Matematik i grundforløbet

Algebra og lineære funktioner

»Ingenting er bedre end evig lykke;
en pizza er bedre end ingenting
- ergo er en pizza bedre end evig lykke.«

matX
2018

Algebra og lineære funktioner - Matematik i grundforløbet

Bogen kan rekvireres hos:
matX ApS
Hvidovrevej 96
2650 Hvidovre
Email: dp@matx.dk
www.matx.dk

Tryk af LaserTryk A/S

2. udgave, 1. oplag

Udgivet af matX ApS

ISBN 978-87-93632-02-8

Forord

I denne bog, der er tænkt som indledende til stx, vil der være fokus på

- regningsarternes hierarki og simpel symbol behandling
- regning med potenser og parenteser
- procentregning, absolut og relativ ændring
- lineære funktioner repræsenteret ved deres grafiske forløb, regneforskrift, tabeller og sproglig beskrivelse
- ligningsløsning af førstegradsligninger med algebraiske og grafiske metoder
- opstilling af lineære modeller og principielle egenskaber ved matematiske modeller

Materialet er udviklet til at kunne gennemføres uden brug af matematiske værktøjsprogrammer, så eleverne har mulighed for at forstå principperne i de metoder der gennemgås. Men eleverne kan selvfølgelig supplere deres papir og blyant med et matematisk værktøjsprogram undervejs eller efter hvert forløb.

Materialet indeholder links til videoer på youtube.com der gennemgår eksempler eller beviser. Links er repræsenteret ved QR-koder i margin. QR-koderne er links i den elektroniske version, der kan aktiveres ved at klikke på dem.

Bogens hjemmeside matx.dk indeholder en pdf-version af denne bog. På yourskills.dk er det muligt at tilmelde sig holdet 'Grundforløb stx' med holdkoden Vsu9vJMu. Holdet er åbent for alle, der måtte være interesserede. På holdet er adgang til en interaktiv version af gundforløbsmaterialet inddelt i mål, hvortil der er tilknyttet opgaver. Opgaverne tester forståelsen af de faglige mål i grundforløbet. Det er også muligt for den enkelte lærer at oprette hold til deres egne elever, og derved følge elevernes faglige progression, via de faciliteter der er på yourskills.dk.

Indhold

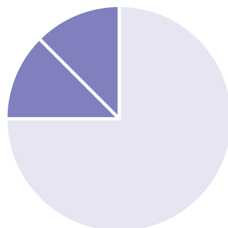
1

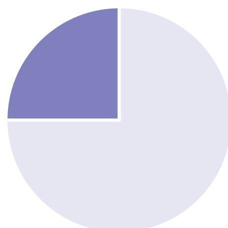
Tal

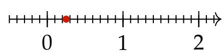
I forbindelse med behandling af matematiske problemer er det ofte en fordel at kunne udtrykke værdier på forskellige måder. Disse forskellige måder at udtrykke værdier på kaldes repræsentationer.

■ **Eksempel 1** Værdien »en fjerdedel« kan angives på forskellige måder.

- En brøk $\frac{1}{4}$ hvor 1 kaldes tælleren og 4 kaldes nævneren.
- Brøken $\frac{2}{8}$ har naturligvis samme værdi.
- Brøker kan opfattes som en division mellem to tal 1 delt med 4 eller 1:4 (Undgå venligst at bruge kolon som tegn på division eftersom det i nogle sammenhænge kan misforstås)
- Decimaltal 0,25.
- Som en procentdel: 25%. Ordet procent kommer fra latin og betyder »per hundrede«. Så der er tale om brøken $\frac{25}{100}$.
- Som en del af et cirkeldiagram.
- Som et punkt ● på en tallinje.

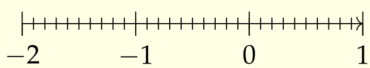




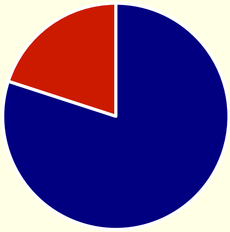


■

Øvelse 1 Afsæt tallene $\frac{3}{7}$, 0,7 og $-1{,}2$ på tallinjen.



Øvelse 2 Hvor stor en del af figuren er rød?

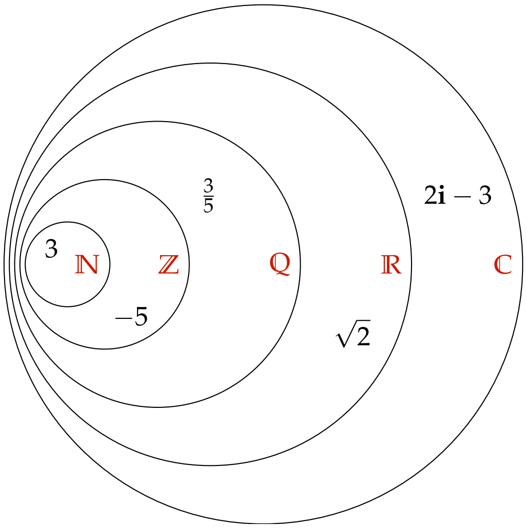


Øvelse 3 Omskriv $\dfrac{7}{20}$ til et procenttal.

Tal inddeles i typer. En type af tal er de ikke-negative heltal 1,2,3,4,..., disse tal kaldes for *de naturlige tal* og symbolet for disse tal er $\mathbb{N}$. Ud fra de naturlige tal kan fx -11 og -5 konstrueres ved at sætte $-$ (minus) foran tallet. På denne måde fås tallene $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Disse tal kaldes for *de hele tal* og symbolet for disse tal er $\mathbb{Z}$. Ud fra de hele tal kan fx $\frac{3}{6}$ og $\frac{7}{11}$ konstrueres. Tal af denne type hedder brøker og disse tal kaldes for *de rationale tal* og symbolet for disse tal er $\mathbb{Q}$. Ud fra de rationale tal kan *de reelle tal* konstrueres. Det er tal som fx $\sqrt{2}$ og π. Symbolet for de reelle tal er $\mathbb{R}$. Ud fra de reelle tal kan de komplekse tal konstrueres. Det er tal som $2 + 1\mathbf{i}$. Symbolet for de komplekse tal er $\mathbb{C}$. I stx arbejdes ikke med komplekse tal undtagen evt. i særligt forløb eller projekter, men IT-værktøjer regner med komplekse tal og kan derfor også give komplekse tal som svar, derfor er det godt at kende deres udseende. Alle naturlige tal er også heltal og alle heltal er også rationale tal og alle rationale tal er også reelle tal og alle reelle tal er også komplekse tal.

1.1 *Procenter*

Procent bruges i mange forskellige sammenhænge. Det bruges, når skatten skal beregnes, når butikker laver tilbud og når banker udregner renter. Ved folketingsvalg udregnes procenterne af stemmerne for at finde ud af hvilke partier, der skal have pladserne i



Figur 1.1: De forskellige talmængder, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$.

folketinget. Det bruges også når forskerne skal finde afvigelser fra teorien.

■ **Eksempel 2** Karen og Viktoria betaler begge 40 % i skat, men Karens indkomst er 300 000 kr og Viktorias er 400 000 kr. Karens skat er 40 % af 300 000 kr, som er

$$\frac{40}{100} \cdot 300\,000\,\text{kr} = 120\,000\,\text{kr}$$

mens Viktorias skat er 40% af 400 000 kr., som er

$$\frac{40}{100} \cdot 400\,000\,\text{kr} = 160\,000\,\text{kr}$$

Viktoria betaler mere i skat end Karen men de betale begge 40% af deres indkomst. ■

Video der viser hvordan procentandel af et tal beregnes.

Opgaver med bestemmelse af procentandel af tal.

Øvelse 4 Beregn procentdelen.

a) Bestem 15 % af 100.
b) Bestem 15 % af 400.
c) Bestem 20 % af 200.
d) Bestem 25 % af 60.
e) Bestem 35 % af 150.
f) Bestem 75 % af 300.

Øvelse 5 Ved telefoninterview er 1 200 personer blevet spurgt hvilket af tre telefonabonnementer de ville vælge

Abonnement	Pris	Procent
Fri tale + fri sms/mms	120 kr/md	25%
Fri tale + fri sms/mms + 10 G data	150 kr/md	10%
Fri tale + fri sms/mms + fri data	210 kr/md	65%

Bestem hvor mange der valgte hvert af de tre typer abonnementer.

Øvelse 6 Hvad er størst? 60 % af 25 eller 25 % af 60? Gælder dette forhold for alle procenttal og tal?

Video der forklarer beregning af en relativ ændring

Når et tal tillægges eller fratrækkes en given procent, som de to eksempler herunder, er der tale om en relativ ændring.

■ **Eksempel 3 — Relativ ændring.** Momsen på en vare er 25%. Det betyder at sælgeren skal lægge 25% til den pris hun tager for varen når hun sælger den. En bluse som hun vil sælge til 500 kr, skal der lægges 25% til. Først beregnes 25% af 500 kr.

$$\frac{25}{100} \cdot 500\,\mathrm{kr} = 125\,\mathrm{kr}$$

Dette beløb skal lægges til blusens pris når den sælges.

$$\frac{25}{100} \cdot 500\,\mathrm{kr} + 500\,\mathrm{kr} = 125\,\mathrm{kr} + 500\,\mathrm{kr} = 625\,\mathrm{kr}$$

Blusens pris med moms er derfor 625 kr. Momsen skal sælgeren give til staten. En anden måde at skrive det samme op på er:

$$500\,\mathrm{kr} \cdot (1 + 0{,}25) = 500\,\mathrm{kr} \cdot 1{,}25 = 625\,\mathrm{kr}$$

■

Øvelse 7 Beregn den nye pris. En vare til ...

a) 200 kr stiger med 25%. b) 20 kr stiger med 20%.

Øvelse 8 Et par jeans er sat ned fra 1 200 kr med 10 %, hvad koster jeans'ene nu?

■ Eksempel 4 — Relativ ændring. En mobiltelefon til 2 500 kr bliver sat ned med 10 %. Den nye pris beregnes ved først at beregne 10 % af 2 500 kr.

$$\frac{10}{100} \cdot 2\,500\,\text{kr} = 250\,\text{kr}$$

Dette beløb trækkes fra den oprindelige pris på 2 500 kr.

$$-\frac{10}{100} \cdot 2\,500\,\text{kr} + 2\,500\,\text{kr} = -250\,\text{kr} + 2\,500\,\text{kr} = 2\,250\,\text{kr}$$

En anden måde at skrive det samme op på

$$2\,500\,\text{kr} \cdot (1 - 0{,}1) = 2\,500\,\text{kr} \cdot 0{,}9 = 2\,250\,\text{kr}$$

Mobiltelefonens nye pris er 2 250 kr. ■

Opgaver med beregning af relativ ændring

Øvelse 9 Beregn den nye pris. En vare til ...

a) 25 kr falder med 10 %.
b) 300 kr falder med 5 %.
c) 200 kr falder med 20 %.
d) 65 kr falder med 25 %.
e) 75 kr falder med 15 %.
f) 850 kr falder med 40 %.

Øvelse 10 Hvad er 125% af 65? Hvad er 25% af 65 lagt til 65? Er det et tilfælde at det bliver det samme? Hvilken general regel kan udledes?

■ Eksempel 5 — Absolut ændring. En bluse sættes fra 600 kr ned med 200 kr. Den absolutte ændring er 200 kr. Den relative ændring er

$$\frac{200}{600} = 0{,}333... \approx 33\,\%$$

■

Video der forklarer hvordan en procentdel beregnes.

Øvelse 11 Et par pink jeans er sat ned fra 1 100 kr med 200 kr. Et par sorte jeans er sat ned fra 1 500 kr med 15%. Hvilket par jeans er sat mest ned?

■ **Eksempel 6 — Procentdel.** Ved valget til elevrådet stemte 60 af 400 elever på Dennis P. Dette omregnes til procent ved

$$\frac{60}{400} \cdot 100\,\% = 15\,\%$$

Dennis P. fik 15% af stemmerne. ■

Øvelse 12 Bestem 15 af 150 i procent.

Definition 1 — Procent ændring eller afvigelse. En slutværdi eller målt værdi afviger fra en startværdi eller tabelværdi med en procentværdi, der kan beregnes med formlen

$$\frac{\text{målt værdi} - \text{tabelværdi}}{\text{tabelværdi}} \cdot 100\%$$

eller

$$\frac{\text{slutværdi} - \text{startværdi}}{\text{startværdi}} \cdot 100\%$$

■ **Eksempel 7 — Procentafvigelse.** Carl har i et eksperiment bestemt at densiteten af en væske er 1,2 g/mL. I en tabel kan Carl se, at væsken har en densitet på 1,5 g/mL. For at udregne afvigelsen i procent gør Carl dette

$$\frac{1{,}2 - 1{,}5}{1{,}5} \cdot 100\% = \frac{-0{,}3}{1{,}5} \cdot 100\% = -20\%$$

Carl fik en afvigelse på -20%. Det negative fortegn viser, at Carls resultat er 20 % under tabelværdien. ■

Øvelse 13 Beregn den procentvise afvigelse.

a) I et forsøg er værdien 64 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 40. Bestem den procentvise afvigelse.

b) I et forsøg er værdien 114 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 120. Bestem den procentvise afvigelse.

Opgaver hvor procentdel skal beregnes.

Video der forklarer hvordan en procentafvigelse beregnes.

Opgaver hvor procentafvigelse skal beregnes.

c) et forsøg er værdien 450 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 375. Bestem den procentvise afvigelse.

d) I et forsøg er værdien 413 observeret og den tilsvarende tabelværdi er 350. Bestem den procentvise afvigelse.

1.2 *Regning med matematiske udtryk*

En af matematikhistoriens store opfindelser er at opskrive regneoperationer med symboler og bogstaver. Grunden til at regne med bogstaver, er for at komme frem til nogle generelle regler, som er rigtige for alle tal. På denne måde kan en masse udregninger undgås.

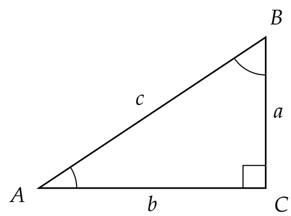
Eksempelvist kan Pythagoras' sætning for en retvinklet trekant beskrives med ord.

Sproglig beskrivelse: »Kvadratet af længden af hypotenusen, er lig med summen af kvadraterne af længderne af kateterne.«

Dette matematiske udsagn kan skrives kortere med symboler.

Symbolsk beskrivelse:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Figur 1.2: Retvinklet trekant

hvor c er hypotenusen i en retvinklet trekant og a og b er kateterne.

Fordelen ved at indføre ny notation i form af specielle symboler er, at det er muligt at nedskrive komplicerede matematiske udtryk på en meget kompakt måde. Omkostningen er at det ser mere abstrakt ud og de forskellige symboler skal være kendt for at det matematiske udtryk kan forstås.

■ **Eksempel 8** Følgende sproglige beskrivelse: »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y.« Kan oversættes til symboler

$$\underbrace{\text{Forholdet mellem } x \text{ og } y}_{\frac{x}{y}}\ \underbrace{\text{er}}_{=}\ \underbrace{\text{proportional med}}_{k\cdot}\ \underbrace{\text{differencen mellem } x \text{ og } y}_{(x-y)}$$

I symboler bliver det

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

x og y kan efterfølgende erstattes af virkelige størrelser fx vindhastighed og effekt. Så kommer »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y.« til at lyde »Forholdet mellem vindhastigheden og effekten er proportional med differencen mellem vindhastigheden og effekten.« Størrelserne skal derfor først identificeres og derefter kan modellen opstilles.

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

hvor x er vindhastigheden (i m/s) og y er effekten (i kW). ■

Øvelse 14 Omskriv følgende til matematiske symboler:

a) y er proportional med summen af x og z.

b) Summen af y og x er proportional med forholdet mellem x og y.

c) Differencen mellem x og y er proportional med kubikroden af y.

d) Forholdet mellem x og y er proportional med kvadratroden af produktet af x og y.

Øvelse 15 Giv en sproglig beskrivelse af følgende:

a) $x = k \cdot \sqrt{x}$.

b) $x^2 + y^2 = k \cdot y^2$.

c) $x = k \cdot \sqrt[3]{y}$.

d) $(x + y)^2 = k \cdot \sqrt[3]{x}$.

e) $x^2 + y^2 = k \cdot (x - y)$.

f) $\frac{x}{y} = k \cdot \sqrt{x + y}$.

g) $\frac{x}{y} = k \cdot x \cdot y$.

h) $y^2 = k \cdot y$.

Sprog	*Symboler*
proportional med	$k\cdot$
summen af	$x + y$
produktet af	$x \cdot y$
differencen mellem	$x - y$
forholdet mellem	$\frac{x}{y}$
er (ligmed)	$=$
kvadratet af	x^2
kvadratroden af	$\sqrt{x}$
i trejde	x^3
kubikroden af	$\sqrt[3]{x}$

Tabel 1.1: Sproglig beskrivelse og matematisk udtryk

1.2.1 *Regneartemes hierarki*

Udtrykkes matematik sprogligt, kan det give anledning til misforståelser, medmindre det udtrykkes præcist.

Hvad menes der eksempelvist med udsagnet:

Udregn 2 plus 3 gange 4.

Dette udsagn kan betyde:

Udregn først 2 plus 3 og gang derefter resultatet med 4, hvilket giver 20.

men det kan også betyde:

Udregn først 3 gange 4 og læg derefter dette tal til 2, hvilket giver 14.

Det giver to forskellige resultater hvorfor det er vigtigt, at vide hvordan det skal udregnes. For at vide, hvordan det skal udregnes, benyttes parenteser til at markere, hvad der skal udregnes først. Udtrykkene ovenfor bliver henholdsvis:

$$(2+3)\cdot 4 \text{ og } 2+(3\cdot 4)$$

Imidlertid er det vedtaget at multiplikation udføres før addition, sådan at $2+3\cdot 4$ betyder $2+(3\cdot 4)$. Først udføres potenser og kvadratrødder, dernæst gange og dividere. Til sidst kommer plus og minus. Man kalder dette for regnearternes hierarki.

