotonisætningen

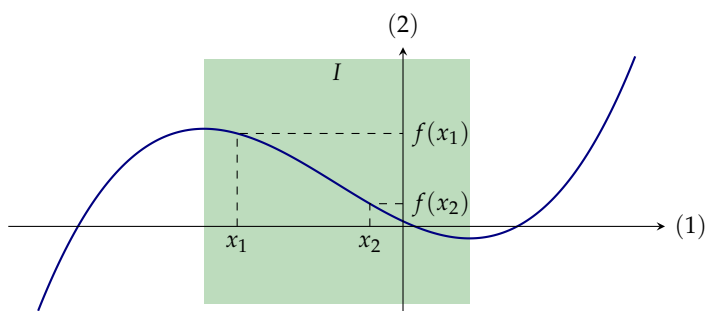
Bevis

Hvis f er aftagende gælder at

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Det følger så af middelværdisætningen at for $c \in I$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$



Hvis f er voksende gælder at

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

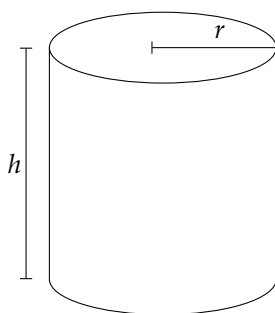
Det følger så af middelværdisætningen at for $c \in I$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$



Funktioner af to variable - gradient stationære punkter

En funktion $f(x) = y$ betyder at variablen y afhænger af en enkelt variabel x . Mange ting afhænger af mere end én variabel og er derfor en funktion af mere end én variabel. Volumen af en cylinder afhænger både af radius og af højden.



Derfor kan volumen skrives som en funktion af de to variable højden h og radius r $V = f(h, r)$ hvor

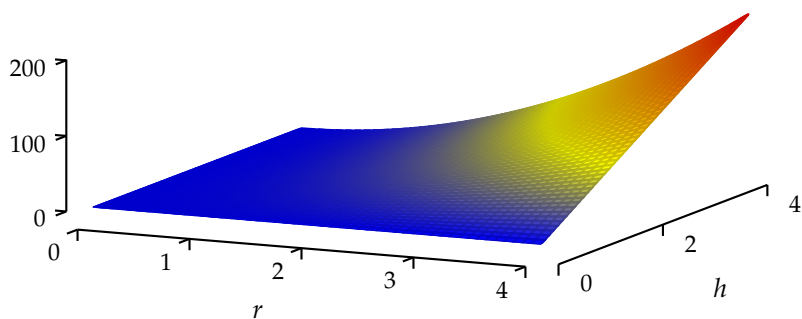
$$f(h, r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Introduktion til funktioner af to variable

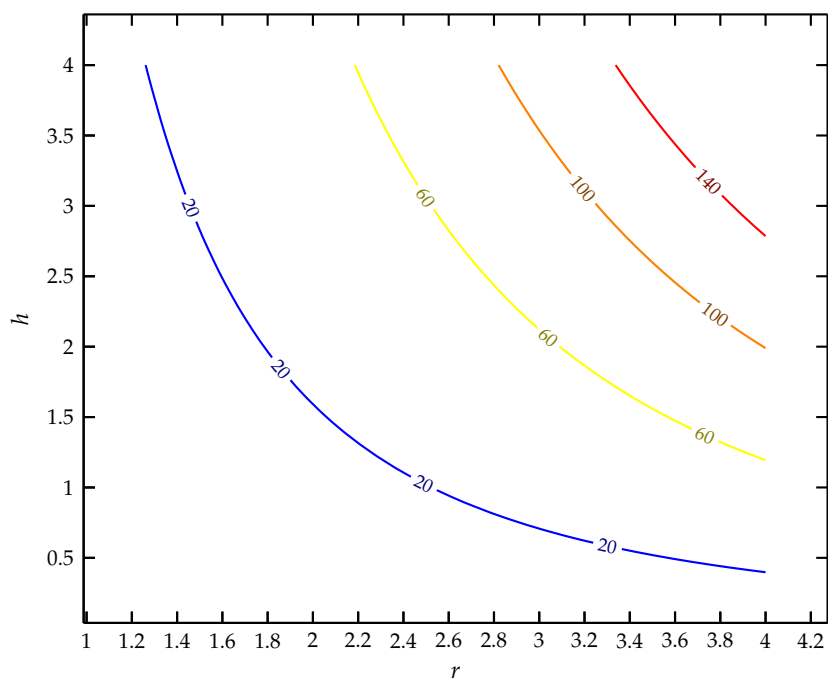
Grafen for en funktion af to variabler er en flade.

$$f(h, r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



En anden måde at se grafen på er ved at tegne niveaukurver. Niveaukurverne er grafisk repræsenteret på 3D-grafen ved forskellige farver.

$$f(h, r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

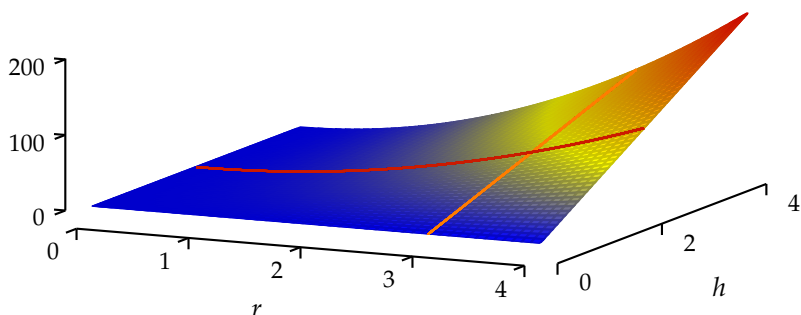


Når niveaukurverne ligger tæt betyder det at grafen vokser hurtigt i den retning. Labelen på niveaukurven viser volumen af

cylinderen.

