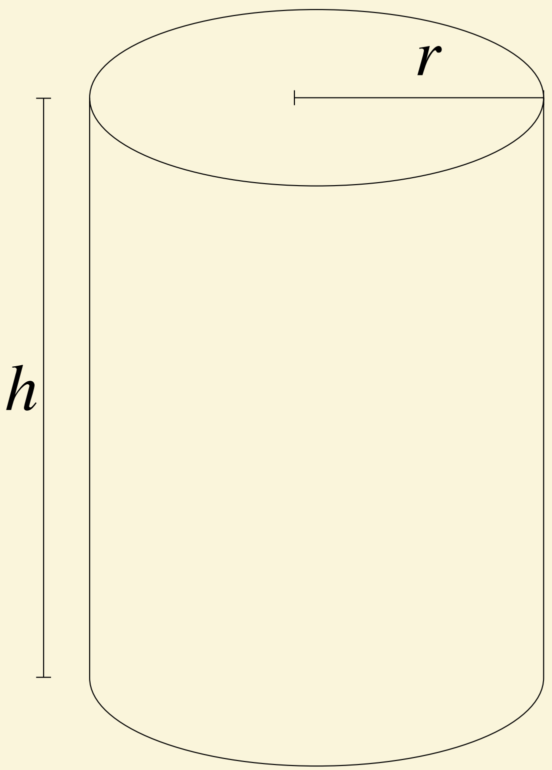
Funktioner af to variable

En funktion $f(x) = y$ betyder at variablen y afhænger af en enkelt variabel x. En funktion $f(x,y) = z$ betyder at variablen z afhænger af to variable x og y.
Volumen af en cylinder skrives som en funktion af de to variable højden h og radius r $V = f(h,r)$ hvor

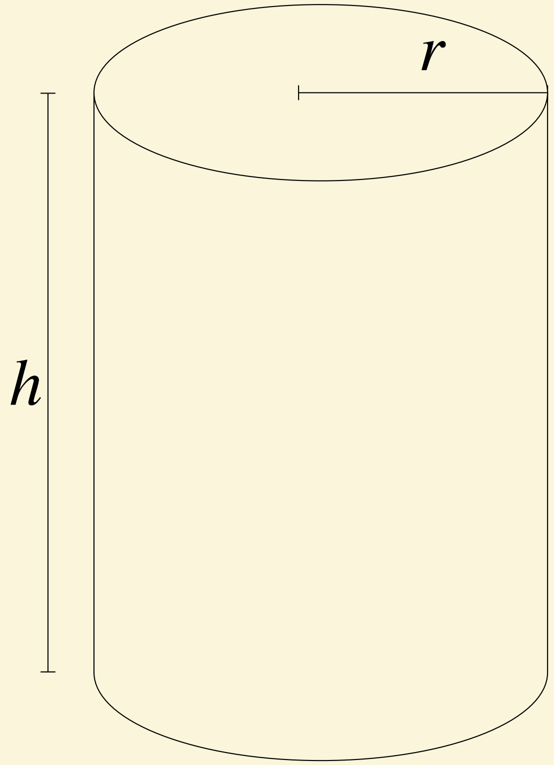
$$f(h,r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