1. Parenteser
2. Eksponenter
3. Potenser og rødder
4. Multiplikation og division
5. Addition og substraktion

Video med eksempler på beregninger med fokus på regnearternes hierarki.

Opgaver hvor der er fokus på regnearternes hierarki.

Eksempel 9

Øvelse 16 Udregn følgende udtryk

a) $5-4\cdot 3$

b) $3+11\cdot 2$

c) $4+3^2$

d) $6-3\cdot 2^3$

e) $(3-2)\cdot 4$

f) $(4+1)^2\cdot 3$

g) $(9+2)\cdot(3-4)$

h) $\frac{3}{4}+5\cdot 8$

Operationen at lægge to tal sammen kaldes addition. Symbolet for en addition er + (plus). Fx

$$4+2$$

De to tal, der adderes kaldes *led* , symbolet kaldes en operator.

$$\underbrace{4}_{\text{led}} \overbrace{+}^{\text{plus operator}} \underbrace{2}_{\text{led}}$$

Ved en addition fås et resultat der kaldes en sum. For at vise at der er tale om et resultat skrives = (lighedstegn). Fx

$$\underbrace{4}_{\text{led}} \overbrace{+}^{\text{plus operator}} \underbrace{2}_{\text{led}} = \underbrace{6}_{\text{sum}}$$

En anden operation er multiplikation eller at gange som det også kaldes. Ved en multiplikation af to tal eller bogstaver skrives $\cdot$ (gange) mellem de to tal eller bogstaver, som multipliceres. Fx $4 \cdot 3$ betyder 4 gange 3 og 4 og 3 kaldes for faktorer. Resultatet af en multiplikation kaldes et produkt. Fx

$$\underbrace{4}_{\text{faktor}} \overbrace{\cdot}^{\text{gange operator}} \underbrace{3}_{\text{faktor}} = \overbrace{12}^{\text{produkt}}$$

Addition og multiplikation kan også kombineres.

$$\underbrace{a}_{\text{led}} \overbrace{+}^{\text{plus operator}} \overbrace{\underbrace{4}_{\text{faktor}} \overbrace{\cdot}^{\text{gange operator}} \underbrace{b}_{\text{faktor}}}^{\text{led}} = \overbrace{a+4b}^{\text{sum}}$$

Der er tre faktorer og to led i dette udtryk

$$3 \cdot e \cdot y + 6$$

De tre faktorer er 3, e og y og de to led er $3 \cdot e \cdot y$ og 6. Ofte undlades $\cdot$ hvis det er tydeligt, at der skal være $\cdot$. Fx vil der i stedet for at skrive $3 \cdot e \cdot y$ skrives $3ey$, men hvis der stod der $3 \cdot 4$ kan der ikke skrives 34, fordi det ville betyde fireogtredive og ikke tre gange fire.

Der kan også regnes med bogstaver.

$$a + a = 2a \qquad a - a = 0 \qquad a \cdot a = a^2 \qquad \frac{a}{a} = 1$$

Her er nogle flere, de er lidt mere komplicerede:

$$a+b+a=2a+b \qquad a-b+2b=a+b \qquad a\cdot b\cdot a=a^2b$$

Her kombineres plus og gange

$$a+(b\cdot c)=a+bc \qquad a\cdot(b+c)=ab+ac \qquad b\cdot(a+b+c)=ab+b^2+bc$$

Her kombineres alle regnearterne

$$\frac{a\cdot(b+c)}{a}=b+c \qquad \frac{ac+bc}{b}=\frac{ac}{b}+c \qquad \frac{ac+bc}{c}=a+b$$

1.2.2 *Potenser*

Udregninger skal skrives på den mest simple måde og derfor indføres en måde som beskriver det samme tal ganget med sig selv fx

$$3\cdot3\cdot3\cdot3=3^4$$

og det udtales 'tre i fjerde' eller 'tre opløftet i fjerde'. En potens af et negativt tal fx

$$(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=25$$

og den negative værdi af potensen af et tal fx

$$-5^2=-(5\cdot5)=-25$$

er to forskellige ting.

Regneregler for potenser. Hvor x og y er forskellige fra 0.

$$\begin{aligned}
x^s\cdot x^t &= x^{s+t}\\
\frac{x^s}{x^t} &= x^{s-t}\\
(x^s)^t &= x^{s\cdot t}\\
(x\cdot y)^s &= x^s\cdot y^s\\
\left(\frac{x}{y}\right)^s &= \frac{x^s}{y^s}\\
x^0 &= 1\\
x^{-s} &= \frac{1}{x^s}\\
\sqrt[s]{x} &= x^{\frac{1}{s}}\text{ , hvor } x>0\\
\sqrt[s]{x^t} &= x^{\frac{t}{s}}\text{ , hvor } x>0
\end{aligned}$$

■ **Eksempel 10** Følgende udtryk

$$x^3\cdot x^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $x^s\cdot x^t=x^{s+t}$, så fås at

$$x^3\cdot x^6=x^{3+6}=x^9$$

■

■ **Eksempel 11** Følgende udtryk

$$\left(x^3\right)^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $(x^s)^t=x^{s\cdot t}$, så fås at

$$\left(x^3\right)^6=x^{3\cdot6}=x^{18}$$

■

Øvelse 17 Reducer følgende udtryk. Antag at x, y og a ikke er 0.

a) $\dfrac{x^5}{x^3}$	b) $x^3 \cdot x^2$	c) $\left(x^2\right)^6$
d) $\dfrac{x^2}{x^7}$	e) $x^4 \cdot x^{-4}$	f) $\left(x^3\right)^0$

■ **Eksempel 12** Følgende udtryk

$$\frac{x^3}{x^6}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\dfrac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$, så fås at

$$\frac{x^3}{x^6} = x^{3-6} = x^{-3}$$

Som ifølge reglen $x^{-s} = \dfrac{1}{x^s}$ er lig

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

■

Video med eksempler på beregninger med fokus på potenser.

Ofte forventes det at mere komplicerede udtryk kan overskues.

■ **Eksempel 13** Følgende udtryk

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\dfrac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$ to gange, først på faktorerne indeholende x og derefter på faktorerne indeholdene y. Når reglen anvendes på x fås, at

$$\frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$$

og når den anvendes på y fås, at

$$\frac{y^4}{y} = y^{4-1} = y^3$$

Bemærk at $y = y^1$. Og disse to resultater kan så sættes sammen.

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y} = x^3 \cdot y^3$$

Dette kan reduceres yderligere ved brug af reglen $(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$.

$$x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$$

■

■ **Eksempel 14** Følgende udtryk

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\sqrt[s]{x^t} = x^{\frac{t}{s}}$ på $\sqrt[8]{x^2}$, hvormed fås at $\sqrt[8]{x^2} = x^{\frac{2}{8}}$. Det betyder at

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3} = x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3}$$

reglen $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$ anvendes på alle tre faktorer,

$$x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3} = x^{5+\frac{2}{8}+(-3)}$$

Og da $5 + \dfrac{2}{8} + (-3) = 2 + \dfrac{2}{8} = \dfrac{16}{8} + \dfrac{2}{8} = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$ fås, at

$$x^{5+\frac{2}{8}+(-3)} = x^{\frac{9}{4}}$$

■

Øvelse 18 Reducer følgende udtryk. Antag at x, y og a ikke er 0.

a) $\dfrac{x^4}{x^2}$

b) $\dfrac{x^2}{x^4}$

c) $\dfrac{x^2 \cdot y^4}{x^2 \cdot y^2}$

d) $\dfrac{x^2 \cdot x \cdot y^2}{x^3 \cdot y^3}$

e) $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^{10}}$, hvor $x > 0$

f) $a^2 \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot a^{-5}$, hvor $x > 0$

1.2.3 Parenteser

Hvis et tal eller bogstav skal ganges ind i en parentes, skal tallet eller bogstavet ganges med hvert led i parentesen fx

$$5 \cdot (3 + c - a) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot c - 5 \cdot a$$

dette kan reduceres til

$$15 + 5c - 5a$$

Øvelse 19 Udregn følgende udtryk

a) $a + a + a$

b) $ab - a \cdot b + a$

c) $\frac{a^2}{a}$

d) $a \cdot (b + c) - ab$

e) $\frac{a}{a^2}$

f) $\frac{ab - ac + ad}{a} + c$

g) $a \cdot (a + a)$

h) $(a + b) \cdot c - (c + b) \cdot a$

Er der to parenteser, som skal ganges ind i hinanden (parenteserne ganges ud) skal hvert led i den ene ganges med hvert led i den anden fx

$$\begin{aligned}
(x + y + z) \cdot (a + b + c) &= (x + y + z) \cdot a + (x + y + z) \cdot b + \\
&\quad (x + y + z) \cdot c \\
&= xa + ya + za + xb + yb + zb + \\
&\quad xc + yc + zc
\end{aligned}$$

Her er en tabel med eksempler på typiske udregninger.

Regel	**Eksempel**
$a + ba = (b + 1)a$	$a + 4a = (1 + 4)a$
$ca + ba = (b + c)a$	$2a - 4a = (2 - 4)a$
$\frac{a}{b} \cdot b = a$	$\frac{4}{7} \cdot 7 = 4$
$a(b + c) = ab + ac$	$3(b + c) = 3b + 3c$

Video med reducering af udtryk.

■ **Eksempel 15** Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden) $(2x + 4) \cdot (3y + z)$.

$$\begin{aligned}
(2x + 4) \cdot (3y + z) &= (2x + 4) \cdot 3y + (2x + 4) \cdot z \\
&= 2x \cdot 3y + 4 \cdot 3y + 2x \cdot z + 4 \cdot z
\end{aligned}$$

■

■ **Eksempel 16** Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden) $(2x + y)^2 \cdot (5 + z)$.

Først omskrives $(2x+y)^2$ til $(4x^2+y^2+4xy)$, nu ses at der er to parenteser og ingen potenser

$$(4x^2+y^2+4xy)\cdot(5+z)$$

nu kan det ganges ud.

$$\begin{aligned}(4x^2+y^2+4xy)\cdot(5+z) &= (4x^2+y^2+4xy)\cdot 5+\\ &\ (4x^2+y^2+4xy)\cdot z\\ &= 4x^2\cdot 5+y^2\cdot 5+4xy\cdot 5+\\ &\ 4x^2\cdot z+y^2\cdot z+4xy\cdot z\\ &= 20x^2+5y^2+20xy+4x^2z+y^2z+4xyz\end{aligned}$$

■

Video med eksempler på at gange parenteser ud.

Øvelse 20 Gang følgende parenteser ud.

a) $(x+y)\cdot(x+y)$

b) $(x+y)\cdot(2x+y)$

c) $(x+2)\cdot(2+y)$

d) $(5x+4y)\cdot(2x+3y)$

e) $(x-y)\cdot(x+y)$

f) $(x-3y)\cdot(x+y)$

g) $(x-y)\cdot(x+y)\cdot(z+5)$

h) $(3x+5y+3)\cdot(2x+4)$

At sættes udenfor parentes betyder, at en faktor som flere led har tilfældes, kan placeres udenfor en parentes. Det kaldes derfor også for faktorisering.

■ **Eksempel 17** Faktoriser følgende udtryk.

$$2x+5xy$$

begge led indeholder x derfor kan det sættes udenfor parentes

$$2x+5xy=x\cdot(2+5y)$$

bemærk at x er fjernet fra begge led. ■

Øvelse 21 Faktoriser følgende udtryk.

a) $3x + 4xy$

b) $2x + 6xy$

c) $3x^2 + 6xy$

d) $4a + 6b + 8c$

e) $3a + 6ba^2$

f) $3xy^2 - 9xy$

g) $14x^4y^3 - 21x^3y^4$

h) $xy + 3x + 3y + 9$

1.2.4 *Kvadratsætninger*

Meget ofte skal udtryk på formen $(x+3)^2$ (kvadratet af et toleddet udtryk), og derfor er der følgende nyttige sætninger.

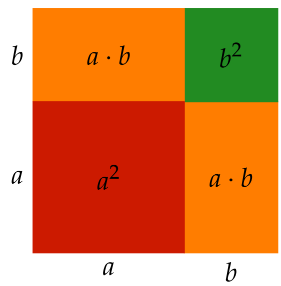
Sætning 1 — Kvadratsætningerne.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab && (1.1)\\
(a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab && (1.2)\\
(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 && (1.3)
\end{aligned}
$$

For at vise, at dette er sandt, skal udregningen af $(a+b)^2$ og de andre to udtryk, gennemføres. Dette kaldes et bevis.

■ **Bevis** Sætningerne kan vises ved algebraisk udregning eller det kan ses som arealer

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\
&= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b\\
&= a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b\\
&= a^2 + b^2 + 2ab
\end{aligned}
$$



$a^2 + b^2 + 2ab$

■

■ **Eksempel 18** Udregn følgende: $(5+3)\cdot(5+3)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser, er det den første kvadratsætning. Sætningen siger så at:

$$(5+3)^2 = (5+3)\cdot(5+3) = 5^2+3^2+2\cdot5\cdot3 = 25+9+30 = 64$$

■

Meget ofte regnes ikke med tal, men med bogstaver. Derfor kommer der her et eksempel med bogstaver.

■ **Eksempel 19** Udregn følgende: $(x+y)\cdot(x+y)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser er det den første kvadratsætning. Sætningen siger at:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2+y^2+2\cdot x\cdot y$$

Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere.
■

■ **Eksempel 20** Udregn følgende: $(2x+y)\cdot(2x-y)$. Først bestemmes hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i den en parentes og - i den anden parentes, er det den tredje kvadratsætning. Sætningen siger, at:

$$\begin{aligned}(2x+y)\cdot(2x-y) &= (2x)^2-y^2\\ &= 4x^2-y^2\end{aligned}$$

I udregningen er potensregnereglen $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ brugt på $(2x)^2 = 2^2\cdot x^2 = 4x^2$. Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere. ■

Video med eksempler på reducering af udtryk ved brug af parentesregler og kvadratsætninger.

Øvelse 22 Gang følgende udtryk ved brug af kvadratsætningerne

a) $(t+r)^2$

b) $(t-r)\cdot(t+r)$

c) $(2x-r)\cdot(2x-r)$

d) $(x+4y)\cdot(x+4y)$

e) $-(t+r)^2$

f) $-(t-r)^2$

Øvelse 23 Gang følgende udtryk ved brug af kvadratsætningerne

a) $(3x-5y)^2$	b) $(3x+5y)^2$
c) $(3t+r)\cdot(3t+r)$	d) $-(t-4r)\cdot(t+4r)$
e) $(3x-3r)\cdot(3x-3r)$	f) $(2x-r^2)\cdot(2x-r^2)$
g) $(x+3)\cdot(x+3)$	h) $(x+2)\cdot(x-4)$

Nu har vi set på hvad et bevis er, og hvad man kan bruge en sætning til, nu skal vi arbejde videre med nogle flere grundlæggende sætninger og deres anvendelser.

1.2.5 *Brøker*

En brøk består af to dele - en tæller og en nævner, meget ofte skrives det således

$$\frac{\text{tæller}}{\text{nævner}}$$

Der skrives altså tælleren øverst og nævneren nederst, fx

$$\frac{12a}{3ab}$$

Her er $12a$ tælleren og $3ab$ er nævneren.

En brøk fx $\frac{4}{3}$ betyder fire tredjedele

Et helt tal, fx 3 kan skrives som en brøk

$$3 = \frac{3}{1}$$

På denne måde kan brøkregneregler også bruges når hele tal og brøker skal lægges sammen, trækkes fra, ganges med eller divideres med hinanden.

Brøkregneregler

$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d}$	Addition og substraktion	(A)
$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	Multiplikation	(B)
$\frac{a}{d} / \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c}{d \cdot b}$	Division	(C)
$\frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$	Forlæng og forkort	(D)

En brøk kan forkortes, hvilket betyder at tæller og nævner divideres med samme tal eller bogstav. Fx kan følgende brøk forkortes med a

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{12}{3b}$$

En brøk kan forlænges med et tal eller et bogstav, hvilket betyder, at både tæller og nævner ganges med tallet eller bogstavet. Fx forlænges her med 4:

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{4 \cdot 12a}{4 \cdot 3ab} = \frac{48a}{12ab}$$

Øvelse 24 Angiv brøken »tre femtedele« i forskellige repræsentationer.

Regning med brøker er en øvelse i at bruge simple matematiske formler. I eksemplerne er der skrevet (A), (B), (C) eller (D) under de lighedstegn, hvor den pågældende brøkregneregel er brugt.

■ **Eksempel 21 — Multiplikation mellem heltal og brøk.**

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} \underset{(B)}{=} \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$$

■

■ **Eksempel 22 — Multiplikation mellem to brøker.**

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

■

Øvelse 25 Udregn

a) $4 \cdot \frac{3}{2}$ b) $a \cdot \frac{2b}{5a}$ c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}$ d) $\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{2x}$

Video med gennemregning af eksempler på udregninger med brøker.

■ **Eksempel 23 — Heltal divideret med brøk.**

$$3/\frac{2}{5} = \frac{3}{1}/\frac{2}{5} \underset{(C)}{=} \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{15}{2}$$

■

■ **Eksempel 24 — Brøk divideret med brøk.**

$$\frac{2}{5}/\frac{4}{3} \underset{(C)}{=} \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

■

■ **Eksempel 25 — Brøk divideret med heltal.**

$$\frac{2}{5}/3 = \frac{2}{5}/\frac{3}{1} \underset{(C)}{=} \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

■

Øvelse 26 Udregn

a) $4/\frac{3}{7}$ b) $2a/\frac{3a}{4b}$ c) $\frac{8}{3}/\frac{12}{9}$

d) $\frac{8a}{3b}/\frac{4a}{b}$ e) $\frac{10}{3}/5$ f) $\frac{a^2}{b}/(a \cdot b) \cdot b$

■ **Eksempel 26 — Summen af to brøker.**

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{2} \underset{(A)}{=} \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{8 + 15}{6} = \frac{23}{6}$$

■

Øvelse 27 Udregn

a) $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$ b) $\frac{a}{a} + \frac{b}{b}$ c) $\frac{7}{3} + \frac{2}{5}$ d) $\frac{3x}{y} + \frac{2y}{6x}$

Øvelse 28 Regn følgende opgaver ved brug af regneregler for brøker

a) $\dfrac{2\cdot 3}{2\cdot 4}$ b) $\dfrac{2\cdot x}{2\cdot y}$ c) $\dfrac{a\cdot 3}{a\cdot 4}$ d) $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{3}{y}$ f) $\dfrac{b}{c}+\dfrac{x}{c}$ g) $\dfrac{b}{c}/\dfrac{x}{a}$ h) $\dfrac{b}{c}+\dfrac{x}{a}$

Øvelse 29 Bestem en enklere regel for summen af to brøker med samme nævner.