På grafen ses at volumen af cylinderen afhænger af r er som en parabel og volumen afhænger af højden som en lineær funktion. Dette udtrykkes bedst ved at se på snitkurven for fx $f(2, r)$ og $f(h, 3)$.

Snitkurver



Funktioner af flere variable har partielt afledte

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

Det understillede x og y for den partielt afledte refererer til den variabel i f som der differentieres med hensyn til. En anden mulig notation er

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y)$$

Som eksempel på den partielt afledte kan gives funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 2y + x \cdot y$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 6x + y$$

I dette tilfælde er differentieres funktionen med hensyn til x og det betyder at $3x^2$ bliver $6x$, $2y$ er en konstant og derfor bliver det til 0, $x \cdot y$ er y en konstant, der ganges x og da giver reglerne for differentiation at der er y .

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2 + x$$

I dette tilfælde er differentieres funktionen med hensyn til y og det betyder at $3x^2$ er en konstant og derfor bliver det til 0, $2y$ er bliver det til 2, $x \cdot y$ er x en konstant, der ganges y og da giver reglerne for differentiation at der er x .

Gradienten for en funktion af to variable er en vektorfunktion. Gradienten er defineret som

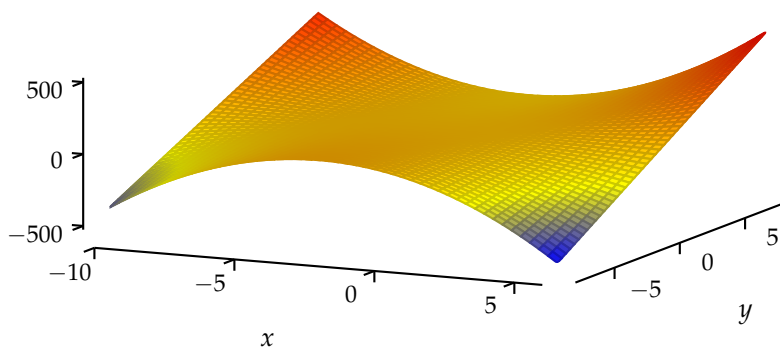
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

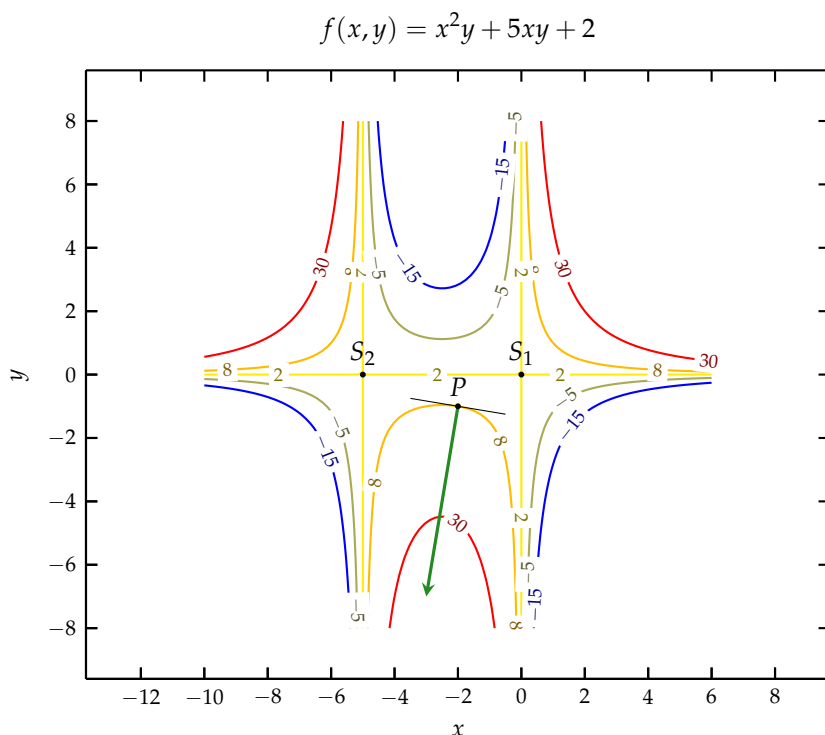
Sætning 16 Gradienten i et punkt $P(a, b, f(a, b))$ står vinkelret på niveaukurven for funktionen $f(x, y) = f(a, b)$

Jeg kommer ikke med noget bevis for denne sætning. Men her er et eksempel med funktionen

$$f(x, y) = x^2y + 5xy + 2$$

$$f(x, y) = x^2y + 5xy + 2$$





På figuren ses gradienten til punktet $P(-2, -1, 8)$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + 5y \\ x^2 + 5x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-2, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

På figuren ses også to særlige punkter S_1 og S_2 . I disse punkter skal gradienten stå vinkelret på flere ikke parallelle niveaukurver. Dette kan kun lade sig gøre hvis gradienten er nulvektoren. Disse punkter kaldes for stationære punkter.

$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er et stationært punkt for f hvis gradienten er nulvektoren i dette punkt. For at udregne om det stationære punkt P er et maksimum, et minimum, et saddelpunkt eller ingen af delene bestemmes r, s og t .

$$\begin{aligned} r &= f''_{xx}(x_0, y_0) \\ s &= f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) \\ t &= f''_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Derefter udregnes diskriminanten $D = r \cdot t - s^2$. Hvis $D < 0$ er P et saddelepunkt. Hvis $D = 0$ er P inden af delene. Hvis $D > 0$ og $r > 0$ er det et lokalt minimum. Hvis $D > 0$ og $r < 0$ er det et lokalt maksimum.

