Algebra og lineære funktioner

Matematik i grundforløbet

matX

2021

Algebra og lineære funktioner

3. udgave, 1. oplag
Udgivet af
matX ApS
Hvidovrevej 96
DK-2650 Hvidovre
dp@matx.dk

ISBN 978-87-93632-05-9

Forord

I denne bog, der er tænkt som indledende til stx, vil der være fokus på

- regningsarternes hierarki og simpel symbolbehandling
- regning med potenser og parenteser
- procentregning, absolut og relativ ændring
- lineære funktioner repræsenteret ved deres grafiske forløb, regneforskrift, tabeller og sproglig beskrivelse
- ligningsløsning af førstegradsligninger med algebraiske og grafiske metoder
- opstilling af lineære modeller og principielle egenskaber ved matematiske modeller
- samarbejde med naturvidenskabeligt grundforløb om regression i Excel

Materialet er udviklet til at kunne gennemføres uden brug af matematiske værktøjsprogrammer ud over Excel i forbindelse med regression, så eleverne har mulighed for at forstå principperne i de metoder, der gennemgås. Men eleverne kan selvfølgelig supplere deres papir og blyant med et matematisk værktøjsprogram undervejs eller efter hvert forløb.

Materialet indeholder links til videoer på youtube.com, der gennemgår eksempler eller beviser. Links er repræsenteret ved QR-koder.

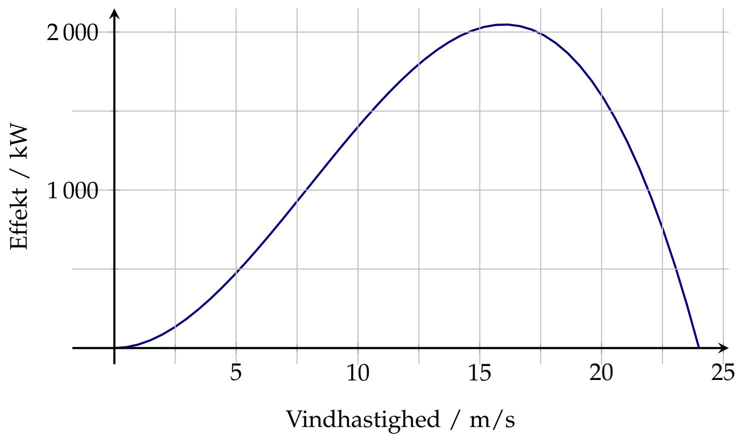
Indhold

1
Lineære funktioner

1.1 Sammenhænge og funktioner

Videnskabsfolk, politikere og andre er interesseret i sammenhænge. Hvad er sammenhængen mellem mængden af CO_2(g) i atmosfæren og den globale middeltemperatur? Hvordan udvikler Danmarks BNP sig over tid? Matematik kan benyttes til at beskrive sådanne sammenhænge præcist.

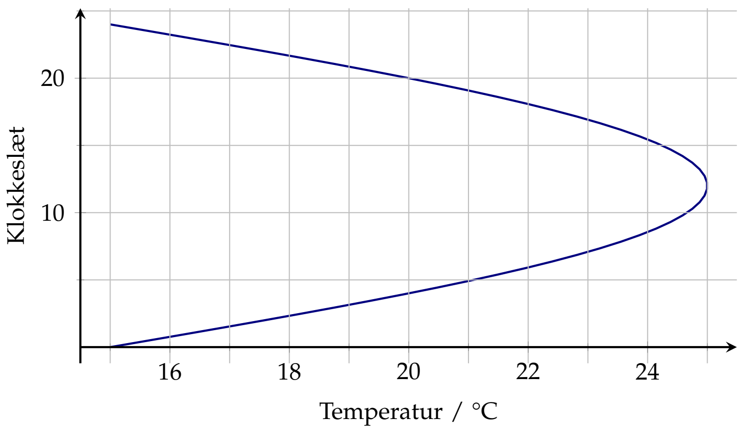
I matematik benyttes begrebet variabel om størrelser, der kan have forskellige værdier. En variabel vises med et bogstav. En variabel kan være vindhastighed. Det kan man vælge at betegne med bogstavet x. En variabel y kan afhænge af en anden variabel x. Eksempelvis afhænger effekten af en vindmølle af vindhastigheden. Effekten y er den afhængige variabel, og vindhastigheden x er den uafhængige variabel. Effekten $y = f(x)$ er en funktion af vindhastigheden x. Funktionen kan der tegnes en graf for.