I nogle tilfælde skal tæller og/eller nævner faktoriseres inden brøken kan forkortes.

■ Eksempel 27

$$\frac{20x+15}{5}=\frac{5\cdot(4x+3)}{5}=4x+3$$

■

Øvelse 30 Forkort følgende brøker.

a) $\dfrac{15x+6}{3}$ b) $\dfrac{6x+18}{2}$ c) $\dfrac{3x-15}{x-5}$ d) $\dfrac{9x+6}{12x+8}$

1.3 *Overslagsregning*

Ved at afrunde tallene i en udregning fås et overslag på facit. Det kan være nyttigt til at tjekke resultaterne fra ens værktøjsprogram. Skal man eksempelvist regne $3{,}7\cdot 7{,}15$ ud, kan man få et overslag over resultatet ved at afrunde før man ganger:

$$3{,}7\cdot 7{,}15\approx 4\cdot 7=28$$

Overslaget fortæller altså at produktet er cirka 28.

Rundes begge faktorer op, kan man finde en øvre grænse for produktet.

$$3{,}7\cdot 7{,}15<4\cdot 8=32$$

Det betyder at produktet er under 32. Rundes begge faktorer ned fås en nedre grænse for produktet.

$$3{,}7\cdot 7{,}15>3\cdot 7=21$$

Produktet af 3,7 og 7,15 ligger i intervallet [21,32].

Et overslag for en brøk gøres ved at afrunde tæller og nævner, sådan at tæller går op i nævner

$$\frac{276}{34} \approx \frac{270}{30} = \frac{27}{3} = 9$$

Ved nedrunding af negative tal bliver fx $-4{,}1$ nedrundet til -5 og rundet op til -4, så den nedre grænse for

$$51{,}2 - 4{,}1 \overset{\text{rund ned}}{=} 51 - 5 = 46$$

Øvelse 31 Benyt overslagsregning til at finde en øvre og en nedre grænse for følgende

a) $3{,}1 \cdot 3{,}6$

b) $3{,}1 + 3{,}6$

c) $54{,}5 + 21{,}4$

d) $54{,}5 - 3{,}4$

e) $\frac{23}{3}$

f) $\frac{325}{6}$

Øvelse 32 Benyt overslagsregning til at finde en øvre og en nedre grænse for tallet $\sqrt{34}$.

Øvelse 33 Benyt overslagsregning til at bestemme om en ligning har en løsning i et givet interval.

a) Benyt overslagsregning til at afgøre om ligningen $7x - 3 = 0$ har en løsning der ligger i intervallet $[0,1]$.

b) Benyt overslagsregning til at afgøre om ligningen $x^2 - 5x + 5{,}25 = 0$ har to løsninger der ligger i intervallet $[1,4]$.

1.4 *Eksponentiel notation*

Store tal navngives ved hjælp af de latinske navne for tal (bi betyder 2, tri betyder 3, quad 4 osv. . .). På dansk skifter man mellem –ion og –iard (million, milliard, billion, billiard, trillion, trilliard, quadrillion osv..). På engelsk benyttes (million, billion, trillion, quadrillion, quintillion, sextillion and so on. . .). Så en milliard danske kroner er på engelsk ”a billion danish crowns”. Tallet 10^{100}

går i øvrigt under navnet Googol, hvilket firmaet Google er opkaldt efter.

Når tal er meget store, at det er upraktisk at opskrive alle cifrene. Derfor benyttes ofte en særlig repræsentation, hvor 10'er potenser benyttes til at angive hvor mange cifre der er i et tal.

■ **Eksempel 28 — Jordens vægt.** Jorden vejer 5 977 000 000 000 000 000 000 000 kg eller ca. 6 millioner milliarder milliarder kg eller 6 quadrillioner kg. Der er 24 cifre efter 5-tallet, det betyder at Jordens vægt kan skrives som 5,977 ganget med firetyve 10-taller:

$$5\,977\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5{,}977 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{24} = 5{,}977 \cdot 10^{24}$$

■

Nogle computerprogrammer anvender notationen $5{,}977E24$ og ikke $5{,}977 \cdot 10^{24}$. E er en forkortelse af »exponential«.

Definition 2 — Eksponentiel notation. Et tal siges at være skrevet i eksponentiel notation, hvis det står på formen $a \cdot 10^b$, hvor $1 \leq a < 10$ og b er et helt tal.

Øvelse 34 Antallet af Googlesøgninger i 2012 var 1 216 373 500 000. Omskriv dette tal til eksponentiel notation. Nedskriv også tallets navn skrevet på henholdsvis dansk og engelsk.

■ **Eksempel 29 — Overslagsregning.** Eksponentiel notation er idéel til overslagsregning. Planeten Jupiter vejer $1{,}8997 \cdot 10^27$ kg. Hvor mange gange tungere er Jupiter end Jorden? Det ses at Jupiters vægt har 3 cifre mere end Jordens vægt 24 i forhold til 27. Overslagsregning giver derfor, at Jupiter er ca. 1000 gange tungere end Jorden. Lidt mere præcist bliver det ved at opskrive det som en division og runde af undervejs.

$$\frac{5{,}977 \cdot 10^{24}}{1{,}8997 \cdot 10^{27}} = \frac{5{,}977}{1{,}8997 \cdot 10^{3}} \approx \frac{6}{2 \cdot 10^{3}} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Så Jorden vejer altså ca. 0,003 gange vægten af Jupiter. ■

Negative 10'er-potenser benyttes til at skrive meget små tal. At gange et tal med 10^{-1} er det samme som at dividere med 10, og når et tal divideres med 10 rykkes kommaet en plads til venstre.

■ **Eksempel 30 — Molekyler.** Et mol er $6{,}022\,141 \cdot 10^{23}$ molekyler. Et mol vandmolekyler vejer 18,01528 gram. Det betyder at ét vandmolekyles vægt er

$$\frac{18{,}01528}{6{,}022\,141 \cdot 10^{23}} \approx \frac{18}{6 \cdot 10^{23}} = 3 \cdot 10^{-23}$$

Der er 23 nuller foran 3-tallet 0,000 000 000 000 000 000 000 03 g.
■

Koncentrationen af CO_2 i atmosfæren angives i ppm, der er en forkortelse af parts-per-million. På dansk ville vi sige »ud af én million«. Koncentrationen af CO_2 i atmosfæren er ca 400 ppm. Det betyder at

$$\frac{400}{1\,000\,000} = \frac{4 \cdot 10^{2}}{1 \cdot 10^{6}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

andel af molekylerne i luften er CO_2.

Øvelse 35 Et lille virus er 0,000 000 020 meter langt. Omskriv længden til eksponentiel notation.

Øvelse 36 Benyt overslagsregning til at undersøge hvor mange vandmolekyler der er i 1 kg vand?

2
Lineære funktioner

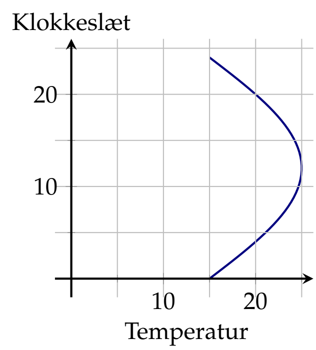
2.1 *Sammenhænge og funktioner*

Videnskabsfolk, politikkere og helt almindelige mennesker er ofte interesseret i sammenhænge. Eksempelvis: Hvad er sammenhængen mellem mængden af CO_2(g) i atmosfæren og den globale middeltemperatur? Er der en sammenhæng mellem hvor meget cola man drikker og risikoen for sukkersyge? Man kan ofte benytte matematik til at beskrive sådanne sammenhænge præcist.

I matematik benytter vi begrebet variabel om størrelser der kan have forskellige værdier. Man giver som regel en variabel et navn i form af et bogstav. Et eksempel på en variabel kan være vindhastighed. Det kan man vælge at betegne med bogstavet x eller med h, eftersom der er tale om en hastighed.

En variabel fx y kan afhænge af en anden variabel h. Eksempelvist afhænger effekten af en vindmølle af vindhastigheden. Så kan man kalde effekten y for den afhængige variabel og vindhastigheden h for den uafhængige variabel. Man siger også at effekten y er en funktion af vindhastigheden h. Matematisk defineres en funktion på følgende måde:

Definition 3 — Funktion. En variabel y er en funktion af en anden variabel x, hvis der til hver x-værdi hører en bestemt y-værdi. Denne værdi kaldes funktionsværdien og man skriver $y = f(x)$. $f(x)$ udtales »f af x«.



Figur 2.1: Graf for temperatur og klokkeslæt.

Der må altså ikke være flere forskellige y-værdier der hører til samme x-værdi. Eksempelvist kan man ikke sige, at tidspunktet på dagen er en funktion af temperaturen eftersom flere tidspunkter kan have den samme temperatur.

En lineær sammenhæng mellem en afhængig variabel y og en uafhængig variabel x der kan skrives på formen

$$y = a \cdot x + b$$

hvor a og b er tal, er en lineære funktion hvor $y = f(x)$. Derfor kan den også skrives

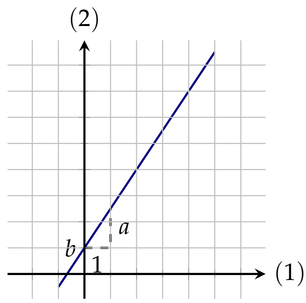
$$f(x) = a \cdot x + b$$

Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret. Alle rette linjer der ikke er lodrette er graf for en lineær funktion.

Når x vokser med 1, vokser $f(x) = ax + b$ med a og konstanten b er grafens skæringspunkt med 2.-aksen.

Som med tal kan funktioner repræsenteres på flere forskellige måder, der alle kan være nyttige afhængige af situationen. Det er derfor vigtigt at kunne beherske alle repræsentationer og oversætte imellem dem. Her vil vi bruge disse fire repræsentationer for funktioner

- Sproglig
- Symbolsk (formel)
- Tabel
- Grafisk

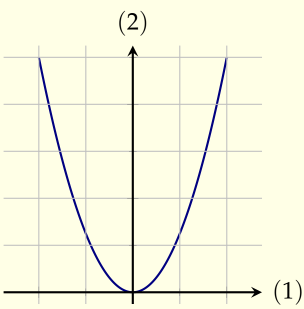


Figur 2.2: Graf for en lineær funktion $f(x) = ax + b$.

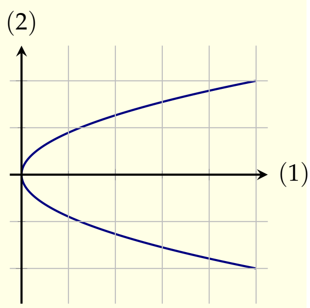
Video der forklarer sammenhængen mellem grafen og konstanterne.

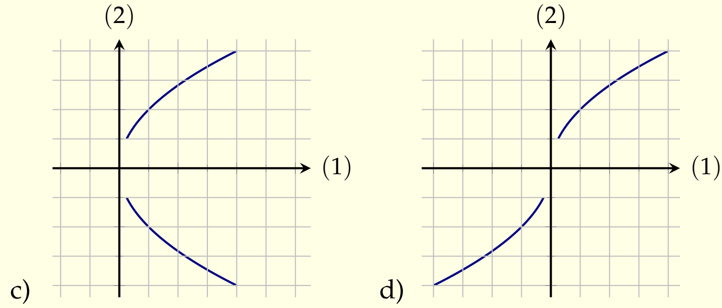
Øvelse 37 Afgør om følgende er grafen for en funktion.

a)



b)





2.2 *Transformation mellem repræsentationer*

2.2.1 *Sproglig og symbolsk beskrivelse*

Kronetaxa tager 20 kr pr. kørt km, og desuden opkræves et startgebyr på 25 kr. Den samlede pris afhænger af det kørte antal kilometer.

Hvis man kører 1 km koster det i alt $25\,\text{kr} + 20\,\text{kr} = 45\,\text{kr}$ Efter $2\,\text{km}$ koster det $25\,\text{kr} + 2 \cdot 20\,\text{kr}$. Hvis man kalder det kørte antal kilometer for x og den samlede pris kaldes for y, kan man skrive en formel op for sammenhængen mellem x og y.

$$y = 25 + x \cdot 20$$

Denne ligning rummer den samme information om sammenhængen mellem pris og antal kørte kilometer som den sproglige beskrivelse. Det er bare en anden måde at repræsentere denne sammenhæng på, som kan være smartere til nogle formål.

Video med eksempler på opstilling af formler ud fra en sproglig beskrivelse.

Ofte benyttes en speciel notation når formlen for en funktion angives. I stedet for y skrives $f(x)$. Sådan at formlen kan skrives:

$$f(x) = 25 + x \cdot 20$$

Udtrykket

$$25 + x \cdot 20$$

kaldes også for forskriften for funktionen $f(x)$. Fordelen ved denne måde at skrive på er, at nogle udregninger kan skrives op på en kort måde. Eksempelvist ses det ovenfor, at hvis $x = 1$ er $y = 45$. Med den nye notation kan dette skrives $f(1) = 45$. Det er vigtigt at bemærke, at parenteserne ikke har samme betydning som parenteserne i et almindeligt matematisk udtryk. $f(1)$ betyder altså ikke $f \cdot 1$, men simpelthen y-værdien, når x er 1.

Øvelse 38 Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver den sammenhæng eller udvikling som beskrives.

a) I 2006 kostede ét kilogram kartofler i gennemsnit 5,50 kr, siden er prisen steget med 1,20 kr. pr. år.

b) I perioden 2001-2009 steg eksporten af grise med 0,4 mio. stk. pr. år. I 2001 var eksporten af grise 5,5 mio. stk.

c) Først gang Dennis P. løb 5 km tog det 45 min. For hver gang han løb forbedre han sin tid med 2 min.

d) Antallet af rygere i Danmark faldt i 2004 med 55 000. I 2004 var der ca. 900 000 rygere i Danmark. Antag at antallet af rygere falder med 55 000 årligt.

e) En bil køre med 45 km/t og den har kørt 230 km.

■ **Eksempel 31 — Fra formel til sproglig beskrivelse.** Sammenhængen mellem masse af en beholder med væske og volumen af væsken i beholderen beskrives med følgende funktion

$$m(v) = 0{,}84 \cdot v + 240$$

hvor $m(v)$ er massen af beholderen og væsken i gram og v er volumen i mL af væsken i beholderen.

Konstanterne i modellen kan bruges til at beskrive væsken og beholderen: »En beholder der vejer 240 g indeholder en væske med en densitet på 0,84 g/mL.« ■

Video med beskrivelse af fortolkning af konstanterne af modellen. (Fra formel til sproglig beskrivelse

Øvelse 39 Omskriv følgende modeller til en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

a) Hastigheden af en bil der accelererer kan beskrives med funktionen $h(t) = 1{,}2 \cdot t + 35$, hvor $h(t)$ er hastigheden i km/t og t er tiden i sekunder efter at bilen er begyndt at accelerere.

b) Sammenhængen mellem antallet af visninger af en video og tiden kan beskrives med funktionen $v(t) = 240 \cdot t$, hvor $v(t)$ er antallet af visninger og t er tiden i timer efter at videoen er lagt på youtube.

For at beskrive sammenhængen mellem tidspunktet på døgnet og temperaturen, kan modellen

$$T(h) = 2h + 3$$

anvendes, hvor $T(h)$ er temperaturen og h er tidspunktet på døgnet. Men det er ikke rigtigt hele døgnet, fordi temperaturen ikke stiger hele døgnet. I stedet for at kassere modellen indføres et interval. Modellen er kun rigtig når h er mellem 0 og 12. Dette skrives $0 < h < 12$, så den samlede model bliver

$$T(h) = 2h + 3, \quad 0 < h < 12$$

Øvelse 40 Omskriv følgende modeller til en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

a) Sammenhænge mellem vindhastigheden og effekten en vindmølle producerer kan beskrives med funktionen $e(v) = 110 \cdot v + 12$ og $4\,\mathrm{m/s} < v < 15\,\mathrm{m/s}$, hvor $e(v)$ er effekten i kW af vindmøllen og v er vindhastigheden i m/s.

b) Hastigheden som en bambus vokser med, kan beskrives med funktionen $h(t) = 2{,}3 \cdot t + 5$ og $1 < t < 20$, hvor $h(t)$ er højden af bambus i cm og t er tiden i dage.

2.2.2 *Formel og tabel beskrivelse*

Man kan benytte formlen til at opstille en tabel over x-værdier og tilhørende y-værdier (i folkeskolen kaldes en tabel ofte for et sildeben) Der udregnes y-værdier for 0 km, 0,5 km, 1 km, 1,5 km, 2 km, 2,5 km, 3 km ved at indsætte i forskriften:

$$\begin{aligned} f(x) &= 25 + x \cdot 20 \\ f(0) &= 25 + 0 \cdot 20 = 25 \\ f(0{,}5) &= 25 + 0{,}5 \cdot 20 = 25 + 10 = 35 \\ f(1) &= 25 + 1 \cdot 20 = 45 \\ f(1{,}5) &= 25 + 1{,}5 \cdot 20 = 25 + 30 = 55 \end{aligned}$$

osv..