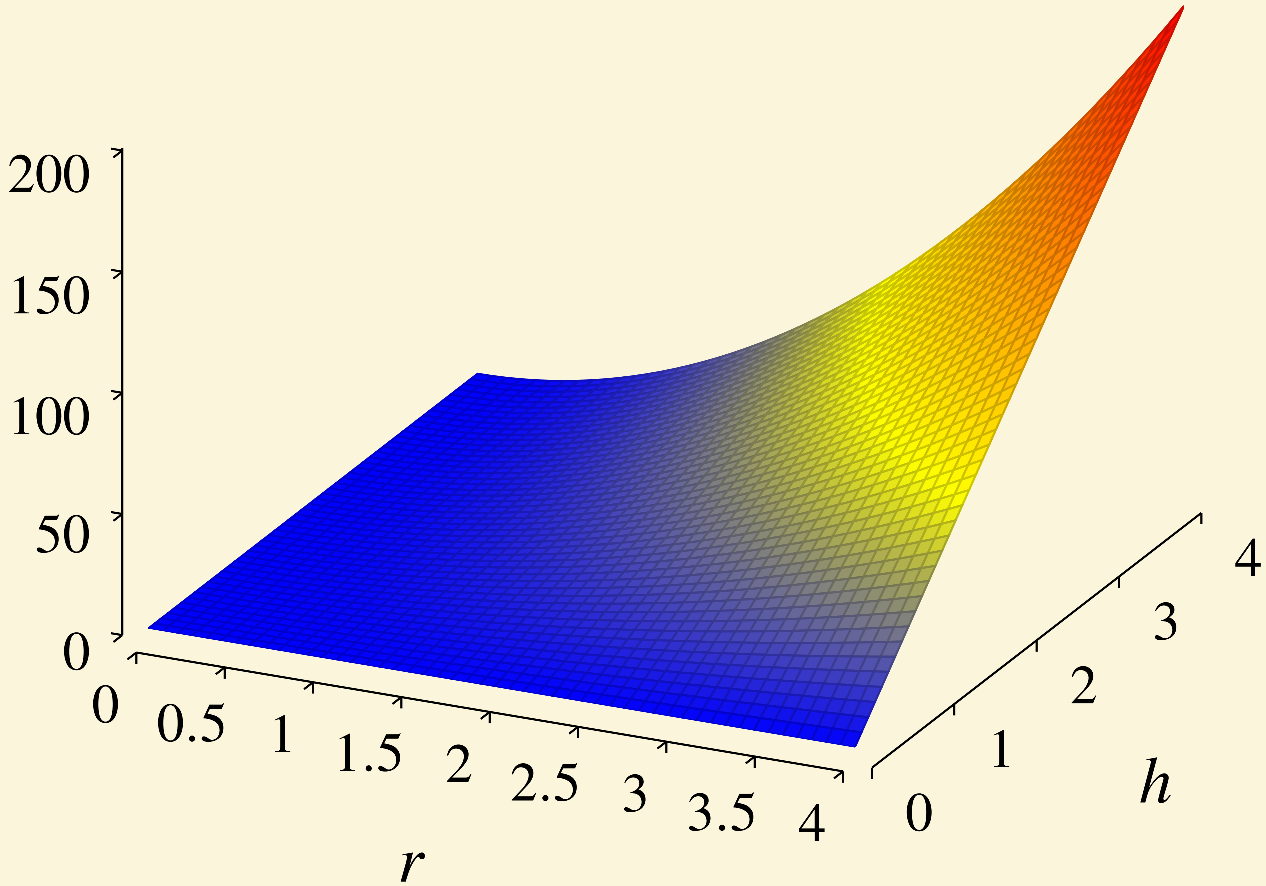
Grafen

Volumen af en cylinder skrives som en funktion af de to variable højden h og radius r $V = f(h,r)$ hvor

$$f(h,r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



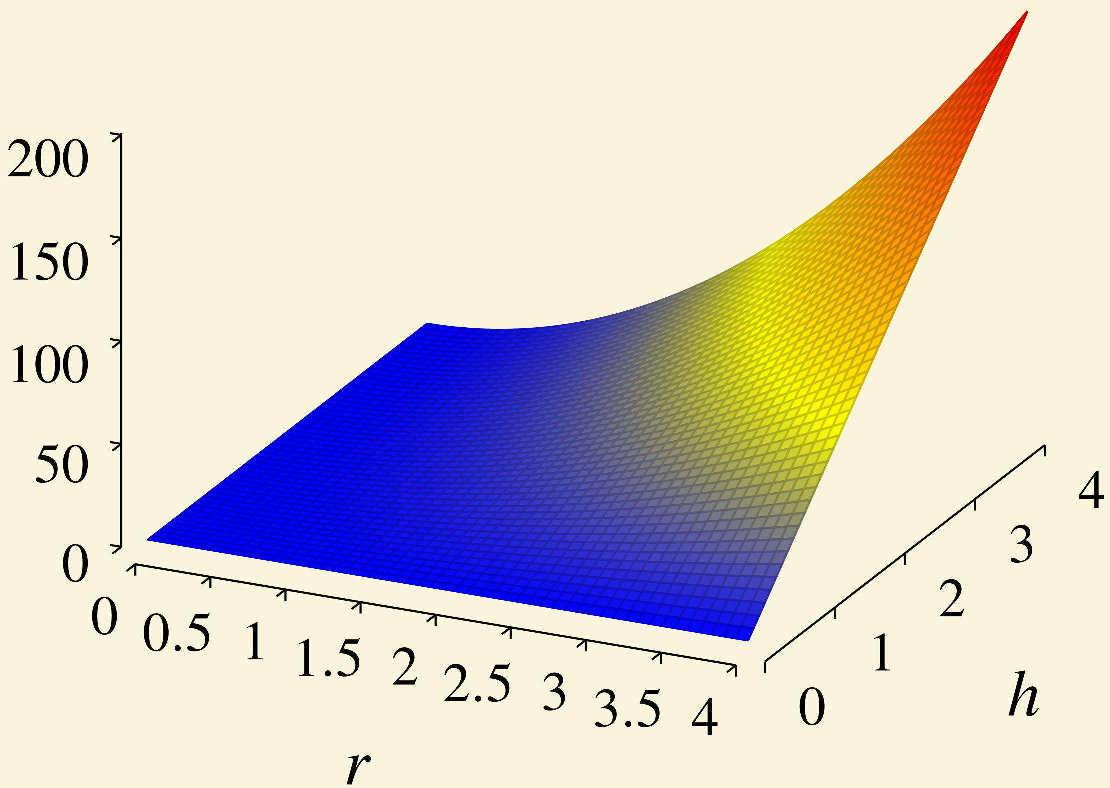
$$f(h,r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