Sætning 17 Hvis funktioner $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$ er kontinuerte i P og $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ er kontinuerte i et område omkring $P(a, b, f(a, b))$ så gælder der at

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$

Bevis

Lad h og k være små positive tal, så $(a + h, b + k)$ ligger i en cirkel med centrum i (a, b) . Da vil også alle punkterne i rektangel med hjørnerne (a, b) , $(a, b + k)$, $(a + h, b + k)$ og $(a + h, b)$ også ligge i cirklen.

Først defineres nogle hjælpefunktioner

$$\begin{aligned} Q &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \\ u(x) &= f(x, b + k) - f(x, b) \\ v(y) &= f(a + h, y) - f(a, y) \end{aligned}$$

Da vil

$$\begin{aligned} Q &= u(a + h) - u(a) \\ Q &= v(b + k) - v(b) \end{aligned}$$

Nu følger der af middelværdisætningen, som kan bruges fordi funktioner $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$ er kontinuerte i P og $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ er kontinuerte i et område omkring $P(a, b, f(a, b))$, at der findes et tal i_1 mellem 0 og 1 så

$$\frac{u(a + h) - u(a)}{(a + h) - a} = u'(a + i_1 \cdot h)$$



Symmetri af differentiationsrækkefølgen
 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

Denne ligning kan reduceres til

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a + i_1 \cdot h)$$

h kan gangs på begge sider

$$Q = u(a+h) - u(a) = h \cdot u'(a + i_1 \cdot h)$$

Ved at bruge definitionen af $u'(x)$ få at

$$Q = h \cdot u'(a + i_1 \cdot h) = h \cdot (f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b))$$

Middelværdisætningen anvendes nu på $f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b)$ med hensyn til den anden variabel.

$$\frac{f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b)}{(b+k) - b} = f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k)$$

Denne ligning kan reduceres til

$$\frac{f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b)}{k} = f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k)$$

k kan gangs på begge sider

$$f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b) = k \cdot f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k)$$

Det betyder at Q kan omskrives til

$$Q = h (f'_x(a + i_1 \cdot h, b+k) - f'_x(a + i_1 \cdot h, b)) = h \cdot (k \cdot f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k))$$

Ved et tilsvarende argument kan $Q = v(b+k) - v(b)$ også skrives som

$$Q = h \cdot (k \cdot f''_{yx}(a + i_3 \cdot h, b + i_4 \cdot k))$$

hvor i_3 og i_4 er tal mellem 0 og 1.

Nu haves to forskellige formler for Q og disse kan sættes lig hinanden.

$$h \cdot \left(k \cdot f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k) \right) = h \cdot \left(k \cdot f''_{yx}(a + i_3 \cdot h, b + i_4 \cdot k) \right)$$

Ligningen kan divideres med $h \cdot k$

$$f''_{xy}(a + i_1 \cdot h, b + i_2 \cdot k) = f''_{yx}(a + i_3 \cdot h, b + i_4 \cdot k)$$

Da funktioner $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$ er kontinuerte i P kan grænseværdien udregnes for $h \rightarrow 0$ og $k \rightarrow 0$. Så fås at

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$



Funktioner af to variable - tangentplan

I det følgende til krydsproduktet bruges. Krydsproduktet af to vektorer

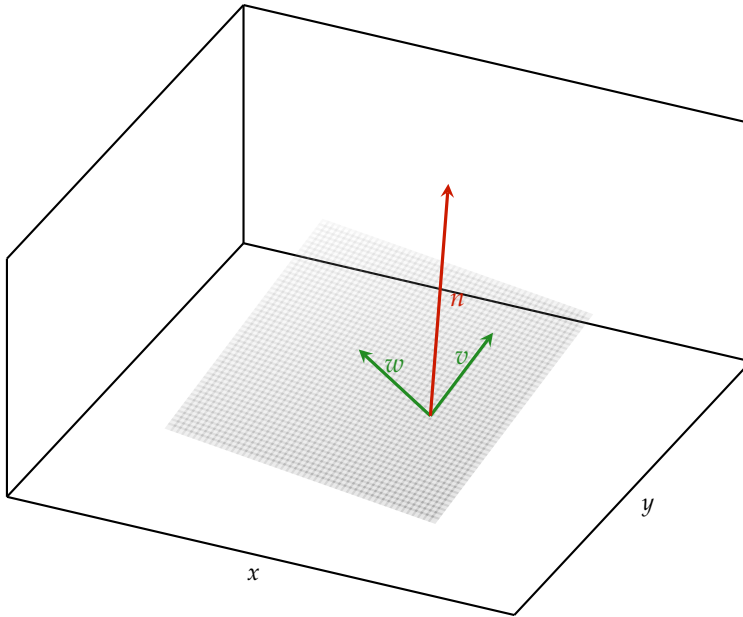
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ og } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Er defineret som

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ -(v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix}$$

Det skal også bruges at $\vec{n}$ står vinkelret på både vektor $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Normalvektor



Dette følger af at to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vinkelrette hvis og kun hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Sætning 18 $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ står vinkelret på både vektor $\vec{v}$ og $\vec{w}$

Bevis

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ -(v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) \cdot v_x - (v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) \cdot v_y + (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \cdot v_z \end{aligned}$$

Ved at gange parenteserne ud fås at

$$v_y \cdot w_z \cdot v_x - v_z \cdot w_y \cdot v_x - v_x \cdot w_z \cdot v_y + v_z \cdot w_x \cdot v_y + v_x \cdot w_y \cdot v_z - v_y \cdot w_x \cdot v_z = 0$$

Et tilsvarende argument kan bruges til at vise at $\vec{n}$ står vinkelret på vektor $\vec{w}$.



Bevis for at $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ står vinkelret på både vektor $\vec{v}$ og $\vec{w}$

En normallinje der går gennem et punkt $P(a, b, f(a, b))$ på fladen for en funktion $f(x, y)$, er en linje som står vinkelret på fladen i punktet P . Et tangentplan er en plan flade der indeholder punktet P og som står vinkelret på en normallinjen der går gennem P . En normallinje har en retningsvektor, som også er en normalvektor.