Alle resultaterne kan skrives overskueligt op i en tabel:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	25	35	45	55	65	75	85	95

Video med eksempler på opstilling af tabel ud fra en funktionsforskrift.

Video der viser hvordan uafhængig og afhængig variabel kan beregnes eller aflæses på grafen.

Bemærk, at det ikke giver mening at indsætte negative værdier for x i denne tabel, da man ikke kan køre et negativt antal kilometer. Funktionen er defineret for positive x-værdier, samt 0. Man siger også at definitionsmængden for funktionen er $[0; \infty[$.

Øvelse 41 Udregn værdien af $f(x)$.

a) Bestem $f(3)$ for $f(x) = 9 + 3x$

b) Hvis $f(x) = -3x + 9$, hvad er $f(2)$

c) Hvis $f(x) = 4x - 8$, hvad er $f(3)$

d) Hvis $f(x) = -4 + x$, hvad er $f(-3)$

e) Hvis $f(x) = 5 - x$, hvad er $f(-4)$

f) Hvis $f(x) = x$, hvad er $f(3)$

g) Hvis $f(x) = 9$, hvad er $f(7)$

h) Hvis $f(x) = -2x - 4$, hvad er $f(5)$

■ **Eksempel 32** En funktion er givet ved

$$f(x) = 3x - 4$$

Når forskriften for funktionen er kendt kan den uafhængige eller afhængige variabel beregnes når den anden er kendt. Når $x = 5$:

$$f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 = 11$$

Når $f(x) = 8$:

$$8 = 3x - 4 \Leftrightarrow 8 + 4 = 3x \Leftrightarrow 12 = 3x \Leftrightarrow 4 = x$$

■

Øvelse 42 Udfyld tabellen

a)

x		1	4	
$2x+1$	-9			9

b)

x		1	8	
$-3x-1$	14			-13

c)

x		2	5	
$4x+5$	-11			17

d)

x		3	8	
$-4x+4$	16			-12

e)

x		3	7	
$3x-2$	-11			13

f)

x		2	6	
$-3x+1$	13			-11

g)

x		2	7	
$5x$	-20			25

h)

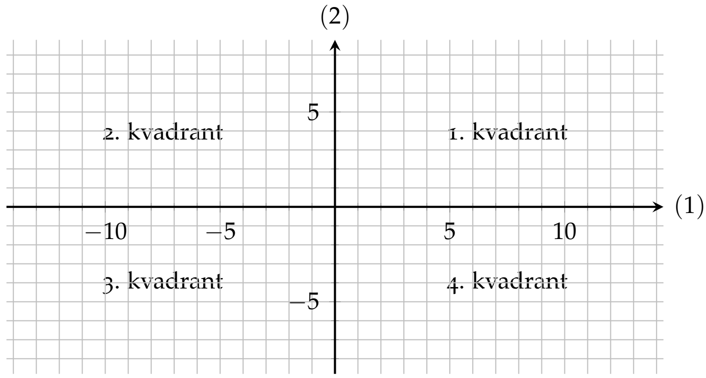
x	0	1	2	3
	-4	-3	-2	-1

i)

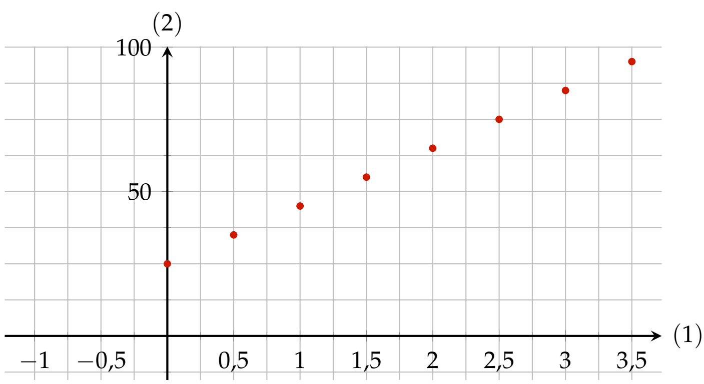
x	0	1	2	3
	4	2	0	-2

2.2.3 *Tabel og grafisk beskrivelse*

Ud fra tabellen kan man konstruere en graf i et koordinatsystem. Et koordinatsystem består af to talakser, se figur. Talakserne inddeler figuren i fire områder, der kaldes kvadranter. I første kvadrant er både x og y værdierne positive. I andet kvadrant er x værdierne negative og y værdierne er positive. I tredje kvadrant er både x og y værdierne negative og i fjerde kvadrant er x værdierne positive og y værdierne negative.

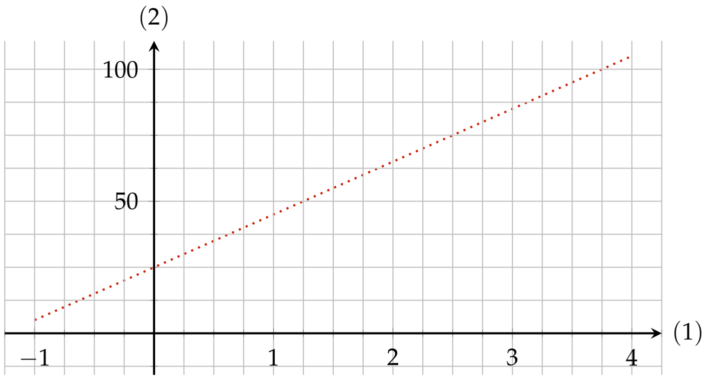


Den vandrette akse angiver værdien af den uafhængige variabel og kaldes x-aksen, førsteaksen eller (1)-aksen, mens den lodrette akse angiver værdien af den afhængige variabel og kaldes y-aksen, andenaksen eller (2)-aksen. Sammenhængen mellem x og y kan dermed visualiseres ved punkter i koordinatsystemet. Man kan benytte værdierne fra tabellen og markere punkterne $(0, 25)$ og $(0{,}5, 35)$ osv.



Hvis man havde valgt andre x-værdier kunne man have tilføjet flere punkter til grafen. Det ses, at alle punkterne ligger på en ret linje. Hvis man forestiller sig at man indtegner et lille punkt for alle de uendeligt mange x-værdier, får man den rette linje der ses på næste figur.

Video med eksempler på tegning af graf udfra tabel.



Denne rette linje kalder vi grafen for funktionen $f(x)$ og den er altså dannet af alle de samhørende værdier for x og y, der opfylder forskriften.

Definition 4 — Graf. Grafen for en funktion består af alle de punkter (x, y) i et koordinatsystem, hvorom det gælder, at $y = f(x)$.

Øvelse 43 Tegn grafen for funktionerne. Det er vigtigt at grafens skæringspunkter med akserne er med på din tegning.

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = -2x + 4$

d) $f(x) = -0{,}5x - 2$

e) $f(x) = 2x - 1$

f) $f(x) = x - 4$

Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes eller hvor grafen skal tegnes

Man kan også benytte denne definition, hvis man eksempelvis ønsker at undersøge hvorvidt punktet $(4, 90)$ ligger på grafen. Det skal undersøges, om det er sandt at $f(4) = 90$. Ved at indsætte $x = 4$ i forskriften for $f(x)$ fås:

$$f(4) = 25 + 4 \cdot 20 = 25 + 80 = 105$$

Så punktet $(4, 105)$ ligger på grafen, men det gør punktet $(4, 90)$ altså ikke.

Øvelse 44 Undersøg om punkterne $(5,120)$ og $(0.1,27)$ ligger på grafen for $f(x) = 25 + 20 \cdot x$.

■ **Eksempel 33** En kasse koster 2 kr og hver sodavand koster 3 kr. Funktionen kan beskrive en sammenhæng mellem to variable, pris og antal, hvor y er prisen for x sodavand med kasse.

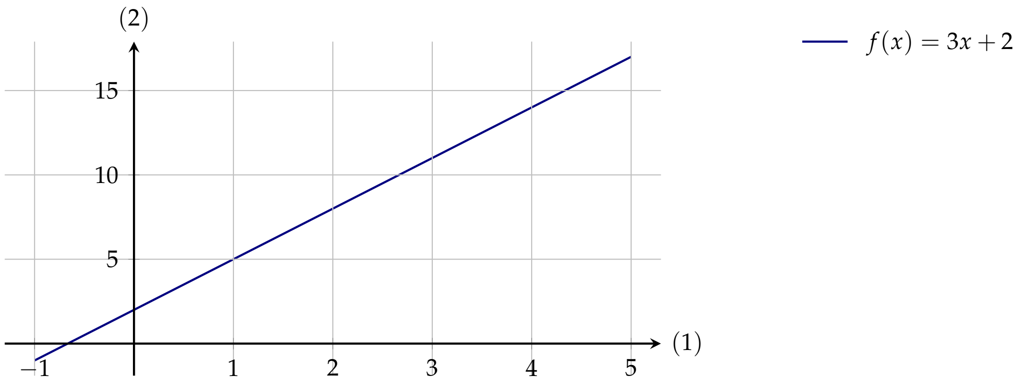
Hver gang vi adderer 1 til x-værdien adderer »funktionen« 3 til y-værdien. Funktionen kaldes $f(x)$.

	+1	+1	+1	+1	
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14
	+3	+3	+3	+3	

Dette kan også udtrykkes ved det som kaldes funktionens forskrift.

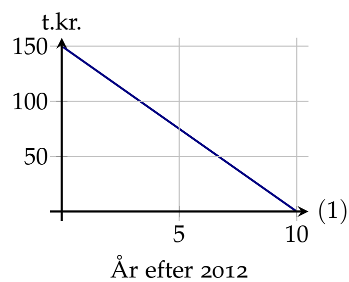
$$f(x) = 3x + 2$$

Eller det kan udtrykkes ved det, som kaldes funktionens graf.



■

■ **Eksempel 34 — Afskrivning.** En virksomhed købte i 2012 en robot til at samle deres produkt. Robotten kostede 150 t.kr. og værdien af den afskrives med 15 t.kr. om året. Værdien af robotten kan beregnes med forskriften.



$$f(x) = -15x + 150$$

hvor $f(x)$ er værdien af robotten x år efter 2012. I deres årlige regnskab skal værdien af robotten angives. I tabellen ses værdien af robotten i årene 2012-2022.

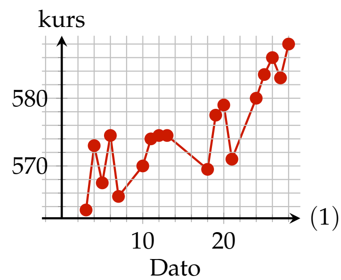
År	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
År efter køb	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Værdi i t.kr.	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0

Begyndelsesværdien af robotten er 150 t.kr. og hældningskoefficienten er hvor meget robotten bliver mindre værd hvert år.

■

2.2.4 *Ikke lineære sammenhænge*

■ **Eksempel 35 — Aktiekurs.** På grafen ses lukkekursen for Vestas Wind Systems A/S i april 2017.



Som det ses på grafen, er der ikke tale om en lineær funktion, derfor kan en forskrift ikke opstilles - endnu. Det er en stykkevis lineær funktion, som vi senere vil fortælle mere om. Men data kan godt opstilles i en tabel.

Dato	Kurs
3.	563,5
4.	573,0
5.	567,5
6.	574,5
7.	565,5
10.	570,0

Dato	Kurs
11.	574,0
12.	574,5
13.	574,5
18.	569,5
19.	577,5
20.	579,0

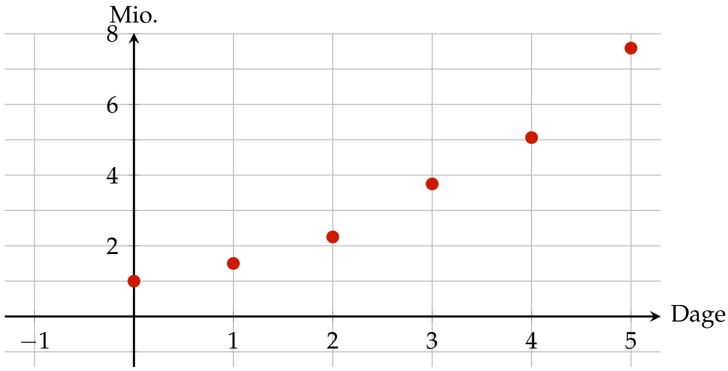
Dato	Kurs
21.	571,0
24.	580,0
25.	583,5
26.	586,0
27.	583,0
28.	588,0

Det er også muligt at sige, at kursen har en voksende tendens, men mere om det senere. ■

■ **Eksempel 36 — Eksponentiel vækst.** På en laboratorium undersøges væksten af nogle bakterier. I forsøget tælles antallet af bakterier i mio. og tiden måles i dage.

Tid i dage	0	1	2	3	4	5
Antal i mio.	1.0	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375

Når data indsættes i et koordinatsystem, ses det tydeligt, at der ikke er tale om en lineær vækst.



Senere ses på dette eksempel igen for at bestemme en forskrift.

■

2.3 *Lineær regression*

I en situation der ikke er teoretisk, er det meget sandsynligt, at andre faktorer og/eller måleusikkerhed påvirker resultaterne, så den observerede sammenhæng ikke helt præcist kan beskrives med en lineær funktion. For at løse dette problem anvendes lineær regression. Ved lineær regression findes den lineære funktion, hvor den gennemsnitlige forskel mellem målingerne og funktionen er mindst muligt.

For at vurdere om en lineær funktion kan beskrive sammenhængen tegnes et residual-plot. Residual-plottet er en grafisk illustration af afvigelsen mellem de observerede data, og den model som data kunne passe til. Først tilpasses modellen så den passer bedst muligt med de observerede data. Dette gøres ved at finde de bedste værdier for konstanterne i modellen. For den lineære funktion $f(x) = ax + b$ betyder det at værdierne for a og b bestemmes så kvadratet på residualerne bliver mindst mulig. Derefter vurderes modellen ved at se på residualerne.

Definition 5 — Residual. Et residual er forskellen mellem den observerede værdi og den forventede værdi ifølge den bestemte model.

Video der beskriver beregningen af residualer og residualplottet

■ **Eksempel 37** I en undersøgelsen er sammenhørende værdier af X og Y blevet målt og data ses i nedenstående tabel.

X	1	3	4	6
Y	1	6	11	13

Efter at have lavet lineær regression på data fremkom følgende model

$$f(x) = 2{,}5x - 1$$

Nu kan modellens værdier for de enkelt uafhængige værdier bestemmes.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2{,}5 \cdot 1 - 1 = 1{,}5 \\ f(3) &= 2{,}5 \cdot 3 - 1 = 6{,}5 \\ f(4) &= 2{,}5 \cdot 4 - 1 = 9 \\ f(6) &= 2{,}5 \cdot 6 - 1 = 14 \end{aligned}$$

Disse tal skrives ind i tabellen.

	X	1	3	4	6
observationsværdi	Y	1	6	11	13
modelværdi	$2{,}5x - 1$	1,5	6,5	9	14

Nu kan residualerne beregnes med formlen

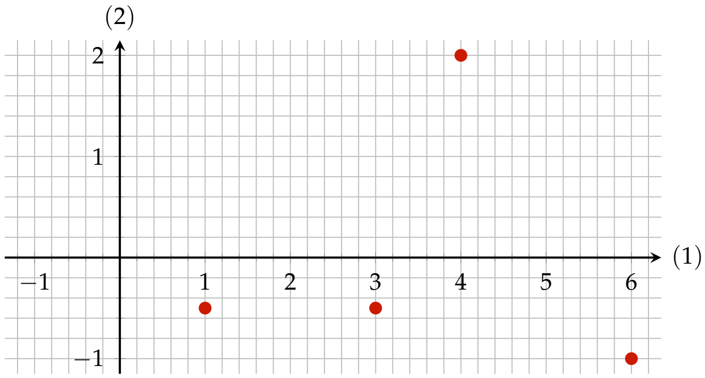
$$\text{residual} = \text{observationsværdi} - \text{modelværdi}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \\ r_2 &= 6 - 6{,}5 = -0{,}5 \\ r_3 &= 11 - 9 = 2 \\ r_4 &= 13 - 14 = -1 \end{aligned}$$

Disse tal skrives ind i tabellen.

	X	1	3	4	6
observationsværdi	Y	1	6	11	13
modelværdi	$2{,}5x-1$	1,5	6,5	9	14
residual	$Y-(2{,}5x-1)$	-0,5	-0,5	2	-1

Disse data kan visualiseres i et residual-plot



■

Residualplottet bruges til at afgører om der er tale om en god model og til at sige noget om hvad der kan gøre det til en bedre model.

Øvelse 45 Beregn residualerne og tegn det tilhørende residual-plot.

a) Dennis P. har lavet et forsøg hvor han bestemte densiteten af en væske. Ved forsøget fik han følgende målinger.

Volumen i mL	1	2	3	4	5
Massen i gram	1	2,2	3,1	4,4	5,2

En model for sammenhængen er bestemt til $f(x) = 1{,}06x$, hvor $f(x)$ er massen i gram og x er volumen i mL.

b) Udviklingen i antallet af nye visninger af en video på youtube ses i tabellen.

Timer efter opload	1	2	3	4	5
Antal visninger	10	29	40	62	69

En model for udviklingen er bestemt til $f(x) = 14{,}3x - 0{,}1$, hvor $f(x)$ er antallet af visninger og x er antallet af timer efter opload.

c) I tabellen ses udviklingen af antallet af danskere der ikke har en mobil telefon

Årstal	2011	2013	2015	2017	2019
Antal (tusiner)	10	7	6	3	2

En model for udviklingen er bestemt til $f(x) = -x + 9{,}6$, hvor $f(x)$ er antallet af danskere uden en mobiltelefon og x er antallet af år efter 2011.

