Differentialligninger

Dennis Pipenbring

4. november 2013

Opstilling af enkle differentialligninger ud fra en sproglig beskrivelse samt redegørelse for om en given funktion er en løsning til en differentialligning. Løsning af lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger samt en kvalitativ analyse af givne differentialligninger.

1. ordens lineære differentialligninger

En differentialligning er en ligning hvor den ubekendte er en funktion y og hvor y' indgår. Den generalle 1. ordens lineære differentialligning ser således ud

Definition 1 1. ordens lineær differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = q(t) - p(t)y(t)$$

hvor p og q er funktioner af den samme variabel t som y. Men p og q er kendte funktioner i modsætning til y der defineres via differentialligningen.

Differentialligning	**Løsning**
$\frac{dy}{dt} = k$	$y = k \cdot x + c$
$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{k \cdot x}$
$\frac{dy}{dt} = b - a \cdot y$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$
$\frac{dy}{dt} = y \cdot (b - ay)$	$y = \frac{b}{a + c \cdot e^{-b \cdot x}}$
$\frac{dy}{dt} = ay \cdot (M - y)$	$y = \frac{M}{1 + c \cdot M \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$

Tabel 1: De 5 typer af differentialligninger som kan komme til den skriftlige eksamen.

Eksempel 2 Et eksempel på en 1. ordens lineære differentialligninger er

$$\frac{dy}{dt} = 4 \cdot y$$

For at løse denne ligning skal der findes en funktion y som opfylder at $y' = 4y$.

Ligningen løses med separation af y og t.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 4 \cdot y & \\
dy &= 4 \cdot y\ dt & dt \text{ og } dy \text{ separeres.} \\
\frac{1}{y}\ dy &= 4\ dt & \text{der divideres med } y \\
\int \frac{1}{y}\ dy &= \int 4\ dt & \text{begge sider integreres} \\
\ln|y| &= 4t + C & \\
e^{\ln|y|} &= e^{4t+C} & \text{eksponentialfunktionen anvendes} \\
y &= e^{4t+C} & e^C = k \text{ og } a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\
y &= k \cdot e^{4t} &
\end{aligned}
$$

Det er ikke alle differentialligninger, hvor det er muligt at løse dem ved separation af variable. Ligninger hvor det er muligt er på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\ g(t)$$

Denne form skal ligningerne stå på inden du begynder at integrere.

Opgave 3 Løs differentialligningerne

1. $\frac{dy}{dt} = 2y$
2. $\frac{dy}{dt} = 2$
3. $\frac{dy}{dt} = 1 + y$
4. $\frac{dy}{dt} = 4 + 2y$
5. $\frac{dy}{dt} = 3 + 2y$
6. $\frac{dy}{dt} = y^2$

■

Eksempel 4 Det er ikke alle ligninger hvor de to funktioner p og q er konstanter. I ligningen $y' = t \cdot y$ er funktionen $p(t) = t$ og $q(t) = 0$.

Integrale
$\int 2\ dx = 2x + C$
$\int ax + b\ dx = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
$\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
$\int x^2\ dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
$\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$
$\int \frac{1}{ax}\ dx = \frac{1}{a}\ln|x| + C$
$\int \frac{1}{ax+b}\ dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
$\int \frac{1}{ax^2}\ dx = -\frac{1}{ax} + C$
$\int e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

Tabel 2: Ofte brugte integraler

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= t \cdot y \\
\frac{1}{y}\, dy &= t\, dt \\
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int t dt \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}t^2 + C \\
y &= e^{\frac{1}{2}t^2 + C} \\
y &= k \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}
\end{aligned}
$$

Opgave 5 Løs differentialligningerne

1. $\frac{dy}{dt} = 2t\, y$
2. $\frac{dy}{dt} = ty + 2y$
3. $\frac{dy}{dt} = ty + 5t$
4. $\frac{dy}{dt} = t\, y^2$
5. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$
6. $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$

Opstilling af differentialligninger

For at der skal være tale om en differentialligning skal, der beskrives en ændring fx. en væksthastighed, koncentrationsændring eller hastighed.