Sætning 19 Ligningen for tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $P(a, b, f(a, b))$ er

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

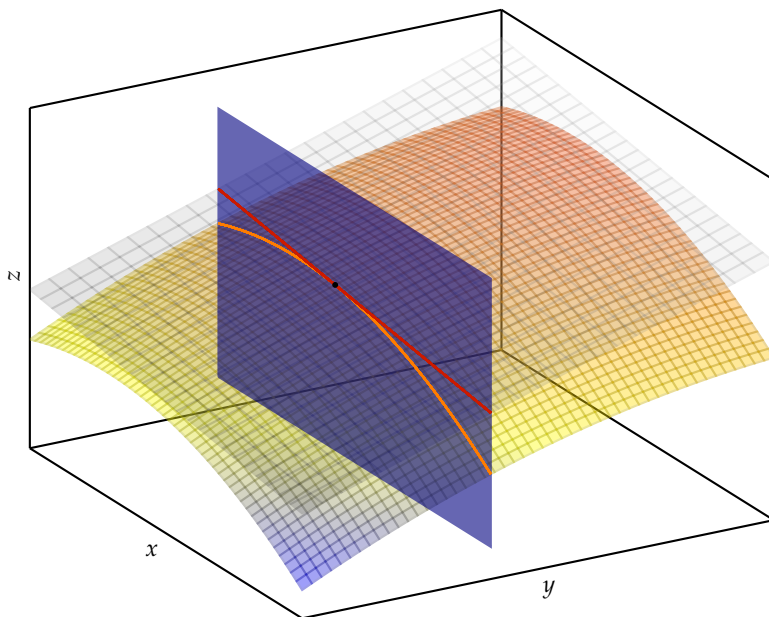
Bevis

Antag at en flade $z = f(x, y)$ har en tangentplan der ikke er parallel med z -aksen.

Tangentplanen skærer planen $y = b$ i en ret linje, der er tangent i P til kurven der er dannet af skæringen mellem fladen $z = f(x, y)$ og planen $y = b$.



Bevis for ligningen for tangentplanen.

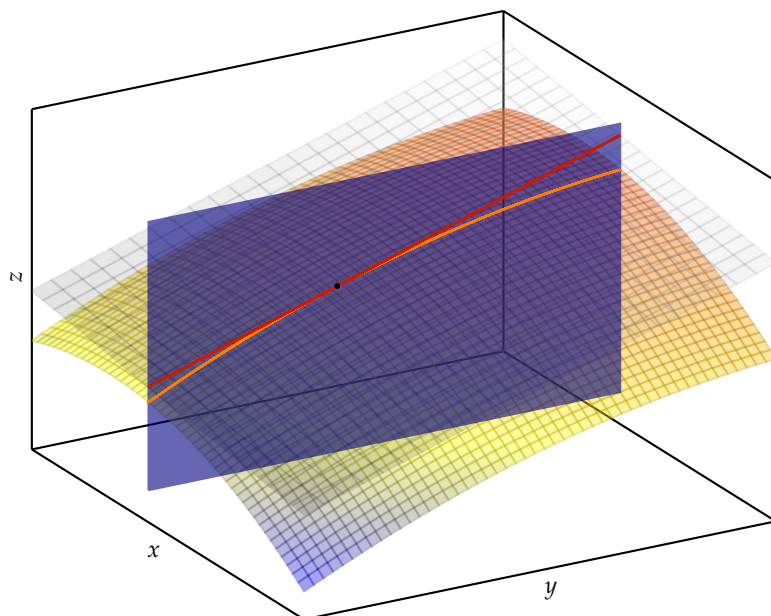


Denne rette linje har hældningen $f'_x(a, b)$ og er derfor parallel

med vektoren

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(a, b) \end{pmatrix}$$

Tangentplanen skærer planen $x = a$ i en ret linje, der er tangent i P til kurven der er dannet af skæringen mellem fladen $z = f(x, y)$ og planen $x = a$.



Denne rette linje har hældningen $f'_y(a, b)$ og er derfor parallel med vektoren

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(a, b) \end{pmatrix}$$

Normalvektoren kan nu udregnes som krydsproduktet af $T_y \times T_x$.

$$\vec{n} = T_y \times T_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(a, b) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot f'_x(a, b) - 0 \cdot f'_y(a, b) \\ -(0 \cdot f'_x(a, b) - 1 \cdot f'_y(a, b)) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x(a, b) \\ f'_y(a, b) \\ -1 \end{pmatrix}$$

De punkter (x, y, z) som ligger i tangentplanen, er dem der sammen med punktet $P(a, b, f(a, b))$ danner en vektor, der står vinkelret på normavektoren. Det betyder at

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - f(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x(a, b) \\ f'_y(a, b) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Derfor har tangentplanen, der går gennem $P(a, b, f(a, b))$ og har $\vec{n}$ som normalvektor ligningen

$$f'_x(a, b) \cdot (x - a) + f'_y(a, b) \cdot (y - b) - 1 \cdot (z - f(a, b)) = 0$$

Den sidste parentes kan ganges ud

$$f'_x(a, b) \cdot (x - a) + f'_y(a, b) \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

z kan isoleres og så fås at, tangentplanen i punktet $P(a, b, f(a, b))$ er

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$



Integralregning - $F'(x) = f(x)$

For rigtigt at kunne udregne integraler, viser følgende overraskende sætning sig virkelig nyttig.