2.4 *Betydning af residualplot*

Punkterne i residualplottet skal være fordelt om (1)-aksen, så der er lige mange punkter over og under aksen og der skal være flest punkter tættest på (1)-aksen. Ca. 68% af punkterne skal ligge med en afstand der er mindre end én spredning σ fra (1)-aksen og ca. 28% skal ligge med en afstand mellem én og to spredninger fra (1)-aksen. Spredningen beregnes med formlen

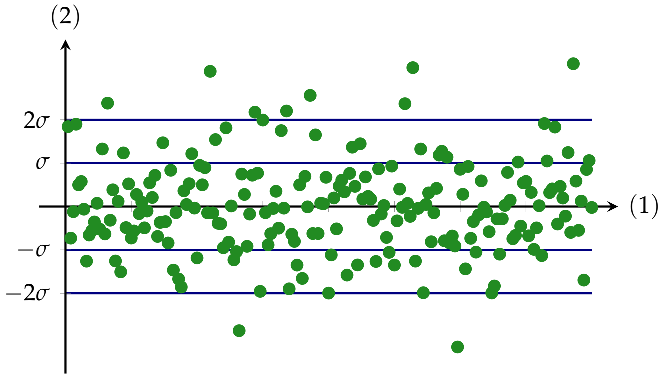
$$\sigma = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n-2}}$$

hvor n er antallet af observationer og r_i er residualerne.

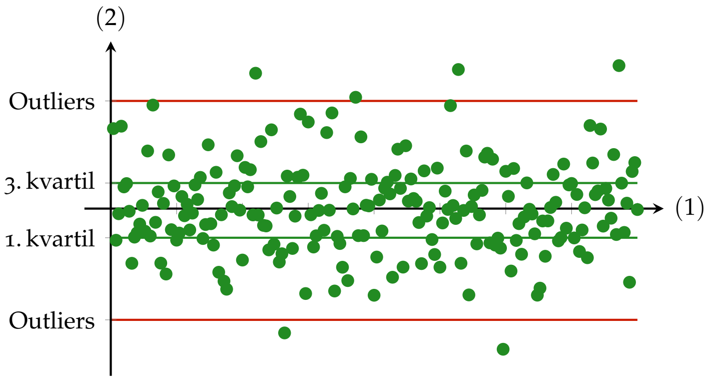
I eksemplet fra før er spredningen

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + 2^2 + (-1)^2}{4-2}} = \sqrt{\frac{5.5}{2}} \approx 1{,}7$$

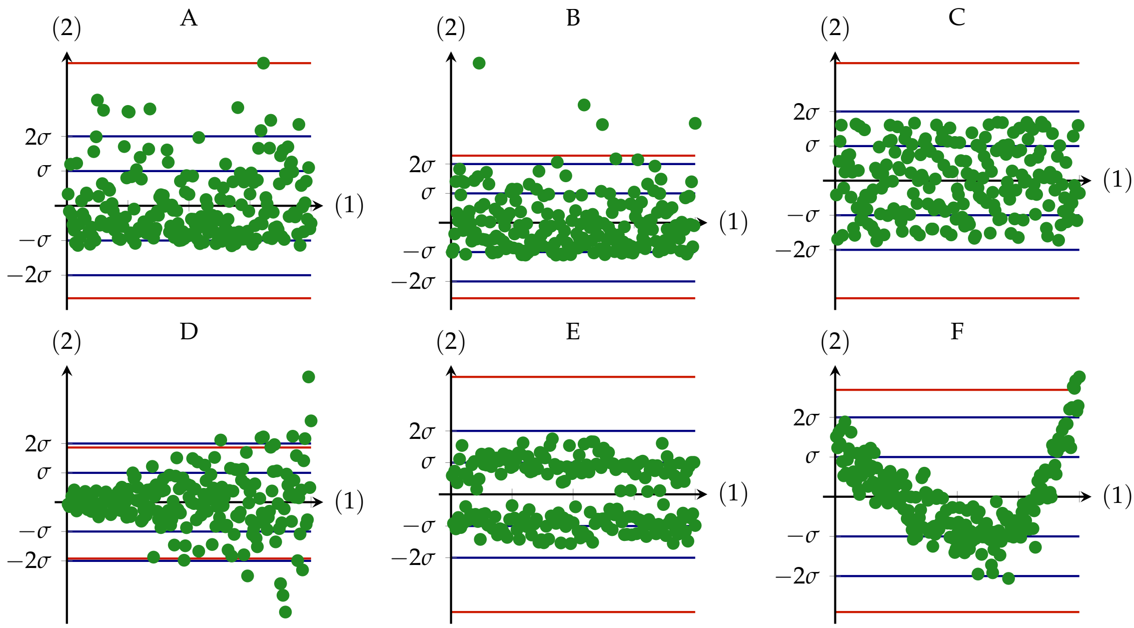
I de plot der præsenteres her, er spredningen markeret med vandrette linjer. Hvis ikke punkterne i residualplottet ligger som beskrevet her, er modellen ikke god.



Hvis et residual ligger mere end halvanden kvartilbredde under nedre kvartil eller mere end halvanden kvartilbredde over øvre kvartil er der tale om en ekstrem observation - også kaldet outlier - der kan skyldes fejl i forsøget eller målingen. Eller der kan være tale om en tilfældighed.



Øvelse 46 I det følgende præsenteres 6 residualplot (A-F), hvor fordelingen af punkterne viser at modellen ikke er god. Beskriv hvad der er problemet med fordelingen af punkterne i hver af de seks tilfælde.



2.5 *Teori om lineære funktioner*

I et tidligere afsnit var fokus at omskrive forskellige repræsentationer for en lineær funktion. I dette afsnit foretages en mere teoretisk behandling af lineære funktioner.

Definition 6 — Forskrift for lineær funktion. En funktion med regneforskrift:

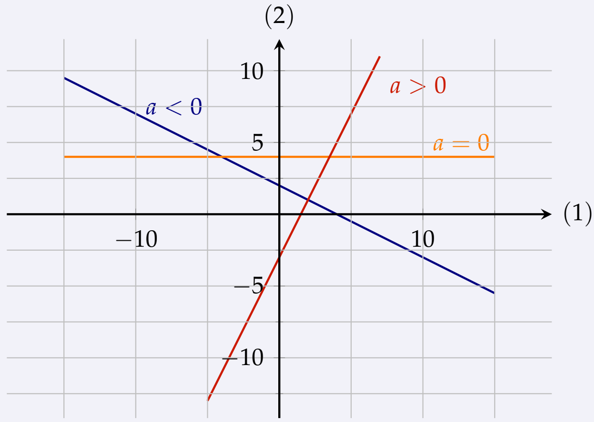
$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor a kaldes hældningskoefficienten og b kaldes konstantledet er en lineær funktion.

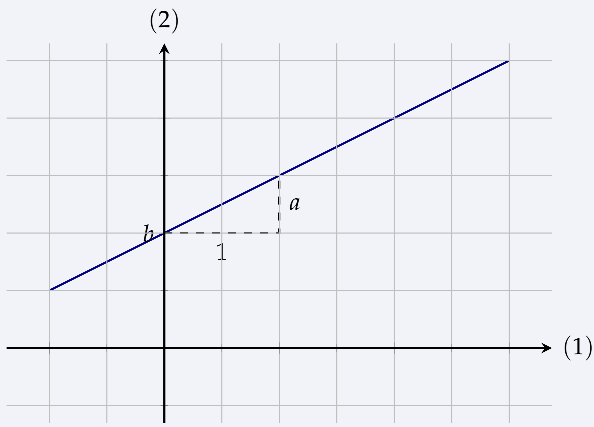
2.5.1 *Sammenhæng mellem graf og a og b*

I et tidligere afsnit påstod vi, at grafen for en lineær funktion var en ret linje der ikke er lodret. Nu vil vi bevise at det er sådan. Konstanterne a og b i den lineære funktion $f(x) = ax + b$ og grafen for den lineære funktion hænger sammen.

Sætning 2 Når a er positiv er grafen voksende og når a er negativ er grafen aftagende, hvis a er nul er grafen konstant/ vandret/ parallel med (1)-aksen.



Sætning 3 — Betydning af konstanterne. Når x vokser med 1 vokser $f(x) = ax + b$ med a og kaldes derfor grafens hældningskoefficient og $(0,b)$ er grafens skæringspunkt med 2.-aksen.



■ **Bevis** Når x vokser med 1, så vokser $f(x) = ax + b$ med a, hvilket betyder at:

$$f(x + 1) = f(x) + a$$

For at vise denne påstand beregnes $f(x + 1)$. $f(x) = ax + b$ anvendes i starten og slutningen.

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= a(x+1)+b \\
&= ax+a+b \\
&= ax+b+a \\
&= f(x)+a
\end{aligned}
$$

Nu er det vist, at når x-værdien vokser med 1, vokser y-værdien med a. Hvis a er negativ er der tale om et fald i funktionsværdien og grafen er aftagende.

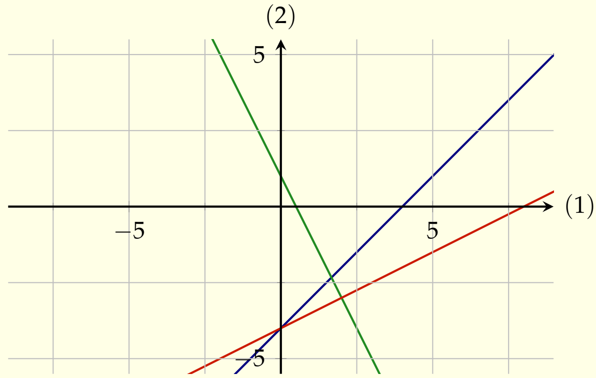
Nu skal det vises, at b er y-værdien til skæringspunktet med y-aksen. På y-aksen er $x=0$, hvilket indsættes i funktionen $f(x) = ax+b$.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a\cdot 0+b \\
&= 0+b \\
&= b
\end{aligned}
$$

■

Øvelse 47 På figuren ses tre grafer. Giv flere forskellige argumenter for hvilken af disse tre forskrifter de er graf af.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x+1 \\
g(x) &= x-4 \\
h(x) &= 0{,}5x-4
\end{aligned}
$$



Øvelse 48 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrant og bestem forskriften for den.

Øvelse 49 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrat og går gennem punktet $(5, -2)$ og bestem forskriften for den.

Opgaver med fokus på betydningen af konstanterne a og b for grafens forløb.

Øvelse 50 Tegn grafen for en aftagende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2{,}1)$ og bestem forskriften for den.

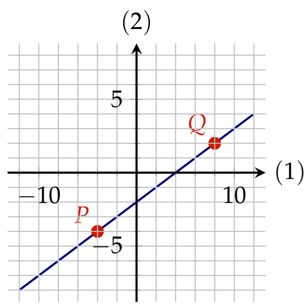
Øvelse 51 Tegn grafen for en voksende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2{,}1)$ og bestem forskriften for den.

Øvelse 52 Grafen for en lineær funktion går gennem punktet $(3{,}4)$, bestem mindst et punkt som grafen ikke kan gå gennem.

2.5.2 *Bestem forskrift ud fra to punkter*

Når man har to punkter i en plan kan man altid tegne en ret linje gennem punkterne, og det kan kun gøres på én måde.

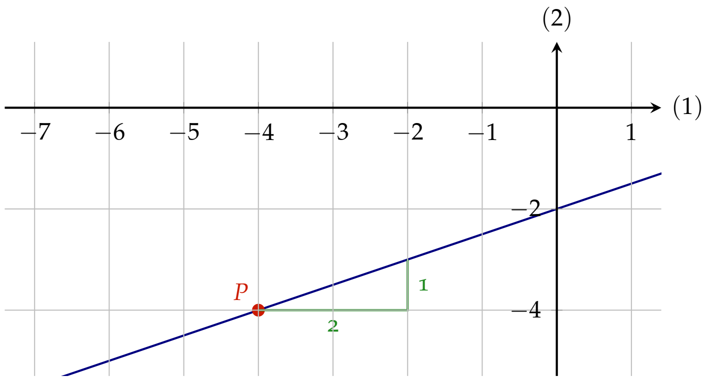
Eksempel 38 Punkterne $P(-4, -4)$ og $Q(8, 2)$ er afsat i et koordinatsystem og linjen gennem dem er tegnet.



■

Hvis punkterne ligger "pænt" kan man aflæse a og b ud fra koordinatsystemet.

■ **Eksempel 39** Man kan her nogenlunde se, at $a = \frac{1}{2}$, dvs. at man går $\frac{1}{2}$ op, når man går 1 til højre. For at tjekke det kan man i stedet gå 2 til højre og se, at man nu går 1 op. Det stemmer. a kan aflæses til $\frac{1}{2}$ og b til -2.



■

Man kan komme ud for, at det er vanskeligere at aflæse a.

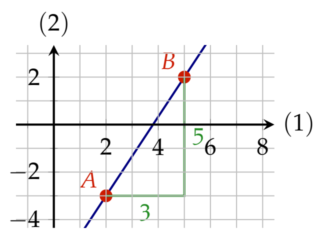
Øvelse 53 En ret linje går gennem punkterne $P(-4,-4)$ og $Q(8,2)$.

a) Aflæs a og b på grafen.

b) Angiv ligningen for grafen.

c) Undersøg om punkterne $(6,1)$, $(12,5)$ og $(-14,-10)$ ligger på grafen.

■ **Eksempel 40** En linje går gennem punkterne $A(2,-3)$ og $B(5,2)$. Vi vil gerne bestemme a og b. Først tegnes punkterne ind i et koordinatsystem og linjen gennem dem tegnes.

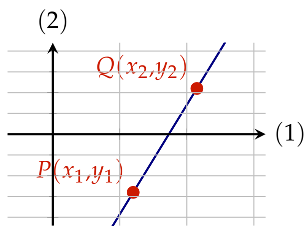


Det ser ud til, at hældningskoefficienten a er ca. 1,7, men det må undersøges nærmere. Vi tegner derfor en retvinklet trekant, hvor hypotenusen er AB og kateterne er lodret og vandret. Vi kan nu se, at når vi går 3 til højre, vil vi gå 5 op. Hvis vi kun går 1 til højre, må vi altså gå $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ op. Hældningskoefficienten er derfor $a = \frac{5}{3}$. Man finder altså a ved at dividere det lodrette stykke med det vandrette stykke. ■

Det generelle tilfælde kan beskrives ved følgende sætning.

Sætning 4 — Topunkts-formlen for en lineær funktion. Den rette linje gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ har ligningen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
og
$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Videogennemgang af bevis og eksempel



■ **Bevis** Linjen går gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$. Det betyder, at når punkternes koordinater indsættes i linjens ligning $y = a \cdot x + b$ bliver udtrykket sandt.

Vi har altså: $y_1 = a \cdot x_1 + b$ og $y_2 = a \cdot x_2 + b$. Vi trækker de to ligninger fra hinanden. Her bruger vi parenteser for ikke at lave fortegnsfejl.

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

Først hæves parenteserne

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

Leddene $+b$ og $-b$ går ud med hinanden

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

De to led på højre siden af lighedstegnet har begge a som faktor. Vi kan derfor sætte a udenfor en parentes.

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Vi kan nu isolere a ved at dividere med $(x_2 - x_1)$ på begge sider af lighedstegnet.
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$
Eller med andre ord at $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Konstanten b findes ved at indsætte det ene punkt i ligningen. Der er nu kun en ubekendt b i ligningen.
$$y_1 = a \cdot x_1 + b \Leftrightarrow y_1 - a \cdot x_1 = b$$

Hermed er også b bestemt. ■

Dette resultat stemmer også med eksemplet, idet hældningen jo blev bestemt ved at tage "tilvæksten i y" delt med "tilvæksten i x". Det kan man også skrive:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vi ser igen på eksemplet fra før.

■ **Eksempel 41** En linje går gennem punkterne $A(2,-3)$ og $B(5,2)$. Vi navngiver $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ og indsætter i formlen

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-3)}{5-2} = \frac{5}{3} \\ b &= y_1 - ax_1 = -3 - \frac{5}{3}\cdot 2 = -\frac{9}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

Ligningen for den rette linje er altså $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$. ■

Videogennemgang af eksempel på beregning af a og b.

Øvelse 54 Grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ går gennem de to punkter $A(-2,5)$ og $B(4,-1)$. Bestem en forskrift for f.

Øvelse 55 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne, bestem forskriften for f.

a) $(3,6)$ og $(2,4)$

b) $(5,1)$ og $(15,2)$

c) $(2,4)$ og $(4,3)$

d) $(8,7)$ og $(12,28)$

e) $(4,4)$ og $(6,2)$

f) $(-2,4)$ og $(8,5)$

g) $(10,37)$ og $(70,52)$

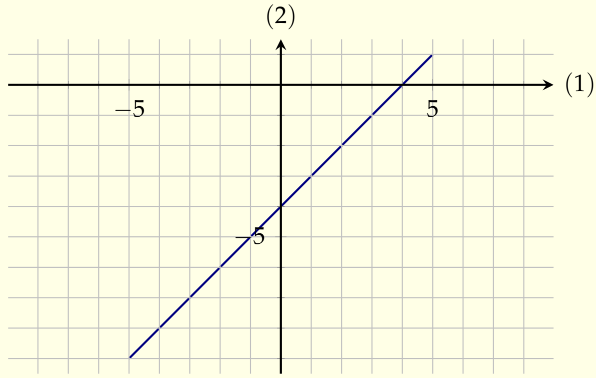
h) $(2,-4)$ og $(-5,3)$

Opgaver hvor forskriften skal bestemmes og to punkter er kendt.

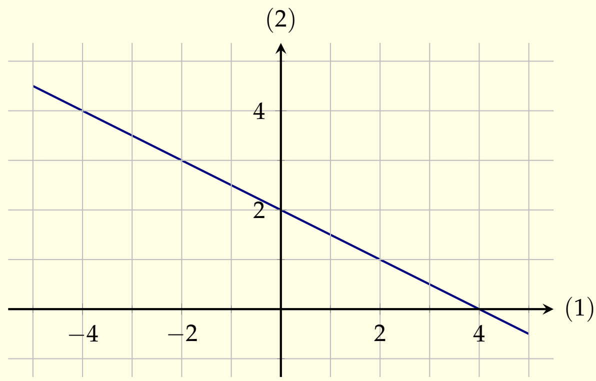
Øvelse 56 Bestem forskriften for lineær funktion med hældning 2, hvor grafen går gennem punktet $(3,7)$.