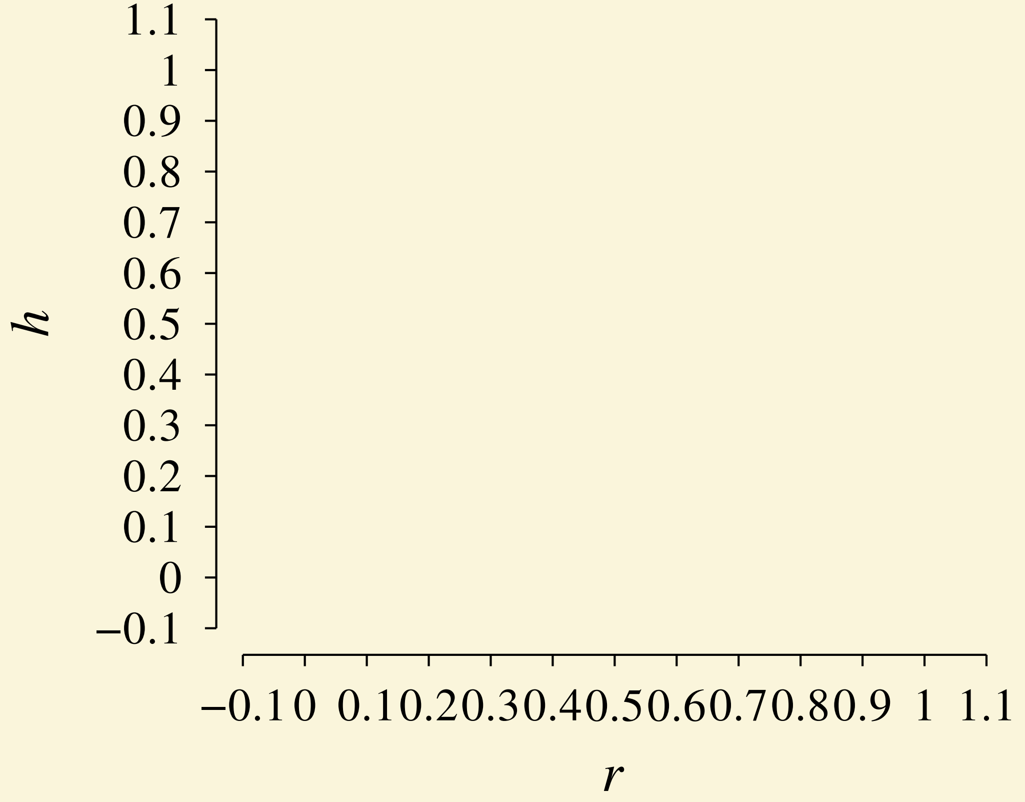


Niveaukurver

Volumen af en cylinder skrives som en funktion af de to variable højden h og radius r $V = f(h,r)$ hvor

$$f(h,r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$





Snitkurver

Volumen af en cylinder skrives som en funktion af de to variable højden h og radius r $V = f(h,r)$ hvor