Sætning 20 Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion på intervallet I som indeholder punktet a . Lad $F(x)$ være stamfunktionen til $f(x)$ dvs.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Da er $f(x)$ den afledte funktion af $F(x)$ på intervallet I .

$$F'(x) = f(x)$$

Bevis

Først anvendes definitionen af den afledte funktion.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

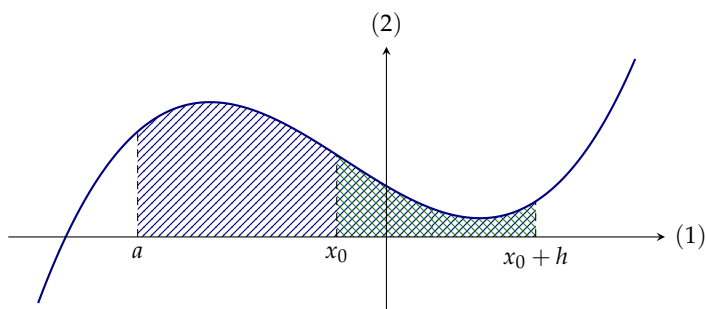
Dernæst udnyttes at $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right)$$

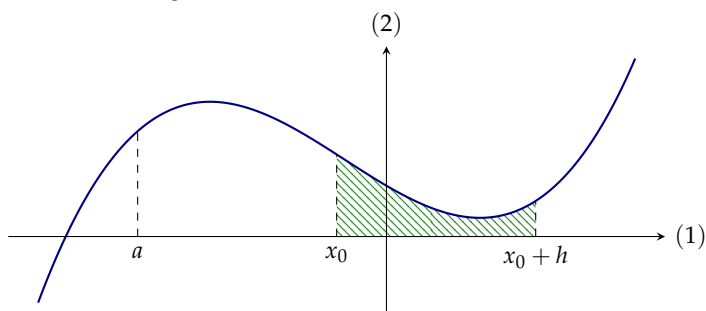
Nu ses på de to integraler, her er en skitse af de to arealer som de repræsenterer.



Video med introduktion til integralregning via arealfunktion.



Det første integral $\int_a^{x_0+h} f(t) dt$ går fra a til $x_0 + h$ (det enkelt skraverede område), mens det andet integral kun går fra a og til x_0 (det kryds skraverede område). Trækkes det andet integral fra det første fås følgende areal.

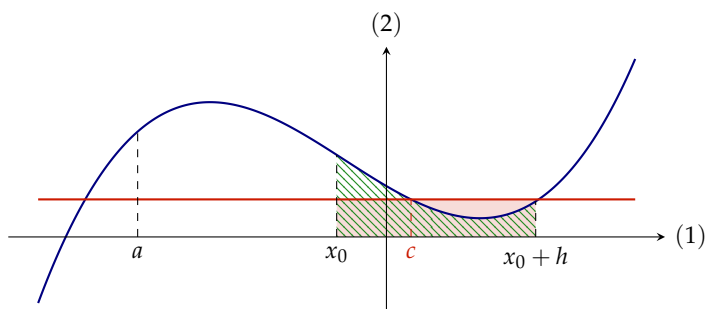


Det integral der er tilbage går fra x_0 til $x_0 + h$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \right)$$

Da f er en kontinuert funktion, vil der findes en værdi c , som afhænger af h så $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = h \cdot f(c)$.

Her ses de to arealer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ (skraveret grøn) og $h \cdot f(c)$ (lys rød).



Det betyder at $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (h \cdot f(c))$. Dette kan reduceres til $\lim_{h \rightarrow 0} f(c)$ og da c går mod x_0 når h går mod 0 (kræver overvejelse) kan udtrykket omskrives til $\lim_{c \rightarrow x_0} f(c)$. Da f er kontinuert vil $\lim_{c \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$ og da dette gælder for alle værdier af x_0 er $f(x_0) = f(x)$.

■

Integralregning - Integration ved substitution

Redegør for begreberne differentialkvotient og stamfunktion. Forklar om differentiation af sammensat funktion, og udled reglen for integration ved substitution.

Først erindre vi, at differentiation af en sammensat funktion sker ved følgende regel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

og reglen $F'(x) = f(x)$ hvor $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Disse regler kan bruges til at vise regnereglen for integration ved substitution.

Sætning 21

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

hvor $t = g(x)$.

Bevis

I følge reglen $F'(x) = f(x)$ hvor $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ vil

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

I følge reglen for differentiation af en sammensat funktion vil

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int (F(g(x)))' dx$$

og ved substitution af $g(x) = t$ bliver det

$$\int (F(g(x)))' dx = \int F'(t) dt$$

I følge reglen $F'(x) = f(x)$ hvor $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ vil

$$\int F'(t) dt = \int f(t) dt$$



Eksempel på integration ved substitution



Bevis for sætningen om integration ved substitution

Integralregning - Kurvelængde

Redegør for begreberne ubestemt og bestemt integral.

Sætning 22 Kurvelængden af et stykke af grafen for en funktion.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

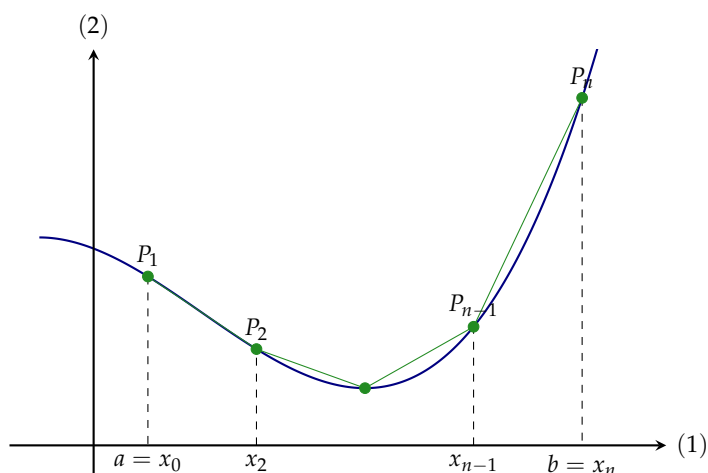
hvis $f'(x)$ er kontinuert på intervallet $[a, b]$ og $f(x)$ er defineret på samme.