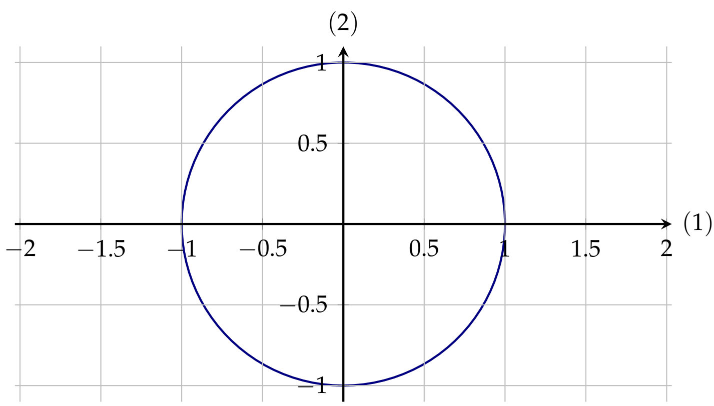
Matematisk defineres en funktion på følgende måde:

Definition 1 — Funktion. En variabel y er en funktion af en anden variabel x, hvis der til hver x-værdi hører en bestemt y-værdi. Denne værdi kaldes funktionsværdien, og man skriver $y = f(x)$. $f(x)$ udtales »f af x«.

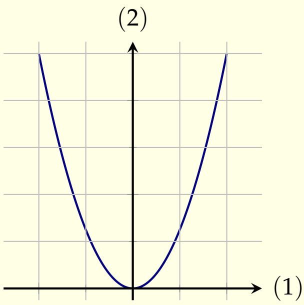
Det er ikke alle sammenhænge, der kan beskrives med en funktion. Det er en betingelse, at der til hver uafhængig værdi findes maksimalt én afhængig værdi. Som eksempel på en sammenhæng, der ikke kan beskrives med en funktion, er sammenhængen mellem temperaturen og tidspunktet på dagen. Som det ses på grafen herunder, er der to tidspunkter, hvor temperaturen er 20°C.

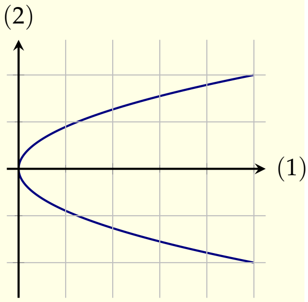


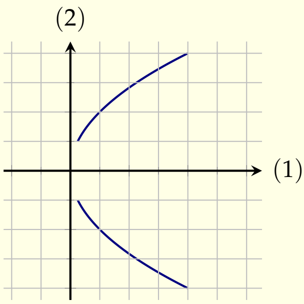
Et andet eksempel er en cirkel. Den er heller ikke graf for en funktion.

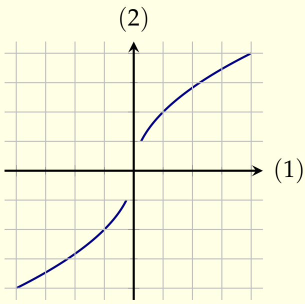


Øvelse 1 Afgør, om følgende er grafen for en funktion.

a) 

b) 

c) 

d) 

1.2 *Lineær funktion*

En lineær funktion $y = f(x)$ har en afhængig variabel y og en uafhængig variabel x, og den kan skrives på formen

$$y = a \cdot x + b$$

hvor a og b er tal. Da $y = f(x)$, kan den også skrives

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret. Alle rette linjer, der ikke er lodrette, er graf for en lineær funktion.