Øvelse 57 Bestem forskriften for lineær funktion med hældning -1, hvor grafen går gennem punktet $(-3,4)$.

Øvelse 58 Bestem forskriften for funktionen hvis graf ses på figuren.



Øvelse 59 Bestem forskriften for funktionen hvis graf ses på figuren.



Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en lineær funktion ud fra grafen.

Opgaver hvor forskriften for en lineær funktion skal bestemmes ud fra grafen.

Øvelse 60 Jeg har været ud at køre med taxa to gange. Den ene gang kørte jeg 11 km og betalte 120 kr og den anden gang kørte jeg 16 km og betalte 150 kr.

Bestem startgebyret og kilometertaksten.

Øvelse 61 Jeg har fået online hjælp til at løse to skoleopgaver. Den ene gang fik jeg hjælp i 30 minutter og betalte 350 kr og den anden gang fik jeg hjælp i 45 minutter og betalte 450 kr.

Bestem minuttaksten og startgebyret.

Øvelse 62 Følgende måledata er opsamlet.

x	-7	-5	-3	0	2	6
y	-2,5	-0,8	-0,5	1,2	2,2	3,0

Data ønskes tilpasset en lineær funktion, dvs. ligningen for den rette linje, der bedst beskriver data, skal bestemmes.

a) Indtegn punkterne i et koordinatsystem. Inden du laver dit koordinatsystem, skal du huske at se på udstrækning af tallene for x-værdierne og y-værdierne, så du får lavet et passende koordinatsystem. Bemærk at y-værdierne er decimaltal.

b) Tegn den rette linje der passer bedst med punkterne.

c) Aflæs to punkter der ligger langt fra hinanden på linjen.

d) Brug topunktsformlen til at beregne hældning og afskæring på y-aksen.

e) Hvad bliver forskriften for den rette linje?

2.6 *Proportionalitet*

Definition 7 — Proportional. De to variable x og y siges at være ligefrem proportional, hvis $y = k \cdot x$ eller

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = k \cdot x$$

Proportional betyder at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.

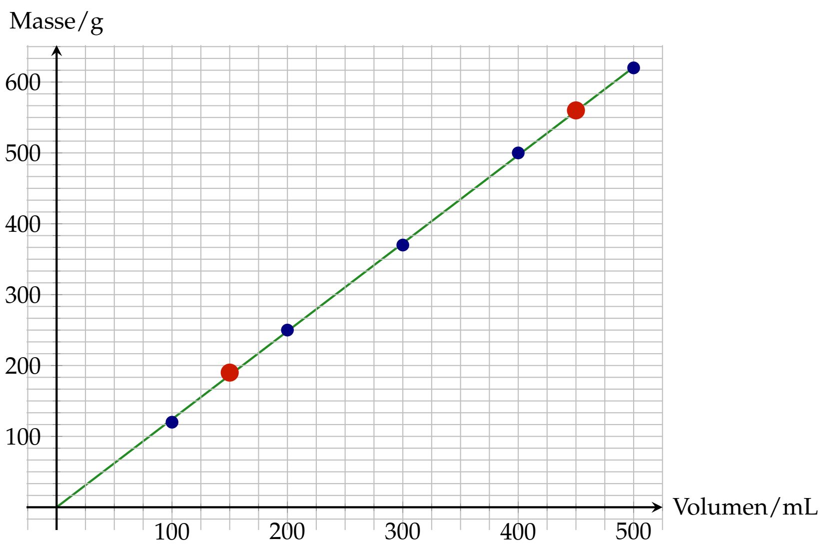
En proportional sammenhæng $y = k \cdot x$ er en lineær sammenhæng, hvis graf går gennem $(0,0)$. Hældningen på grafen er proportionalitetsfaktoren. Dette kan fx bruges til at finde densiteten af en væske.

For at finde densiteten af saltvandet i det døde hav har Dennis P. været ved det døde hav, hvor han fyldte sin drikkedunk med saltvand. Da han kom hjem vejede han forskellige 100 mL, 200 mL, 300 mL, 400 mL, 500 mL saltvand. Han lavede følgende tabel

volumen / mL	100	200	300	400	500
masse / g	120	250	370	500	620

Så lavede han denne graf og bestemte hældningen ved at aflæse to punkter $(150, 190)$ og $(450, 560)$.

Video med eksempel på ligefrem proportionalitet

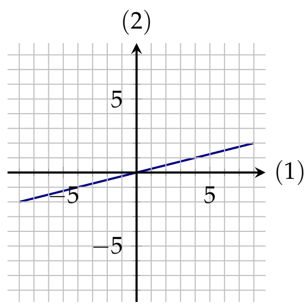


$$k = \frac{560\,\text{g} - 190\,\text{g}}{450\,\text{mL} - 150\,\text{mL}} = \frac{370\,\text{g}}{300\,\text{mL}} = \frac{37}{30}\,\text{g/mL}$$

For at omregne det til decimaltal brugte Dennis P. overslagsregning

$$1{,}2\,\text{g/mL} = \frac{36}{30}\,\text{g/mL} < \frac{37}{30}\,\text{g/mL} < \frac{39}{30}\,\text{g/mL} = 1{,}3\,\text{g/mL}$$

Det betyder at densiteten af vandet i det døde hav er ca. 1,25 g/mL



■ **Eksempel 42** p er ligefrem proportional med y med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{4}$. Det betyder at

$$p = \frac{1}{4} \cdot y$$

■

Øvelse 63 Oversæt disse sætninger til matematiske formler

a) v er ligefrem proportional med k med proportionalitetsfaktoren q.

b) y er ligefrem proportional med summen af r og q.

c) r er ligefrem proportional med differensen af n og m med proportionalitetsfaktoren 6.

d) f er ligefrem proportional med forholdet mellem p og q.

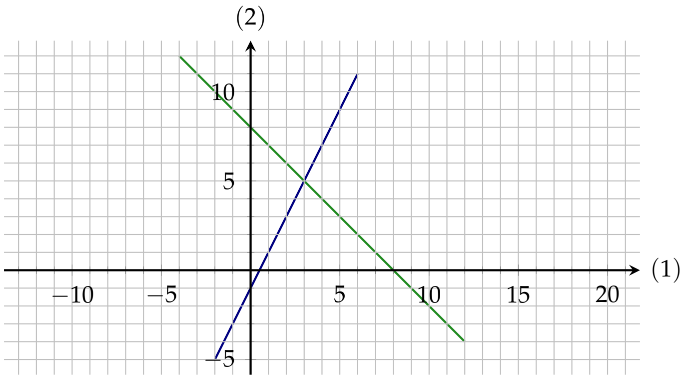
e) Energien E er ligefrem proportional med lysets hastighed c i anden, med proportionalitetfaktoren m for massen.

f) Udnyttelsen af energien E i sollyset er ligefrem proportional med kvadratet på overflade arealet O af solcellerne.

2.7 *Stykkevis lineær*

En funktion kan være stykkevis. Det betyder at den er konstrueret af stykker fra flere forskellige funktioner. Hvis den stykkevise funktion er konstrueret af lineære funktioner, kaldes den stykkevis lineær. Her ses de to lineære funktioner

$$f_1(x) = 2x - 1 \text{ og } f_2(x) = -x + 8$$



En stykkevis lineær funktion er konstrueret af et stykke af hver af de to lineære funktioner. For at undgå at den stykkevise funktion, ikke er en funktion (se figur 2.3) defineres den stykkevise funktion ved at vælge to *ikke* overlappende intervaller for x-værdien for hver af de to funktioner.

Det er en del af definitionen af den stykkevise funktion i hvilke intervaller de to funktioner definerer den stykkevise funktionen. Et eksempel på en definition er at $f(x)$ er $f_1(x) = 2x - 1$ for $x < 2$ og $f_2(x) = -x + 8$ for $x > 3$. Se figur 2.4.

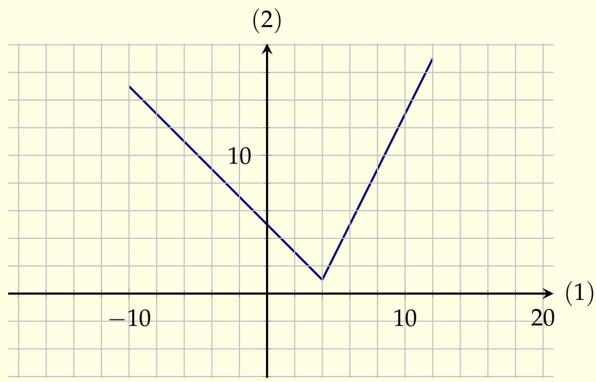
Grafisk vises forskellen på at $f(x)$ er $f_1(x) = 2x - 1$ for $x < 2$ eller $x \leq 2$ ved at lave en cirkel eller en udfyldt cirkel. Den udfyldte cirkel repræsentere $\leq$ eller $\geq$ og cirklen repræsentere $<$ eller $>$. Se figur 2.5.

Grafen for en stykkevis funktion kaldes sammenhængende, hvis der ikke er nogle huller i grafen. Grafen på figur 2.5 er ikke sammenhængende. Grafen på figur 2.6 er sammenhængende.

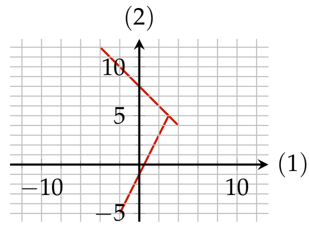
Forskriften for en stykkevis funktion skrives med en { parentes og ud for hver del af funktionen skrives i hvilket interval den del af funktionen definerer den stykkevise funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3 \\ -x + 8, & x > 3 \end{cases}$$

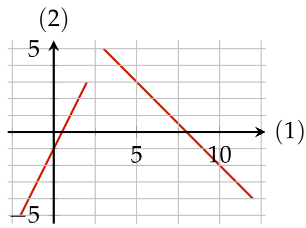
Øvelse 64 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f.



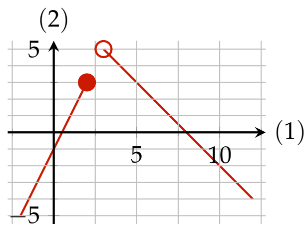
Aflæs på grafen hvor $f(x) = 3$ og $f(10)$.



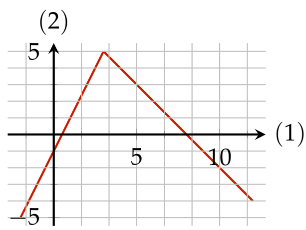
Figur 2.3: Ikke grafen for en funktion.



Figur 2.4: Grafen for en stykkevis lineær funktion.



Figur 2.5: Åben og lukket interval.



Figur 2.6: Sammenhængende graf.

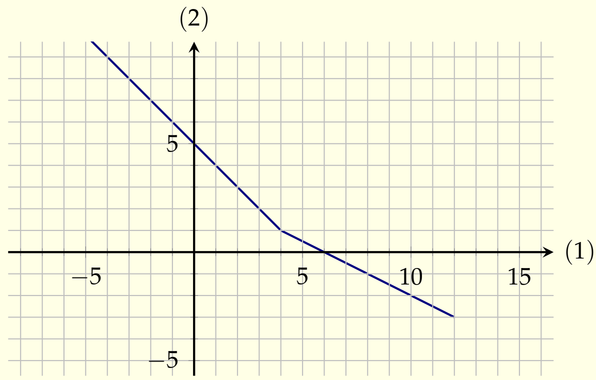
Øvelse 65 Tegn grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 6 \\ 2x-4, & x > 6 \end{cases}$$

Øvelse 66 Tegn grafen for funktionen f givet ved

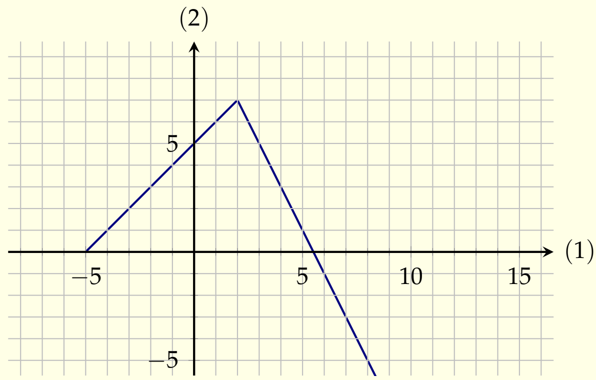
$$f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x \leq 3 \\ -x+6, & x > 3 \end{cases}$$

Øvelse 67 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f.



Bestem en forskrift for f.

Øvelse 68 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion $f(x)$.



Benyt grafen til at løse ligningen $f(x) = 3$.

Øvelse 69 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4, & x \leq 6 \\ -2x + 19, & x > 6 \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 3$.

Øvelse 70 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 4 \\ x + 1, & x > 4 \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 1$.

3 Ligninger

En ligning er et udtryk, der indeholder et lighedstegn, og udtrykket kan enten være sandt eller falsk. Nedenfor ses et eksempel på først en sand og dernæst en falsk ligning:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 & \qquad & \textit{sand} \\ -2 &= 3 & & \textit{falsk} \end{aligned}$$

Oftest indeholder en ligning en ubekendt størrelse, hvilket ses i ligningen nedenfor, hvor x indgår som en ubekendt.

$$x - 2 = 5$$

Det er underforstået, at x angiver et tal. Hvis x vælges til at være lig 7, det vil sige $x = 7$, fås ligningen $7 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $5 = 5$; da dette er sandt, siges $x = 7$ at være løsning til ligningen. Hvis x derimod vælges til at være lig 3, det vil sige $x = 3$, fås ligningen $3 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $1 = 5$; da dette er falsk, er $x = 3$ ikke løsning til ligningen.

I ligningen nedenfor ses et eksempel på en ligning, hvor det er ligegyldigt hvilken værdi x erstattes med – ligningen er sand ligegyldigt hvad:

$$x - 3 = -3 + x$$

Alle tal er altså løsning til ligningen, og vi skriver da løsningen som $x \in \mathbb{R}$.

I nedenstående ligning giver alle værdier af x en falsk ligning (prøv dig gerne frem):

$$x - 2 = x + 2 \qquad \textit{falsk}$$

Ligningen har derfor ingen løsning.

3.1 *Algebraisk løsning af ligninger*

At løse en ligning betyder, at alle de værdier af den ubekendte, der gør ligningen sand, skal findes.

Når en ligning skal løses gælder følgende *meget vigtige* grundlæggende regler:

1. Det samme tal må lægges til eller trækkes fra på begge sider af lighedstegnet.
2. Det samme tal må ganges eller divideres på begge sider af lighedstegnet, så længe tallet er forskelligt fra 0.

■ **Eksempel 43** Løsning af ligningen $3x - 4 = -19$.

$$\begin{aligned} & & 3x - 4 &= -19 & \\ &\Leftrightarrow & 3x - 4 + 4 &= -19 + 4 & \text{der lægges 4 til på begge sider} \\ &\Leftrightarrow & 3x &= -15 & \\ &\Leftrightarrow & \frac{3x}{3} &= \frac{-15}{3} & \text{der divideres med 3 på begge sider} \\ &\Leftrightarrow & x &= -5 & \end{aligned}$$

■

Video med eksempel på løsning af en ligning.

Som eksemplet ovenover illustrerer, samles først alle led, der indholder x, på den ene side og alle led, der kun indeholder tal, på den anden side. Derefter divideres med det tal, der står foran x, på begge sider af lighedstegnet. Det bemærkes, at der undervejs kun er benyttet de regler til løsning af ligninger, der blev nævnt ovenfor.

Tegnet $\Leftrightarrow$ kaldes »ensbetydende med« eller »biimplikation« og placeres mellem hver omskrivning; det viser, at en gammel ligning erstattes af en ny ligning, som har nøjagtig de samme løsninger som den foregående.

■ **Eksempel 44** Løsning af ligningen $-2x + 10 = 3x$.

$$\begin{aligned} & & -2x + 10 &= 3x & \\ &\Leftrightarrow & -2x + 10 + 2x &= 3x + 2x & \text{der lægges } 2x \text{ til på begge sider} \\ &\Leftrightarrow & 10 &= 5x & \\ &\Leftrightarrow & \frac{10}{5} &= \frac{5x}{5} & \text{der divideres med 5 på begge sider} \\ &\Leftrightarrow & 2 &= x & \end{aligned}$$

■

I eksempel 44 ses løsningen $2 = x$. Denne angivelse er korrekt, ligesom hvis der skrives $x = 2$. Et lighedstegn kan læses både fra højre og venstre.

■ **Eksempel 45** Løsning af ligningen $5x - 7 = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}
 & 5x-7 = 2x-5 & \\
\Leftrightarrow\ & 5x-7-2x = 2x-5-2x & \text{der trækkes } 2x \text{ fra på begge sider}\\
\Leftrightarrow\ & 3x-7+7 = -5+7 & \text{der lægges 7 til på begge sider}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{3x}{3} = \frac{2}{3} & \text{der divideres med 3 på begge sider}\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{2}{3} &
\end{aligned}$$

■

I eksempel 45 ses det, at en brøk er løsning til ligningen. En løsning må meget gerne skrives som en brøk, og det er ikke nødvendigt at omskrive brøken til et decimaltal.

Øvelse 71 Løs ligningen $3x + 4 = 7 - 2x$.

Opgaver med førstegradsligninger med hele tal.