Bevis

Grafen for $f(x)$ kan på intervallet $[a, b]$ opdeles i n linjestykker, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

lad P_i være punktet $(x_i, f(x_i))$ for $0 \leq i \leq n$.



Så er den samlede længden af linjestykkerne

$$L_n = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

Afstanden mellem to punkter $|AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Udtrykket divideres og ganges med $(x_i - x_{i-1})^2$

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}\right) \cdot (x_i - x_{i-1})^2}$$

Ved brug af brøk/potens-regnereglen $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right) \cdot (x_i - x_{i-1})^2}$$

Kvadratroden af $(x_i - x_{i-1})^2$ udregnes

$$L_n = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$x_i - x_{i-1}$ erstattes med Δx_i

$$L_n = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \right) \cdot \Delta x_i$$

Ifølge middelværdisætningen findes der en værdi $c \in [a, b]$ så

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c)$$

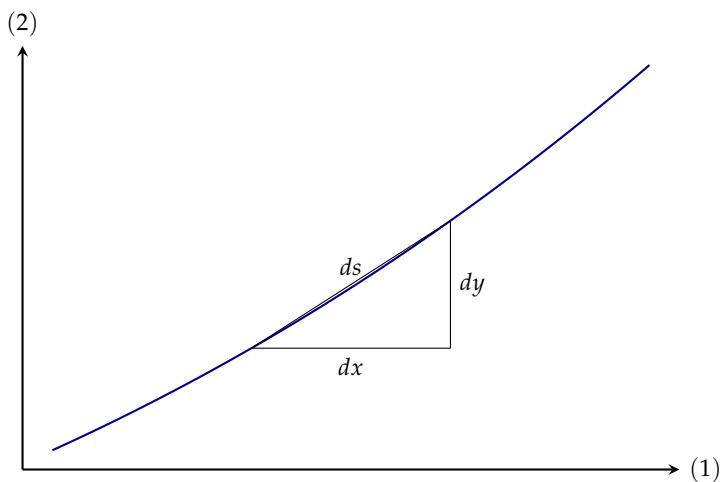
$$L_n = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + f'(c)^2} \right) \cdot \Delta x_i$$

For $n \rightarrow \infty$ vil (Riemann sum)

$$L_n \rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Bevis

Alternativ (Leibnitz)



Bevis for formelen til beregning af kurvelængden.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Division med dx^2

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Kvadratroden af ligningen bliver

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Gang med dx på begge sider

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Ved integration fås at

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Vektorfunktioner - Hastighedsvektor og stedvektor

En vektorfunktion er en funktion som er en vektor, hvor der til hver koordinat er en koordinatfunktioner som er afhængig af samme parameter fx t .

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Denne vektorfunktion kaldes også for stedvektor-funktionen. Hastighedsfunktionen er

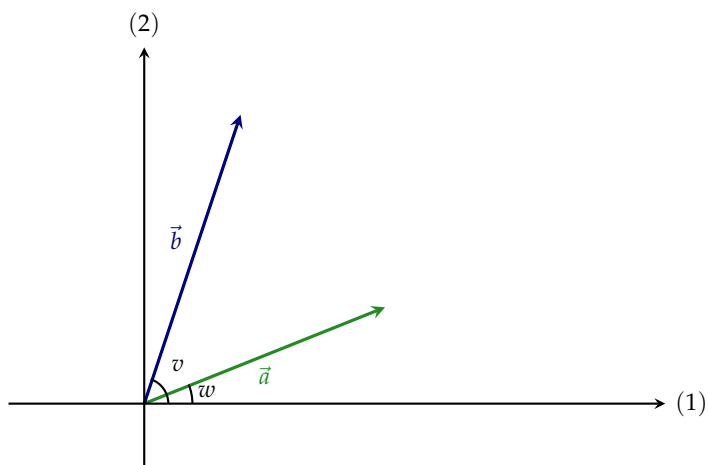
$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Sætning 23 Vinklen v mellem to vektorer kan bestemmes med formlen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Bevis

Denne formel kan vises ved at opskrive de to vektorer som produktet af deres længde med enhedsvektorer som har samme retning som $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



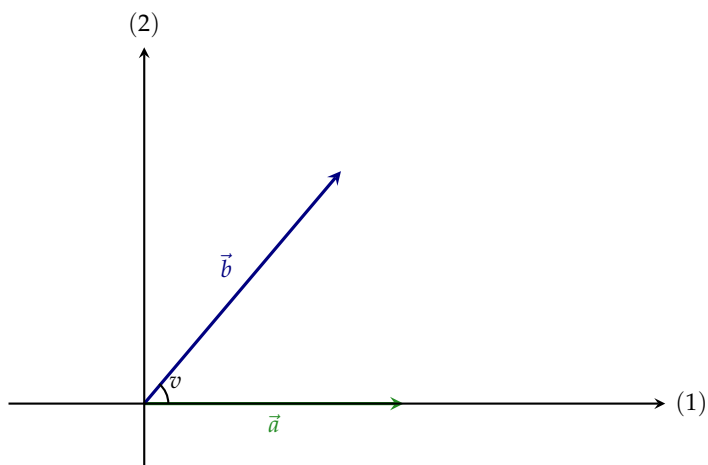
$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

Vi kan antage at $w = 0$, altså at $\vec{a}$ er parallel med (1)-aksen. Dette kan antages fordi koordinatsystemet kan drejes uden at ændre vinklen mellem de to vektorer. Når $w = 0$ er v vinklen mellem de to vektorer.