Sammenhængen mellem funktionen og grafen er, at når x vokser med 1, vokser $f(x) = ax + b$ med a, og konstanten b angiver grafens skæringspunkt med 2.-aksen.

Definition 2 — Forskrift for lineær funktion. En funktion med regneforskrift:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

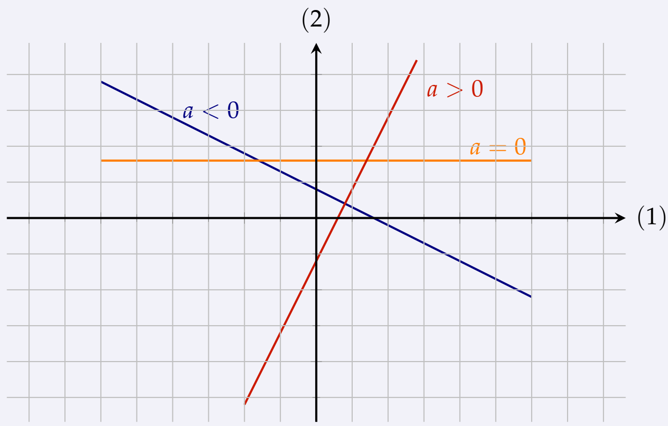
hvor a kaldes hældningskoefficienten, og b kaldes konstantleddet, er en lineær funktion.

1.2.1 *Sammenhæng mellem graf og a og b*

Tidligere påstod vi, at grafen for en lineær funktion var en ret linje, der ikke er lodret. Nu vil vi bevise, at det er sådan. Konstanterne a og b i den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ og grafen for den lineære funktion hænger sammen.

Videogennemgang af konstanterne a og b's betydning for grafens forløb.

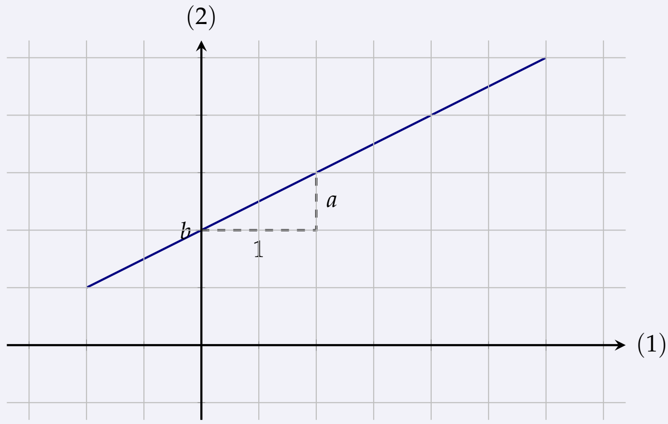
Sætning 1 Når a er positiv, er grafen voksende, og når a er negativ, er grafen aftagende. Hvis a er nul, er grafen konstant/ vandret/ parallel med (1)-aksen.



Øvelse 2 Bevis sætningen for $a = 0$. Benyt, at for en konstant funktion gælder der, at for alle x_1, x_2 er $f(x_1) = f(x_2)$.

Øvelse 3 Bevis sætningen for $a \neq 0$. Benyt, at for en voksende funktion gælder der, at $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ og tilsvarede for en aftagende funktion.

Sætning 2 — Betydning af konstanterne. Når x vokser med 1, vokser $f(x) = a \cdot x + b$ med a, som derfor kaldes funktionens hældningskoefficient, og $(0, b)$ er grafens skæringspunkt med 2.-aksen.



■ **Bevis** Når x vokser med 1, så vokser $f(x) = ax + b$ med a, hvilket betyder at:

$$f(x+1) = f(x) + a$$

For at vise denne påstand beregnes $f(x+1)$. $f(x) = ax + b$ anvendes i starten og slutningen.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a \cdot (x+1) + b \\ &= a \cdot x + a + b \\ &= a \cdot x + b + a \\ &= f(x) + a \end{aligned}$$

Nu er det vist, at når x-værdien vokser med 1, vokser y-værdien med a. Hvis a er negativ, er der tale om et fald i funktionsværdien, og grafen er aftagende.