■ **Eksempel 46** Løsningen af ligningen $2 - 6x = -9 - 4x$.

$$\begin{aligned}
 & 2-6x = -9-4x \\
\Leftrightarrow\ & 2-6x+9 = -9-4x+9 \\
\Leftrightarrow\ & 11-6x+6x = -4x+6x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11}{2} = \frac{2x}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11}{2} = x
\end{aligned}$$

Når du er blevet lidt mere øvet, må du gerne lave flere omskrivninger på én gang. Et eksempel er ligningen, der løses ovenfor i dette eksempel; nedenfor er den løst med færre mellemregninger, men det er vigtigt, at du først begynder på det, når du har helt styr på reglerne til ligningsløsning.

$$\begin{aligned}
 & 2-6x = -9-4x \\
\Leftrightarrow\ & 11 = 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{11}{2} = x
\end{aligned}$$

■

Øvelse 72 Løs ligningerne.

a) $6x = 3$ b) $3x + 4 = 5$ c) $-2x + 3 = -4$

d) $\frac{3}{2}x+4=5$ e) $\frac{1}{2}x+4=5x$ f) $9x+4=5x$

g) $x-2=2x+5$ h) $5x-4=2x+5$ i) $7x+3=x-5$

■ **Eksempel 47** Løsningen af ligningen $3(x-2)=4-2x$.

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= 4-2x \\ \Leftrightarrow \quad 3x-6 &= 4-2x && \text{der ganges ind i parentesen} \\ \Leftrightarrow \quad 3x-6+6 &= 4-2x+6 \\ \Leftrightarrow \quad 3x+2x &= 10-2x+2x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{5x}{5} &= \frac{10}{5} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 5 \end{aligned}$$

■

I eksempel 47 ses et eksempel, hvor der indgår en parentes. Er det tilfældet, skal du først gange ind i parentesen, inden du begynder på de klassiske omskrivninger.

Video med eksempel på løsning af ligning med minusparentes.

Øvelse 73 Løs ligningen $3(x+4)=7-2x$.

Opgaver med ligninger der indeholder en parentes.

■ **Eksempel 48** Det er sjovt at arbejde med brøker, men uden hjælpemidler volder det problemer, hvis man ikke gør sig umage. Derfor er det altid en god ide, når en ligning indeholder en brøk, at gange ligningen igennem med den nævner, der indgår i brøken. Det er i så fald naturligvis meget vigtigt at gange igennem med tallet på begge sider – reglerne skal jo overholdes. Det er illustreret nedenfor:

$$\begin{aligned} 3-\frac{2}{3}x &= 3x+5 \\ \Leftrightarrow \quad 3\cdot\left(3-\frac{2}{3}x\right) &= 3\cdot(3x+5) && \text{der ganges med 3 på begge sider} \\ \Leftrightarrow \quad 3\cdot 3-3\cdot\frac{2}{3}x &= 3\cdot 3x+3\cdot 5 && \text{der ganges ind i parenteserne} \\ \Leftrightarrow \quad 9-2x &= 9x+15 \\ \Leftrightarrow \quad -6 &= 11x \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{11} &= x \end{aligned}$$

■

Øvelse 74 Løs ligningen $\frac{1}{2}x+4=7-2x$.

■ **Eksempel 49** I dette lidt mere komplicerede eksempel indgår der igen brøker. Brøkerne har forskellig nævner og derfor ganges der igennem med produktet af nævnerne.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}+x &= \frac{1}{3}x+2 \\ \Leftrightarrow\quad 3\cdot 4\cdot\left(\frac{5}{4}+x\right) &= 3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{3}x+2\right) \quad \text{der ganges med } 3\cdot 4 \text{ på begge sider} \\ \Leftrightarrow\quad 3\cdot 5+12x &= 4\cdot x+12\cdot 2 \\ \Leftrightarrow\quad 15+12x &= 4x+24 \\ \Leftrightarrow\quad 8x &= 9 \\ \Leftrightarrow\quad x &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

■

Øvelse 75 Løs ligningen $x+\frac{1}{4}=7-2x$.

■ **Eksempel 50** Her ses et eksempel på en ligning, hvor alle værdier af x vil løse ligningen.

$$\begin{aligned} 2\cdot(2x-3) &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\quad 4x-6 &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning er sand for alle værdier af x, vil alle værdier af x være en løsning af ligningen.

■

■ **Eksempel 51** Her ses et eksempel på en ligning uden nogen løsning:

$$\begin{aligned} 2\cdot(2x-4) &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\quad 4x-8 &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\quad -8 &= -6 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning ikke er sand for nogle værdier af x, er der ingen løsning til ligningen.

■

Ligninger kan bruges til at løse nogle problemer med procent. Kendes prisen på en vare efter at rabatten er fratrukket, kan en ligning opstilles til at udregne prisen inden rabatten blev fratrukket.

■ **Eksempel 52** Bestem den oprindelige pris på et par bukser, der koster 400 kr med 20% rabat. Den oprindelige pris er ukendt, hvorfor den gives symbolet x. Nu kan udregningen af prisen efter rabat beregnes, som i afsnittet om procent.

$$-x \cdot \frac{20}{100} + x = 400 \qquad 0{,}8x = 400$$

Denne ligning kan løses med den samme metode som de tidligere ligninger.

$$\begin{aligned}
& & -x \cdot \frac{20}{100} + x &= 400 & \\
&\Leftrightarrow & -x \cdot \frac{2}{10} + x &= 400 & \text{brøken forkortes} \\
&\Leftrightarrow & 10 \cdot \left(-x \cdot \frac{2}{10} + x\right) &= 10 \cdot 400 & \text{der ganges med 10} \\
&\Leftrightarrow & -x \cdot 2 + 10x &= 4000 & \text{parentesen hæves} \\
&\Leftrightarrow & 8x &= 4000 & \text{der reduceres} \\
&\Leftrightarrow & \frac{8x}{8} &= \frac{4000}{8} & \text{der divideres med 8} \\
&\Leftrightarrow & x &= 500 &
\end{aligned}$$

Prisen på bukserne inden rabatten var 500 kr. ■

Øvelse 76 Bestem prisen inden moms (25%) på en vare der koster 200 kr.

3.2 *Isolering af en ubekendt i en ligning*

Der kan være mere end én ubekendt i en ligning. I sådanne tilfælde er der ofte behov for at isolere en af størrelserne. I eksemplet nedenfor er x og y ubekendte, og her ønskes x isoleret.

$$3y = 5x + 7$$

dvs. få x til at stå alene på den ene side at lighedstegnet.

$$\begin{aligned}
& & 3y - 7 = 5x + 7 - 7 \quad & \text{Først trækkes 7 fra på begge sider.} \\
&\Leftrightarrow & 3y - 7 = 5x \quad & \text{Derefter divideres med 5.} \\
&\Leftrightarrow & \frac{3y-7}{5} = \frac{5x}{5} \quad & \text{Dette reduceres.} \\
&\Leftrightarrow & \frac{3y-7}{5} = x \quad & \text{Nu er } x \text{ isoleret.}
\end{aligned}$$

Video med eksempel på isolering af en variabel i en ligning.

Øvelse 77 Isoler x i ligningerne.

a) $3x = 6y$ b) $b = 2 - x$ c) $2q = 3x + 7$

d) $8x = 4x - 7$ e) $3 - ax = 4x$ f) $ax = 4x - c$

g) $a = \dfrac{2c}{x-d}$ h) $y = 3x + 5$ i) $4x + 3y = 4$

3.3 *Ligningsløsning med funktioner*

Kendes regneforskriften og en værdi for funktionen, kan x-værdien bestemmes, ved at løse en ligning.

■ **Eksempel 53** Lad $f(x) = 5 + 2x$ og $f(x) = 3$, bestem x. Først opstilles ligningen $3 = 5 + 2x$. Denne løses

$$3 = 5 + 2x \Leftrightarrow 3 - 5 = 2x \Leftrightarrow \frac{3-5}{2} = x \Leftrightarrow x = -1$$

■

■ **Eksempel 54** Lad $f(x) = 3 - 2x$ og $f(x) = -5$, bestem x. Først opstilles ligningen $-5 = 3 - 2x$. Denne løses

$$-5 = 3 - 2x \Leftrightarrow -5 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{-5-3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 4$$

■

■ **Eksempel 55** Lad $f(x) = -2x + 3$ og $f(x) = 3$, bestem x. Først opstilles ligningen $3 = -2x + 3$. Denne løses

$$3 = -2x + 3 \Leftrightarrow 3 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{3-3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 0$$

■

■ **Eksempel 56** Lad $f(x) = -3 + x$ og $f(x) = 3$, bestem x. Først opstilles ligningen $3 = -3 + x$. Denne løses

$$3 = -3 + x \Leftrightarrow 3 + 3 = x \Leftrightarrow x = 6$$

■

■ **Eksempel 57** Lad $f(x) = 3$ og $f(x) = 8$, bestem x. Først opstilles ligningen $3 = 8$ Denne ligning har ingen løsning. ■

Øvelse 78 Beregn x-værdien.

a) $f(x) = -8 + 2x$ og $f(x) = 4$.

b) $f(x) = 1 + x$ og $f(x) = 5$.

c) $f(x) = 8 - 2x$ og $f(x) = 12$.

d) $f(x) = -12 + 2x$ og $f(x) = -2$.

e) $f(x) = 1 - 4x$ og $f(x) = -1$.

f) $f(x) = 8 + 5x$ og $f(x) = -7$.

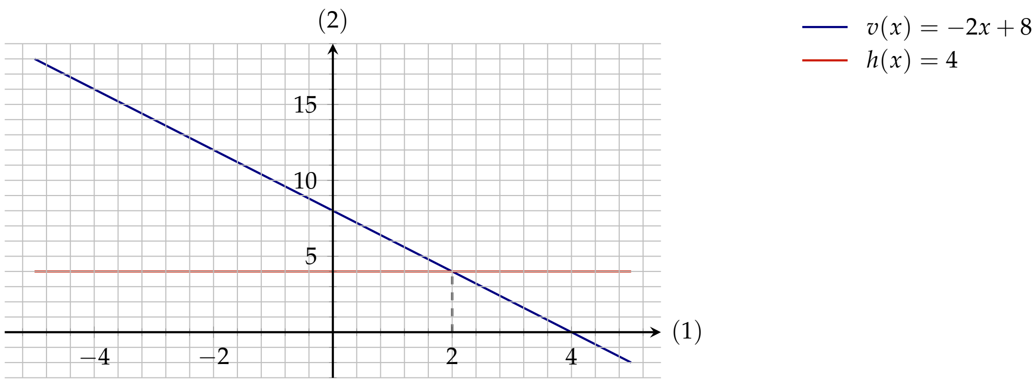
g) $f(x) = 35 - 4x$ og $f(x) = 3$.

h) $f(x) = 3x$ og $f(x) = 0$.

3.4 *Grafisk løsning af ligninger*

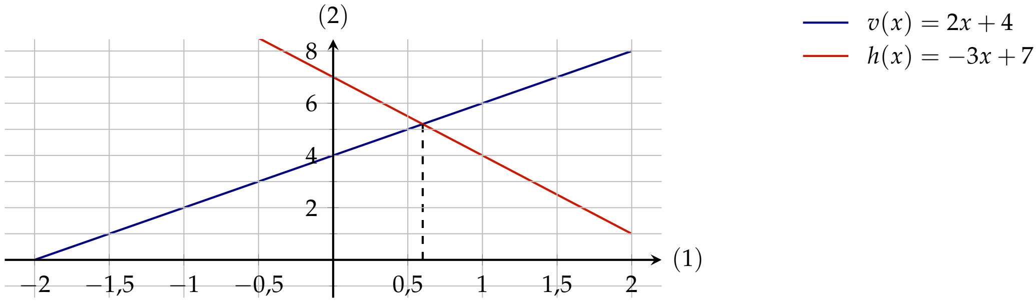
En ligning kan også løses grafisk.

■ **Eksempel 58** Ligningen $-2x + 8 = 4$ kan repræsenteres grafisk ved at se på grafen for de to funktioner $v(x) = -2x + 8$ og $h(x) = 4$ for venstre og højre side.



Løsningen til ligningen er førstekoordinaten til skæringspunktet mellem de to grafer. I dette eksempel er løsningen $x = 2$. ■

■ **Eksempel 59** Ligningen $2x + 4 = -3x + 7$ kan repræsenteres grafisk ved at se på grafen for de to funktioner $v(x) = 2x + 4$ og $h(x) = -3x + 7$



■

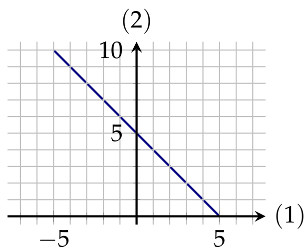
Øvelse 79 Løs ligningerne grafisk.

a) $2x - 4 = -0{,}5x + 1$ b) $-x + 1 = 2x + 7$

c) $4x - 1 = -x + 9$ d) $x - 2 = x - 1$

Opgaver med grafisk løsning af ligninger.

Øvelse 80 Figur 3.1 viser en del af grafen for en lineær funktion. Bestem $f(-4)$ og løs ligningen $f(x) = 2$.



Figur 3.1: Øvelse 80

3.5 *Ligninger med flere løsninger*

En anden type af ligninger er dem som er bygget op af faktorer og som er lig 0, fx

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

her er løsningen nem at finde ved at bruge nulreglen.

Sætning 5 — Nulreglen. Et produkt er 0 hvis og kun hvis mindst en af faktorerne er 0.

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$\vee$ betyder eller.

■ **Eksempel 60** Ligningen $(x + 3)(x - 5) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$(x + 3)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$$

■

■ **Eksempel 61** Ligningen $3 \cdot (x-2)(8+x) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-2)(8+x) = 0 &\Leftrightarrow x-2=0 \vee 8+x=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \vee x=-8 \end{aligned}$$

■

■ **Eksempel 62** Ligningen $(x^2+3)(x-4) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} (x^2+3)(x-4) = 0 &\Leftrightarrow x^2+3=0 \vee x-4=0 \\ &\Leftrightarrow x^2=-3 \vee x=4 \\ &\Leftrightarrow x=4 \end{aligned}$$

Da x^2 aldrig kan være negativ så har ligningen kun denne ene løsning. ■

■ **Eksempel 63** Ligningen $x \cdot (x^2-7)(x+4) = 0$ kan løses ved brug af nulreglen.

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2-7)(x+4) = 0 &\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-7=0 \vee x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=7 \vee x=-4 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{7} \vee x=\sqrt{7} \vee x=-4 \end{aligned}$$

Da både $\sqrt{7}$ og $-\sqrt{7}$ løser ligningen $x^2=7$, har ligningen fire løsninger. ■

Øvelse 81 Løs ligningerne.

a) $(x-2)(x+1)=0$

b) $(x+5)(x-9)=0$

c) $5(x-3)(x+1)=0$

d) $x(x+2)(x-5)=0$

e) $(x^2-9)(x+2)=0$

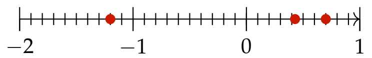
f) $(x+5)(x-7)(x+1)=0$

g) $(x^2+2)(x^2+3)=0$

h) $x(x+2)(x^2+2)(x^3-1)=0$

Facitliste

Tal

Øvelse 1 

Øvelse 2 20 % af figuren er rød.

Øvelse 3 35 %

Øvelse 4 a) 15, b) 60, c) 40, d) 15, e) 52,5, f) 225

Øvelse 5 300, 120 og 780 vil vælge de tre abonnementer.

Øvelse 6 De er lige store og det gælder i alle forhold fordi y% af x beregnes som $\frac{y \cdot x}{100}$ og x% af y beregnes som $\frac{x \cdot y}{100}$ og $\frac{y \cdot x}{100} = \frac{x \cdot y}{100}$ fordi $x \cdot y = y \cdot x$ (den kommutative lov).

Øvelse 7 a) 250 kr., b) 24 kr.

Øvelse 8 Jeans'ene koster nu 1 080 kr.

Øvelse 9 a) 22,5, b) 285, c) 160, d) 48,75, e) 63,75, f) 510

Øvelse 10 125 % af 65 er 81,25 og det sammen bliver 25 % af 65 lagt til 65 fordi, 25 % af 65 er $0{,}25 \cdot 65 + 65 = (1 + 0{,}25) \cdot 65 = 1{,}25 \cdot 65$ der er 125 % af 65.

Øvelse 11 Det sorte par jeans er sat mest ned absolut med 225 kr. Det pink par er sat mest ned relativt med ca. 18%

Øvelse 12 10 %

Øvelse 13 a) 60 %, b) -5 %, c) 20 %, d) 18 %

Øvelse 14 a) $y = k \cdot (x + z)$, b) $(y + x) = k \cdot \frac{x}{y}$, c) $(x - y) = k \cdot \sqrt[3]{y}$, d) $\frac{x}{y} = \sqrt{x \cdot y}$

Øvelse 15 a) x er proportional med kvadratroden af x, b) Summen af kvadraterne af x og y er proportional med kvadratet af y, c) x er proportional med kubikroden af y, d) Kvadratet af summen af x og y er proportional med kubikroden af x, e) Summen af kvadrater af x og y er proportional med differencen mellem x og y, f) Forholdet mellem x og y er proportionalt med kvadratroden af summen af x og y, g) Forholdet mellem x og y er proportionalt med produktet af x og y, h) Kvadratet af y er proportionalt med y.