Vinkel mellem vektorer



Når $w = 0$ bliver $\vec{a}$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(0) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot 1 \\ |\vec{a}| \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bliver så

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} = |\vec{b}| \cdot \cos(v) \cdot |\vec{a}| + |\vec{b}| \cdot \sin(v) \cdot 0 = |\vec{b}| \cdot \cos(v) \cdot |\vec{a}|$$

I denne ligning kan $\cos(v)$ isoleres.

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{a}|}$$

■

Denne ligningen kan bruges til at bestemme hældningen mellem stedvektoren og hastighedsvektoren for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Først bestemmes hastighedsvektoren.

$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Så indsætte disse to vektorer i formlen for vinklen mellem to vektorer.

$$\cos(v) = \frac{\cos(t) \cdot (-\sin(t)) + \sin(t) \cdot \cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + (-\sin(t))^2} \cdot \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ligningen $\cos(v) = 0$ har løsningen $v = \frac{\pi}{2}$. Dette betyder at vinklen mellem stedvektoren og hastighedsvektoren er 90° .

Vektorfunktioner - Cirkel

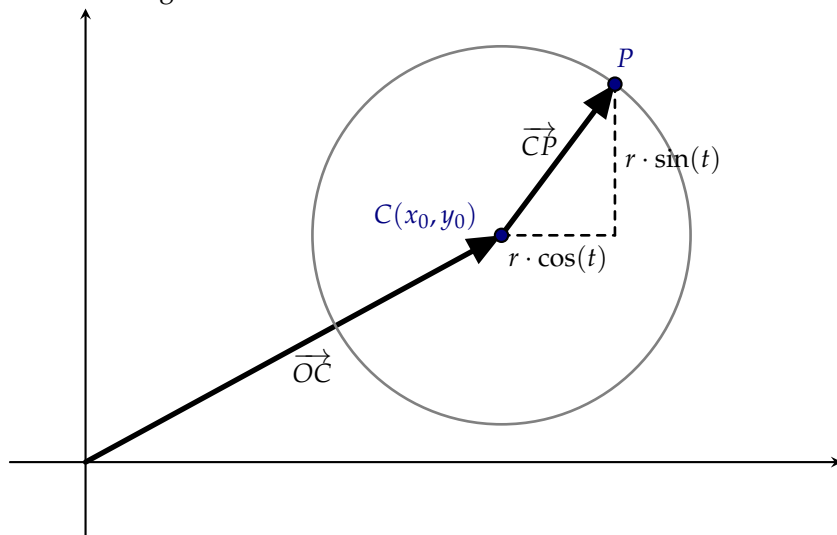
Sætning 24 Vektorfunktionen for en cirkel er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

hvor (x_0, y_0) er centrum og r er radius i cirklen.

Bevis

Dette kan indses ved at se vektorfunktionen for cirklen som summen af $\vec{OC}$ og $\vec{CP}$.



Vektorfunktion for en cirkel

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \vec{CP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Dette sammensættes til

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

hvor (x_0, y_0) er centrum og r er radius i cirklen. Bemærk at koordinatfunktionerne er

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r \cdot \cos(t) \\ x(t) - x_0 &= r \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + r \cdot \sin(t) \\ y(t) - y_0 &= r \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

De to funktioner kan lægges sammen til

$$\begin{aligned} (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 &= (r \cdot \cos(t))^2 + (r \cdot \sin(t))^2 \\ (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 &= r^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Dette er cirkelns ligningen.



Resultatet kan bruges til at vise at omkredsen af en cirkel er $2\pi r$.

Sætning 25 Omkredsen af en cirkel med radius r er $2\pi r$.



Omkreds for en cirkel.

Bevis

Kurvelængden for vektorfunktion kan beregnes med formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Vektorfunktionen beskriver en fuld cirkel for $0 \leq t \leq 2\pi$ og

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r \cdot \cos(t) \\ x'(t) &= -r \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + r \cdot \sin(t) \\ y'(t) &= r \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

Dette indsættes for at bestemmes kurvelængden.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} dt$$

Udtrykket kan reduceres ved faktorisering til

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)} dt$$

Da $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ kan det reduceres til

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt$$

Da $r > 0$ fordi det er radius i cirklen.

$$L = \int_0^{2\pi} r dt$$

Nu kan integralet udregnes.

$$L = [rt]_0^{2\pi} = r \cdot 2\pi - r \cdot 0 = r \cdot 2\pi$$

■

Mundtlig eksamen

Grundlaget for den mundtlige prøve er en række spørgsmål formuleret af eksaminator med fokus på matematisk ræsonnement og bevisførelse. De enkelte spørgsmål skal udformes med en overskrift, der angiver det overordnede emne for eksaminationen, og konkrete delspørgsmål samt et ukendt bilag, der perspektiverer emnet. De endelige spørgsmål uden bilag skal offentliggøres i god tid inden prøven og skal tilsammen i al væsentlighed dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof. Spørgsmålene og en fortegnelse over undervisningsforløb, herunder større produkter, samt de ukendte bilag sendes til censor forud for prøvens afholdelse. Eksaminationstiden er ca. 30 minutter pr. eksaminand. Der gives ca. 30 minutters forberedelsestid. Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål suppleret med uddybende spørgsmål. Anden del former sig som en samtale med udgangspunkt i det ukendte bilag og det overordnede emne.

Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilken grad eksaminandens præstation opfylder de faglige mål. I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden demonstrerer indsigt i matematisk teori og matematisk ræsonnement samt matematikkens anvendelser, og om eksaminanden kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling, herunder om eksaminanden kan reflektere over matematikkens anvendelser i andre fag. En elev, der honorer alle de mindstekrav, som evalueres ved den skriftlige prøve, opnår som minimum en karakter svarende til bestået. Ved den mundtlige prøve lægges særligt vægt på eksaminandens kompetence til at kunne kommunikere aktivt i, med og om matematik. Der gives én karakter ud fra en helhedsbedømmelse af eksaminandens præstation.