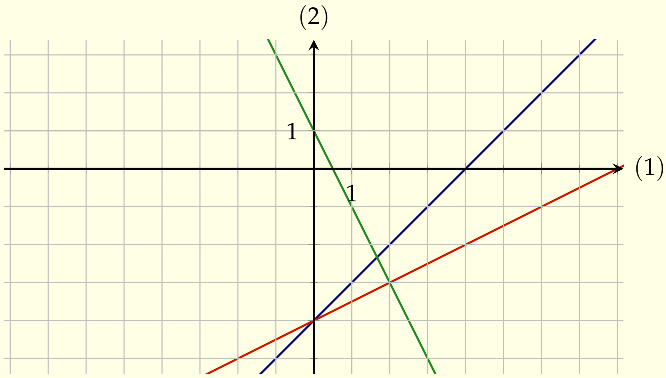
Nu skal det vises, at b er y-værdien til skæringspunktet med y-aksen. På y-aksen er $x = 0$, hvilket indsættes i funktionen $f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b \\ &= 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

■

Øvelse 4 På figuren ses tre grafer. Giv flere forskellige argumenter for, hvilken af disse tre forskrifter de er graf af.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x+1 \\ g(x) &= x-4 \\ h(x) &= 0,5x-4 \end{aligned}$$



Øvelse 5 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrant, og bestem forskriften for den.

Øvelse 6 Tegn grafen for en lineær funktion, der ikke ligger i 1. kvadrant og går gennem punktet $(5, -2)$, og bestem forskriften for den.

Øvelse 7 Tegn grafen for en aftagende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2, 1)$, og bestem forskriften for den.

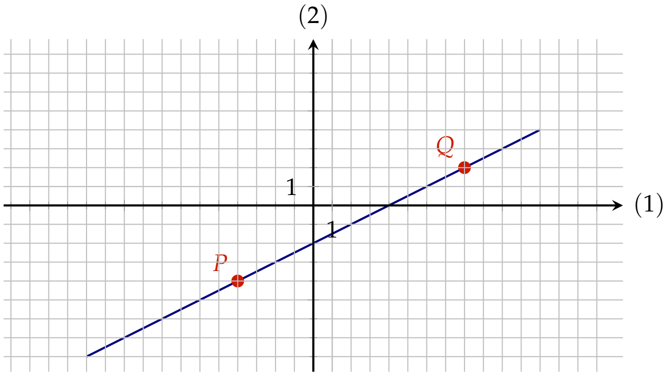
Øvelse 8 Tegn grafen for en voksende lineær funktion, der går gennem punktet $(-2, 1)$, og bestem forskriften for den.

Øvelse 9 Grafen for en lineær funktion går gennem punktet $(3, 4)$. Bestem mindst et punkt, som grafen ikke kan gå gennem.

1.2.2 *Bestem forskrift ud fra to punkter*

Når man har to punkter i en plan kan man altid tegne en ret linje gennem punkterne, og det kan kun gøres på én måde.

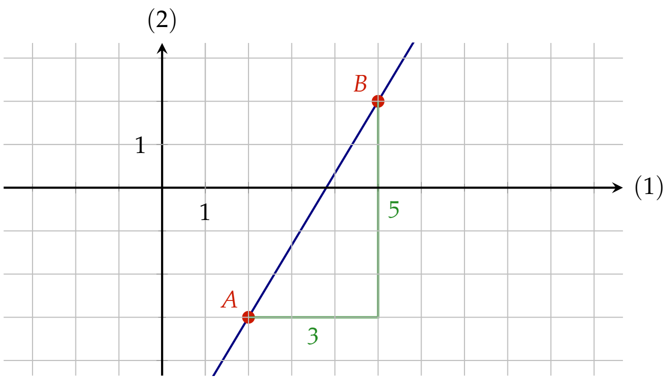
Eksempel 1 Punkterne $P(-4,-4)$ og $Q(8,2)$ er afsat i et koordinatsystem, og linjen gennem dem er tegnet.