Eksempel 6 Væksten af bakterier i en kultur er proportional med antallet af bakterier med en proportionalitetsfaktor 0,4. Differentialligningen der udtrykker dette er

$$\frac{dy}{dt} = 0,4y$$

hvor y er antallet af bakterier til tiden t.

Undersøge om en given funktion er løsning til en differentialligning

For at undersøge om en given funktion er løsning til en differentialligning, indsættes funktionen i differentialligningen og hvis udtrykket er sand er funktionen løsning til ligning.

Eksempel 7 Undersøg, om $f(x) = x \cdot \ln x - x + 1$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x - 1}{x}$$

Først udregnes venstresiden

$$\begin{aligned} \frac{d(x \cdot \ln x - x + 1)}{dx} &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x && \text{da } x \cdot \frac{1}{x} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Derefter udregnes højresiden

$$\begin{aligned} \frac{(x \cdot \ln x - x + 1) + x - 1}{x} &= \frac{x \cdot \ln x - x + x}{x} && 1 - 1 = 0 \\ &= \frac{x \cdot \ln x}{x} && x - x = 0 \\ &= \ln x && \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

Da højresiden er lig venstresiden er f en løsning til differentialligningen.

Logistiske differentialligninger

Sætning 8 Differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = ay \cdot (M - y)$$

har løsningen

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot M \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

Bevis Denne differentialligning kan løses ved separation af variable.

$$\frac{dy}{dt} = ay \cdot (M - y) \Leftrightarrow \frac{1}{y(M - y)}\, dy = a\, dt$$

Udtrykke $\dfrac{1}{y(M-y)}$ omskrives for at kunne integrere det

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y(M-y)} &= \frac{1}{M}\,\frac{M}{y(M-y)} && \text{Ganges med } M \text{ på begge sider}\\
&= \frac{1}{M}\,\frac{y+M-y}{y(M-y)} && y \text{ lægges til og trækkes fra}\\
&= \frac{1}{M}\,\left(\frac{y}{y(M-y)}+\frac{M-y}{y(M-y)}\right) && \text{Brøken deles op}\\
&= \frac{1}{M}\,\left(\frac{1}{M-y}+\frac{1}{y}\right) && \text{Brøkerne forkortes}
\end{aligned}$$

Nu kan ligningen løses ved at differentiere begge sider.

$$\frac{1}{M}\int \frac{1}{M-y}+\frac{1}{y}\,dy = \int a\,dt$$

Ved at antage at $0 < y < M$ fås, at

$$\frac{1}{M}\,(\ln y - \ln(M-y)) = at + C$$

Der ganges med M på begge sider og $C_1 = C \cdot M$ og logaritmeregne-reglen $\ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$.

$$\ln \frac{y}{M-y} = Mat + M\,C$$

Eksponentialet tages på begge sider og $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ og $e^{C_1} = C_2$

$$\frac{y}{M-y} = e^{Mat}\cdot e^{MC}$$

Der ganges med $M-y$ på begge sider

$$y = (M-y)\,e^{Mat}\cdot C_2$$

$e^{Mat}\cdot C_2$ ganges ind i paraentesen

$$y = M\,e^{Mat}\cdot C_2 - y\,e^{Mat}\cdot C_2$$

$y\,e^{Mat}\cdot C_2$ lægges til på begge sider

$$y + y\,e^{Mat}\cdot C_2 = M\,e^{Mat}\cdot C_2$$

y sættes udenfor paraentes

$$y\,(1+e^{Mat}\cdot C_2) = M\,e^{Mat}\cdot C_2$$

Der divideres med $(1+e^{Mat}\cdot C_2)$

$$y = \frac{M\,e^{Mat}\cdot C_2}{1+e^{Mat}\cdot C_2}$$