$$f(h,r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

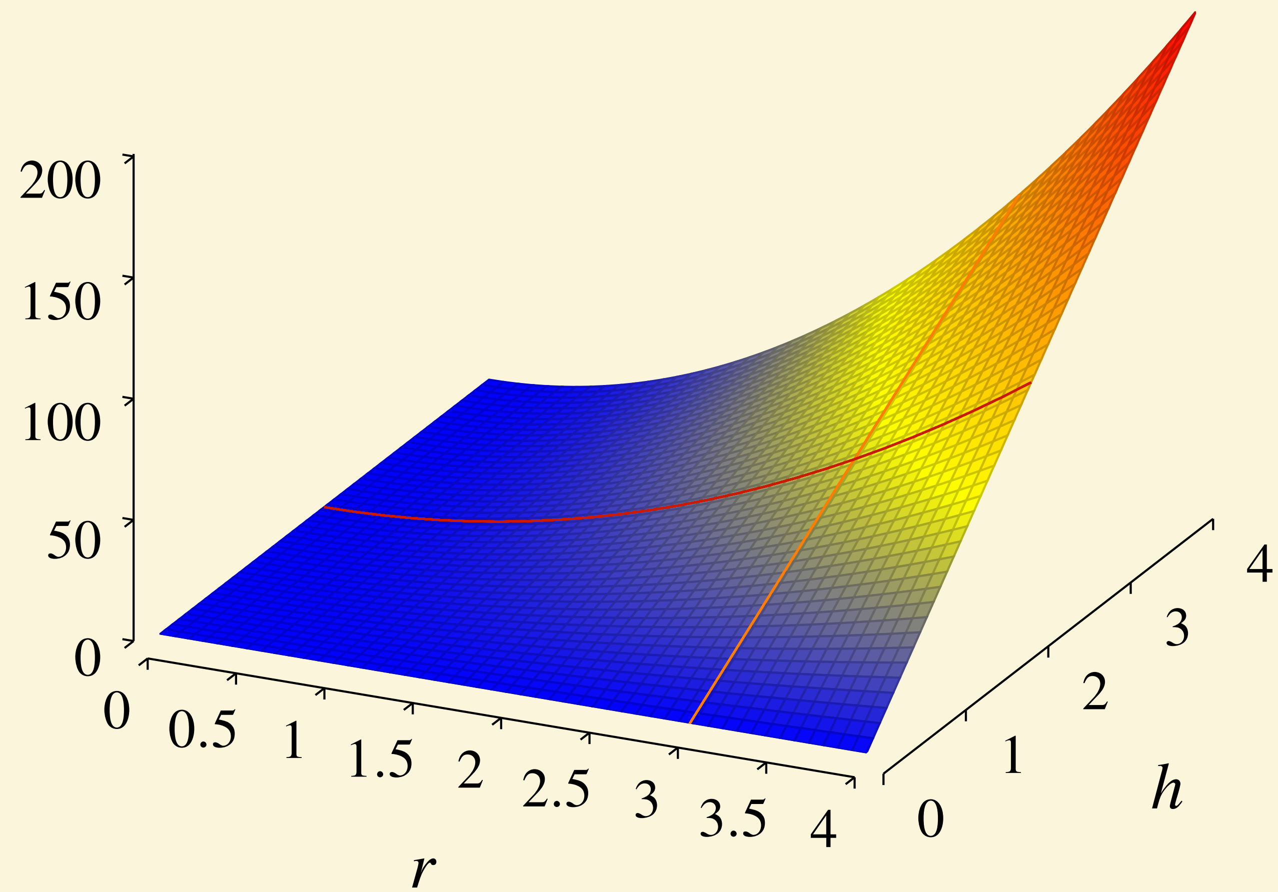
Snitkurve for

$$f(h,3) = \pi \cdot 3^2 \cdot h$$

og

$$f(2,r) = \pi \cdot r^2 \cdot 2$$

Snitkurver



Partielafledede

$$f'_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f'_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{h}$$

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y + x \cdot y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 6x + y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2 + x$$