Øvelse 16 a) -7, b) 25, c) 13, d) -18, e) 4, f) 75, g) -11, h) $\frac{163}{4}$

Øvelse 17 a) x^2, b) x^5, c) x^{12}, d) $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$, e) 1, f) 1

Øvelse 18 a) x^2, b) x^{-2}, c) y^2, d) $\frac{1}{y}$, e) x^5, f) $\frac{x^2}{a^3}$

Øvelse 19 a) $3a$, b) a, c) a, d) ac, e) $\frac{1}{a}$, f) $b + d$, g) $2a^2$, h) $bc - ab$

Øvelse 20 a) $x^2 + y^2 + 2xy$, b) $2x^2 + 3xy + y^2$, c) $xy + 2x + 2y + 4$, d) $10x^2 + 23xy + 12y^2$, e) $x^2 - y^2$, f) $x^2 - 2xy - 3y^2$, g) $x^2z - y^2z + 5x^2 - 5y^2$, h) $6x^2 + 10xy + 18x + 20y + 12$

Øvelse 21 a) $x(4y + 3)$, b) $2x(3y + 1)$, c) $3x(x + 2y)$, d) $2(2x + 3b + 4c)$, e) $3xy(y - 3)$, f) $3xy(y - 3)$, g) $7x^3y^3(2x - 3y)$, h) $(x + 3)(y + 3)$

Øvelse 22 a) $t^2 + r^2 + 2tr$, b) $t^2 - r^2$, c) $4x^2 + r^2 - 4xr$, d) $x^2 + 16y^2 + 8xy$, e) $-r^2 - 2tr - t^2$, f) $-r^2 + 2tr - t^2$

Øvelse 23 a) $9x^2 - 30xy + 25y^2$, b) $9x^2 + 30xy + 25y^2$, c) $r^2 + 6tr + 9t^2$, d) $16r^2 - t^2$, e) $9r^2 - 18xr + 9x^2$, f) $r^4 - 4r^2x + 4x^2$, g) $x^2 + 6x + 9$, h) $x^2 - 2x - 8$

Øvelse 24 $\frac{3}{5}$, $\frac{60}{100}$, 60 %

Øvelse 25 a) 6, b) $\frac{2b}{5}$, c) 1,5, d) 2

Øvelse 26 a) $\frac{28}{3}$, b) $\frac{8b}{3}$, c) 2, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{2}{3}$, f) $\frac{a}{b}$

Øvelse 27 a) 2, b) 2, c) $\frac{41}{15}$, d) $\frac{9x^2+y^2}{3xy}$

Øvelse 28 a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{x}{y}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{9}{8}$, e) $\frac{3x}{2y}$, f) $\frac{b+x}{c}$, g) $\frac{ab}{cx}$, h) $\frac{ab+cx}{ca}$

Øvelse 29 $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Øvelse 30 a) $5x+2$, b) $3x+9$, c) 3, d) $\frac{3}{4}$

Øvelse 31 a) 9 og 16, b) 6 og 8, c) 75 og 77, d) 50 og 52, e) 7 og 8, f) 54 og 55

Øvelse 32 Det er mellem 5 og 6, men det er tættest på 6.

Øvelse 33 a) For $x=0$ er $7\cdot 0-3=-3$ og for $x=1$ er $7\cdot 1-3=4$ da den skifter fra at være negativ til positiv må den være 0 mindst et sted i mellem 0 og 1. b) For $x=1$ er $1^2-5\cdot(1)+5{,}25=1{,}25$ og $x=2$ er $2^2-5\cdot(2)+5{,}25=-0{,}75$ og for $x=4$ er $4^2-5\cdot(4)+5{,}25=1{,}25$ og da $x^2-5\cdot x+5{,}25$ skifter fra positiv til negativ og derefter til positiv. Derfor må $x^2-5\cdot x+5{,}25$ være 0 mindst to steder mellem 1 og 4.

Øvelser 34 $1{,}2\cdot 10^{12}$ der på dansk vil hedde 1,2 billioner søgninger og på engelsk 1,2 trillion searches.

Øvelse 35 $2\cdot 10^{-8}$ m.

Øvelse 36 $\frac{10^3}{3\cdot 10^{-23}}=\frac{1}{3}\cdot 10^{26}$ molekyler.

Lineære funktioner

Øvelse 37 a) Ja, b) Nej, c) Nej, d) Ja

Øvelse 38 a) $y=1{,}2x+5{,}5$, hvor x er antallet af år efter 2006 og y er prisen på ét kilogram kartofler.
b) $y=0{,}4x+5{,}5$, hvor x er antallet af år efter 2001 og y er eksporten af grise i mio.
c) $y=-2x+45$, hvor x er antallet af gange Dennis P. har løbet 5 km og y er tiden i min.
d) $y=-55000x+900000$, hvor x er antallet af år efter 2004 og y er antallet af rygere.
e) $y=45x+230$, hvor x er antallet af timer bilen køre og y er den samlede afstand bilen har kørt.

Øvelse 39 a) En bil accelererer med 1,2 km/t pr sekund og nu kører den 35 km/t. b) En video på YouTube vises 240 gange i timen efter den er offentligtgjort.

Øvelse 40 a) Effekten af en vindmølle er 12 kW når vindhastigheden er 4 m/s og effekten vokser med 110 kW når vindhastigheden voksen med 1 m/s indtil vindhastigheden er 15 m/s. b) En bambus er 5 cm efter 1 dag og herefter voksen den med 2,3 cm pr. dag til den er 20 dage.

Øvelse 41 a) 18, b) 3, c) 4, d) -7, e) 9, f) 3, g) 9, h) -14

Øvelse 42

a)

x	-5	1	4	4
$2x+1$	-9	3	9	9

b)

x	-5	1	8	4
$-3x-1$	14	-4	-25	-13

c)

x	-4	2	5	3
$4x+5$	-11	13	25	17

d)

x	-3	3	8	4
$-4x+4$	16	-8	-28	-12

e)

x	-3	3	7	5
$3x-2$	-11	7	19	13

f)

x	-4	2	6	4
$-3x+1$	13	-5	-17	-11

g)

x	-4	2	7	5
$5x$	-20	10	35	25

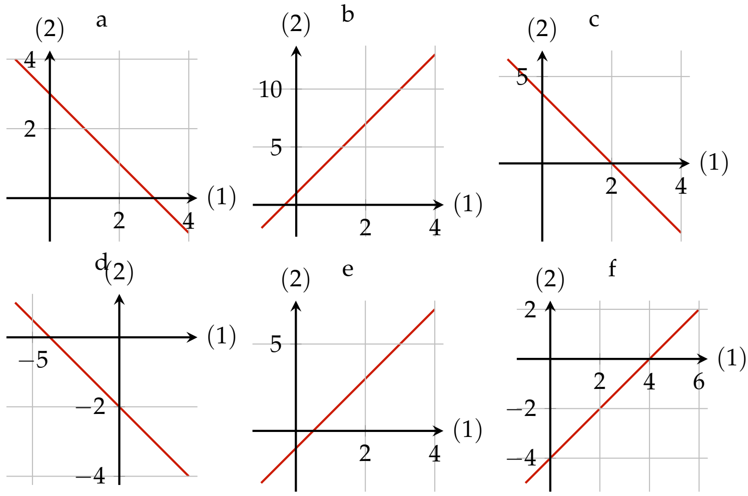
h)

x	0	1	2	3
$x-4$	-4	-3	-2	-1

i)

x	0	1	2	3
$-2x+4$	4	2	0	-2

Øvelse 43

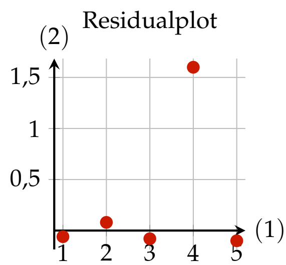


Øvelse 44 $f(5) = 125$ derfor ligger punktet (5,120) ikke på grafen for f. $f(0{,}1) = 27$ derfor ligger punktet $(0.1, 27)$ på grafen for f.

Øvelse 45

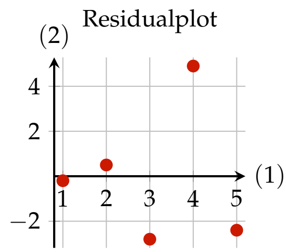
a)

X	1	2	3	4	5
observationsværdi	1	2,2	3,1	4,4	5,2
modelværdi	1,06	2,12	3,18	4,24	5,3
residual	-0,06	0,08	-0,08	0,16	-0,1



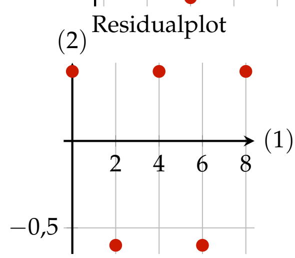
b)

X	1	2	3	4	5
observationsværdi	14	29	40	62	69
modelværdi	14,2	28,5	42,8	57,1	71,4
residual	-0,2	0,5	-2,8	4,9	-2,4



c)

X	0	2	4	6	8
observationsværdi	10	7	6	3	2
modelværdi	9,6	7,6	5,6	3,6	1,6
residual	0,4	-0,6	0,4	-0,6	0,4



Øvelse 46 A I plot A er der lige mange punkter over og under (1)-aksen, men under (1)-aksen ligger næsten alle punkter mindre end én spredning fra (1)-aksen. Fordeligen af residualerne er derfor skæv.

Øvelse 46 B — I plot B er der lidt flere punkter under (1)-aksen, og under (1)-aksen ligger næsten alle punkter mindre end én spredning fra (1)-aksen. Fordeligen af residualerne er derfor skæv. Der er også flere outlieres.

Øvelse 46 C — I plot C er der lige mange punkter over og under (1)-aksen, men der er lige mange punkter i de to intervaller 0-1 spredning og 1-2 spredning. Fordeligen af residualerne er derfor uniform.

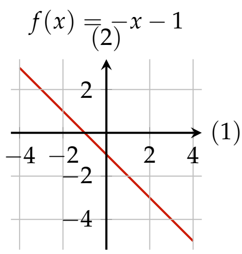
Øvelse 46 D — I plot D er der lige mange punkter over og under (1)-aksen, men spredningen af punkterne afhænger af den afhængige variabel. Der er flere outlieres.

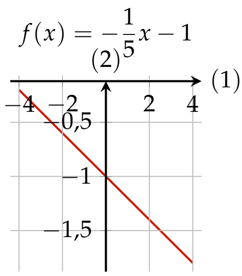
Øvelse 46 E — I plot E er der lige mange punkter over og under (1)-aksen, men punkterne samler sig ikke om (1)-aksen, men derimod om *to* andre værdier.

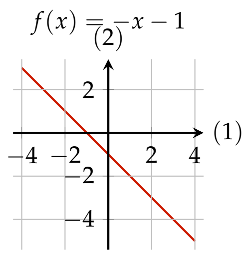
Øvelse 46 F — I plot F er der lige mange punkter over og under (1)-aksen, men punkterne samler sig ikke om (1)-aksen, men derimod om en ikke lineær kurve.

Øvelse 47 — Den grønne graf er grafen for f fordi grafen skærer (2)-aksen i 1 og grafen er aftagende. Den Blå graf er grafen for g fordi den skærer (2)-aksen i -4 og den har en større hældning end den røde graf der er grafen for h.

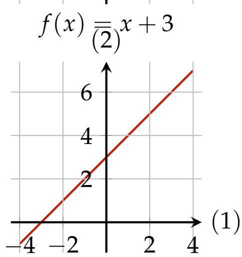
Øvelse 48 - 50







Øvelse 51



Øvelse 52 — Punktet (3,5) fordi grafen kan ikke være lodret.

Øvelse 53 — a) $a = \frac{1}{2}$ og $b = -2$. b) Ligningen er derfor $y = \frac{1}{2}x - 2$. c) (6,1) ligger på grafen og (12,5) og $(-14, -10)$ ligger ikke på grafen.

Øvelse 54 — Forskriften er $f(x) = -x + 3$.

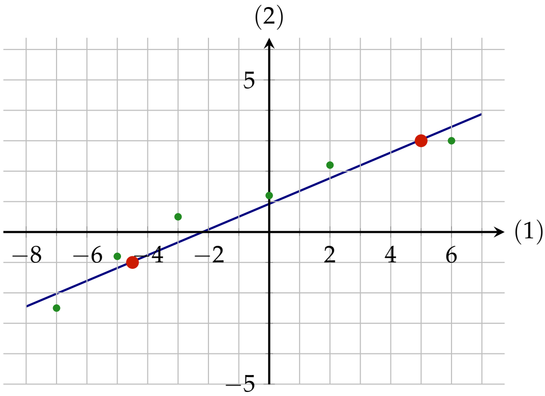
Øvelse 55 — a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = 0{,}1x + 0{,}5$, c) $f(x) = -0{,}5x + 5$, d) $f(x) = 5{,}25x - 35$, e) $f(x) = -x + 8$, f) $f(x) = x$, g) $f(x) = 0{,}25x + 34{,}5$, h) $f(x) = -x - 2$

Øvelse 56-59 — 56) $f(x) = 2x + 1$, 57) $f(x) = -x + 1$, 58) $f(x) = x - 4$, 59) $f(x) = -0{,}5x + 2$

Øvelse 60 — Startgebyret er 54 kr. og kilometertaksten er 6 kr.

Øvelse 61 — Startgebyret er 150 kr og minuttaksten er 6,66 kr.

Øvelse 62

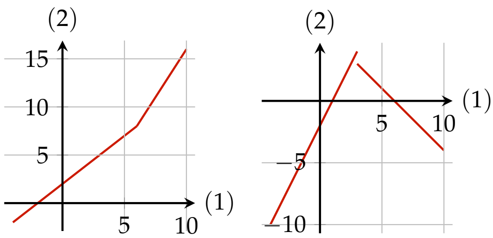


Punkterne er $(-4.5, -1)$ og $(5{,}3)$. $a = \dfrac{8}{19}$ og $b =$. Forskriften bliver $f(x) = \dfrac{8}{19}x + \dfrac{17}{19}$.

Øvelse 63 a) $v = k \cdot q$, b) $y = k \cdot (r + q)$, c) $r = 6 \cdot (n - m)$, d) $f = k \cdot \dfrac{p}{q}$, e) $E = m \cdot c^2$, f) $E = k \cdot O$

Øvelse 64 $f(10) = 11$ og for $f(x) = 3$ er $x = 2$ eller $x = 5$.

Øvelse 65-66



Øvelse 67 $f(x) = \begin{cases} -x + 5, & x \leq 4 \\ -\dfrac{1}{2}x + 3, & x > 4 \end{cases}$

Øvelse 68-70 68) $x = -2$ eller $x = 4$. 69) $x = -2$ eller $x = \dfrac{17}{2}$. 70) $x = 2$.

Ligninger

Øvelse 71 $x = \dfrac{3}{5}$

Øvelse 72 a) $x = \dfrac{1}{2}$, b) $x = \dfrac{1}{3}$, c) $x = \dfrac{7}{2}$, d) $x = \dfrac{2}{3}$, e) $x = \dfrac{8}{9}$, f) $x = -1$, g) $x = -7$, h) $x = 3$, i) $x = -\dfrac{4}{3}$

Øvelse 73-76 73) $x = -1$, 74) $x = \dfrac{6}{5}$ 75) $x = \dfrac{9}{4}$, 76) 160 kr.

Øvelse 77 a) $x = 2y$, b) $x = 2 - b$, c) $x = \dfrac{2q - 7}{3}$, d) $x = -\dfrac{7}{4}$, e) $x = \dfrac{3}{a + 4}$, f) $x = -\dfrac{c}{a - 4}$, g) $x = \dfrac{2c}{a} + d$, h) $x = \dfrac{y - 5}{3}$, i) $x = 1 - \dfrac{3}{4}y$

Øvelse 78 a) 6, b) 4, c) -2, d) 5, e) $\dfrac{1}{2}$, f) -3, g) 8, h) 0

Øvelse 79 a) 2, b) -2, c) 2, d) Ingen løsning da de to rette linjer er parallelle.

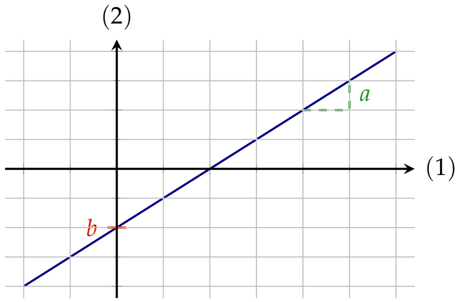
Øvelse 80 $f(-4) = 9$ og $f(x) = 2$ når $x = 3$.

Øvelse 81 a) $2, -1$, b) $-5, 9$, c) $3, -1$, d) $0, -2, 5$, e) $-3, 3, -2$, f) $-5, 7, -1$, g) Ingen løsninger, h) $0, -2, 1$

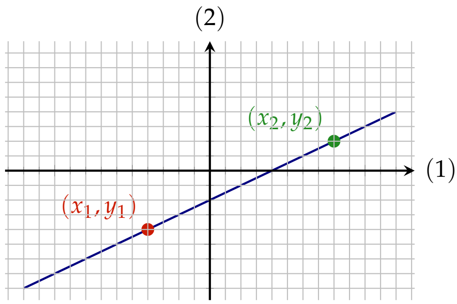
Formelsamling

Brøker			
$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d}$	Addition og substraktion
$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	Multiplikation
$\frac{a}{d} / \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	Division
$\frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$	Forlæng og forkort
Potenser			
$x^s \cdot x^t$	$=$	x^{s+t}	
$\frac{x^s}{x^t}$	$=$	x^{s-t}	
$(x^s)^t$	$=$	$x^{s \cdot t}$	
$(x \cdot y)^s$	$=$	$x^s \cdot y^s$	
$\left(\frac{x}{y}\right)^s$	$=$	$\frac{x^s}{y^s}$	
x^0	$=$	1	
x^{-s}	$=$	$\frac{1}{x^s}$	
$\sqrt[s]{x}$	$=$	$x^{\frac{1}{s}}$, hvor $x > 0$	
$\sqrt[s]{x^t}$	$=$	$x^{\frac{t}{s}}$, hvor $x > 0$	
Parenteser			
$x \cdot (a+b)$	$=$	$a \cdot x + b \cdot x$	Distributive lov
$(a+b)^2$	$=$	$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$	1. Kvadratsætning
$(a-b)^2$	$=$	$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$	2. Kvadratsætning
$(a+b) \cdot (a-b)$	$=$	$a^2 - b^2$	3. Kvadratsætning

Lineære funktioner



$$f(x) = a \cdot x + b$$



a	$=$	$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Hældningskoefficient
b	$=$	$y_1 - a \cdot x_1$	2. Skæringspunktet med 1. aksen er $(0,b)$
a	$>$	0	Funktionen er voksende
a	$=$	0	Funktionen er konstant
a	$<$	0	Funktionen er aftagende

Ligninger

$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$x + y + a = z + a$	Ligning adderet med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$x + y - a = z - a$	Ligning subtraheret med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$ax + ay = az$	Ligning multipliceret med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{z}{a}$	Ligning divideret med a

Multiplikationstabel

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

ISBN 978-87-93632-02-8

9 788793 632028