18.1 Spørgsmål

1. Differentialligninger

Beskriv betingelserne for, at en differentialligning kan løses ved separation af variable. Bevis metoden 'separation af variable' til løsning differentialligning. Løs ligningen

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

og forklar sammenhængen til $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$

Videoer

- a) Løsning af ligningen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$ b) Bevis for metoden separation af variable

2. Differentialligninger

Beskriv fordele og ulemper ved at løse en differentialligning ved en numerisk metode. Løs ligningen

$$\frac{dy}{dx} = y$$

ved en numerisk metode og sammenlign løsningen med den analytiske løsning og forklar sammenhængen til $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$

Videoer

- a) Numerisk løsning af en differentialligning b) Løsning af ligningen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$

3. Differentialligninger

Beskriv systemet af koblede differentialligninger i SIR-modellen. Vis at antallet af individer forudsættes konstant. Forklar hvordan en algoritme til en numerisk løsnings af differentialligningerne opstilles og vis hvordan algoritmen startes.

Videoer

- a) Eulers metode i Maple b) Opstilling af SIR-model
c) Eulers metode på CoVid-

4. Differentialligninger

Beskriv betingelserne for, at en differentialligning kan løses ved separation af variable. Bevis metoden 'separation af variable' til løsning differentialligning. Løs ligningen

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$$

og forklar sammenhængen til normalfordelingen.

Videoer

- a) Løsning af differentialligning $\frac{dy}{dx} = -xy$ b) Bevis for metoden separation af variable

5. Statistik

Bevis at en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og spredning σ $Z \sim N(\mu, \sigma)$ har tæthedsfunktionen

$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

og fordelingsfunktionen

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

Videoer

- a) Fordelingsfunktionen for normalfordelingen

6. Statistik

Forklar om begreberne fordelingsfunktion og frekvensfunktion. Gør rede for normalfordelingen, og vis, at

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

når X er normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ

Videoer

- a) Normale udfald i normalfordelingen

7. Statistik

Forklar hvad et residual og residualplot er og vis at den hældningskoefficient hvor summen af kvadraterne på de lodrette afstande mellem linjen og Y-værdierne fra data er mindst mulig, kan a og b i forskriften $y = ax + b$ bestemmes med

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{y} x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x} x_i)} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

hvor (x_i, y_i) er datapar og $\bar{y}$ og $\bar{x}$ er middelværdien af y_i og x_i .

Videoer

- a) Bevis for formlerne til beregning af a og b i en lineær regression med mindste kvadraters metode
- b) Residualplot
- c) Regression og modelkontrol i Maple
- d) Regression og modelkontrol kan laves i Maple i et eksempel hvor modellen ikke er god

8. Statistik

Bevis formelen for binomialkoefficienten og forklar udregningen af binomialsandsynligheder.

Videoer

- a) Binomialkoefficienten
- b) Binomialsandsynligheder

9. Differentialregning

Gennemgå definitionen af differentialkvotienten og bestem differentialkvotient af $(f \cdot g)(x)$. Benyt dette til at vise

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

ved induktion for $n \in \mathbb{N}$.

Videoer

- a) Bevis for produktreglen b) Anvendelse af produktreglen

- c) Bevis ved induktion for at
 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ for $n \in \mathbb{N}$

10. Differentialregning

Bevis middelværdisætningen og monotonisætningen.

Videoer

- a) Bevis for middelværdisætningen b) Bevis for monotonisætningen

11. Funktioner af to variable

Gør rede for, hvad man forstår ved en funktion af to variable, og for hvordan, man ved brug af differentialregning kan undersøge grafens forløb. Begreberne gradient og stationære punkter skal indgå.

Videoer

- a) Introduktion til funktioner af to variable b) Bevis for $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

12. Funktioner af to variable

Gør rede for, hvad man forstår ved en funktion af to variable, og bevis formen for tangentplanen.

Videoer

- a) Introduktion til funktioner af to variable b) Krydsproduktet er en normalvektor
- c) Bevis for ligningen for tangentplanen

13. Integralregning

Bevis at

$$F'(x) = f(x)$$

Hvor $f(x)$ er en kontinuert funktion på intervallet I , som indeholder punktet a og $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ er stamfunktionen til $f(x)$.

Videoer

- a) Bevis for integral- og differentialregningshovedsætning b) Integration ved substitution (eksempel)

14. Integralregning

Redegør for begreberne differentialkvotient og stamfunktion. Forklar om differentiation af sammensat funktion, og udled reglen for integration ved substitution.

Videoer

- a) Integration ved substitution (bevis) b) Integration ved substitution (eksempel)

15. Integralregning

Redegør for begreberne ubestemt og bestemt integral. Bevis formelen for kurvelængden af et stykke af grafen for en funktion.

Videoer

- a) Kurvelængde

16. Vektorfunktioner

Gør rede for, hvad man forstår ved en vektorfunktion. Bevis formelen til bestemmelse af vinkler mellem vektorer. Vis at hastighedsvektoren og stedvektoren er vinkelrette for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Videoer

- a) Vinkel mellem vektorer

17. Vektorfunktioner

Gør rede for, at vektorfunktionen for en cirkel er

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

hvor r er radius og (x_0, y_0) er centrum i cirklen. Bevis for cirkelns omkreds ud fra formlerne for en vektorfunktions kurvelængde.

Videoer

- a) Vektorfunktion for en cirkel b) Omkreds af en cirkel

Har du brug for hjælp kan du søge efter den på min youtube kanal, hvor du også er velkommen til at kommentere og stille spørgsmål.



<https://www.youtube.com/dennispienbring>

På min hjemmeside



<http://matx.dk>

kan du finde mange flere opgaver med facit og andre materialer.