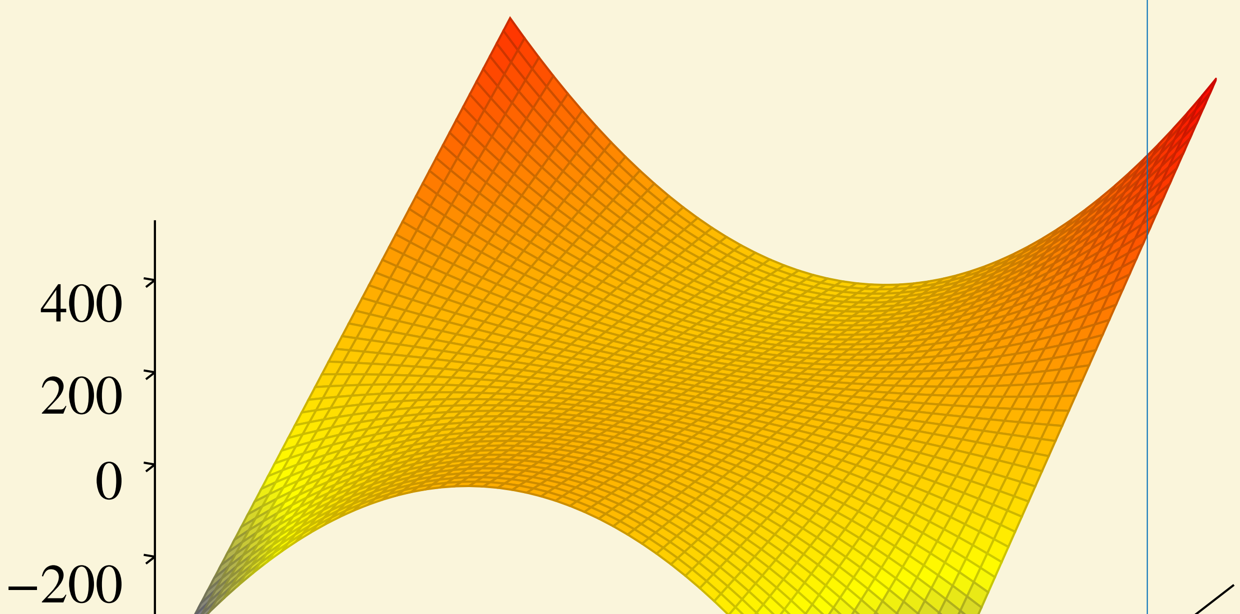
Gradienten

Gradienten for en funktion af to variable er en vektorfunktion. Gradienten er defineret som

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Gradienten i et punkt $P(a, b, f(a,b))$ står vinkelret på niveaukurven for funktionen $f(x,y) = f(a,b)$

$$f(x,y) = x^2y + 5xy + 2$$

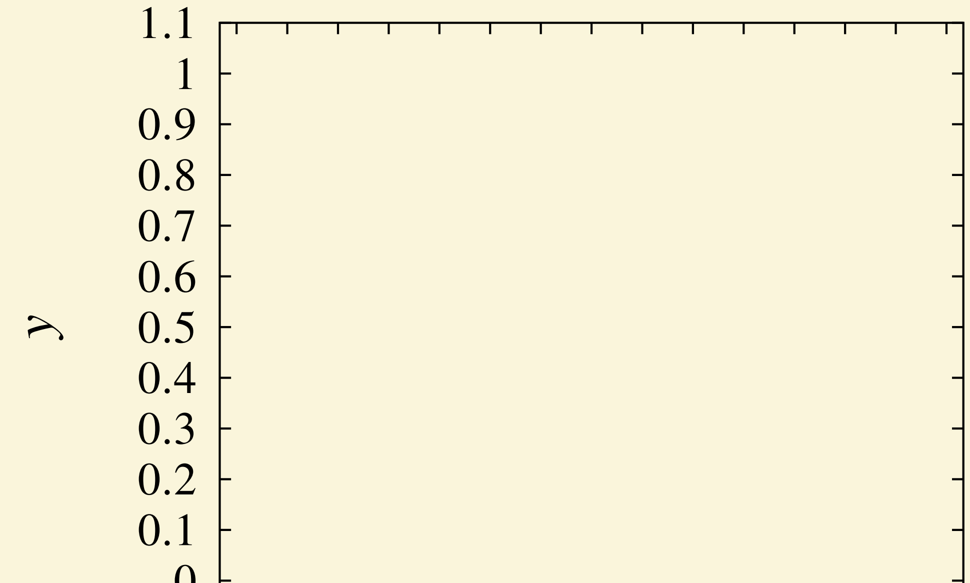


På figureren ses gradienten til punktet $P(-2,-1{,}8)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 5y \\ x^2 + 5x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2y + 5xy + 2$$



Stationære punkter

$P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ er et stationært punkt for f hvis gradienten er nulvektoren i dette punkt. For at udregne om det stationære punkt P er et maksimum, et minimum, et saddelpunkt eller ingen af delene bestemmes r, s og t.

$$\begin{aligned} r &= f''_{xx}(x_0,y_0) \\ s &= f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0) \\ t &= f''_{yy}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Derefter udregnes diskriminanten

$$D = r \cdot t - s^2$$

Hvis $D < 0$ er P et saddelpunkt. Hvis $D = 0$ er P inden af delene. Hvis $D > 0$ og $r > 0$ er det et lokalt minimum. Hvis $D > 0$ og $r < 0$ er det et lokalt maksimum.