Hvis punkterne ligger *pænt*, kan a og b aflæses på figuren. Her ses, at $a = \frac{1}{2}$, dvs. at man går $\frac{1}{2}$ op, når man går 1 til højre. For at tjekke det kan man i stedet gå 2 til højre og se, at man nu går 1 op. a kan aflæses til $\frac{1}{2}$ og b til -2.

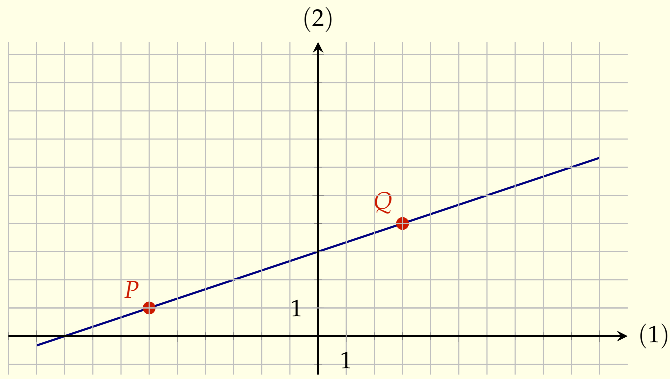
Man kan komme ud for, at det er vanskeligere at aflæse a.

Eksempel 2 En linje går gennem punkterne $A(2,-3)$ og $B(5,2)$. Vi vil gerne bestemme a og b. Først tegnes punkterne ind i et koordinatsystem, og linjen gennem dem tegnes.



Det ser ud til, at hældningskoefficienten a er ca. 1,7, men det må undersøges nærmere. Vi tegner derfor en retvinklet trekant, hvor hypotenusen er AB, og kateterne er lodret og vandret. Vi kan nu se, at når vi går 3 til højre, vil vi gå 5 op. Hvis vi kun går 1 til højre, må vi altså gå $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ op. Hældningskoefficienten er derfor $a = \frac{5}{3}$. Man finder altså a ved at dividere det lodrette stykke med det vandrette stykke.

Øvelse 10 En ret linje går gennem punkterne $P(-6, 1)$ og $Q(3, 4)$.



a) Aflæs a og b på grafen.

b) Angiv ligningen for grafen.

c) Undersøg, om punkterne $(12, 5)$ og $(-9, 0)$ ligger på grafen.

Det generelle tilfælde kan beskrives ved følgende sætning.

Sætning 3 — Topunkts-formlen for en lineær funktion. Den rette linje gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ har ligningen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor

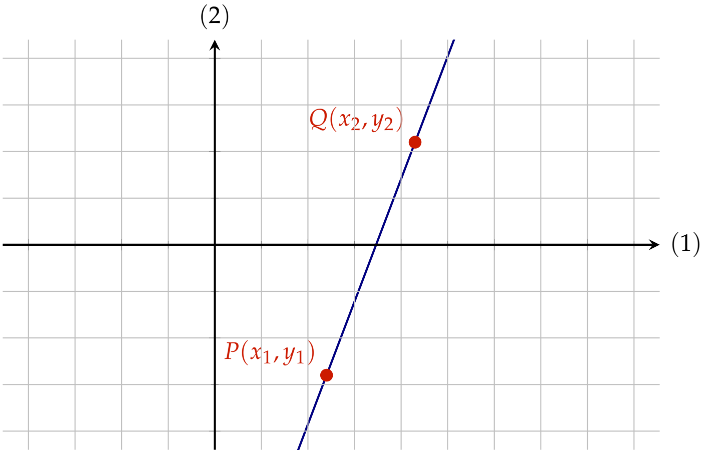
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Videogennemgang af bevis og eksempel

■ **Bevis** Linjen går gennem punkterne $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$. Det betyder, at når punkternes koordinater indsættes i linjens ligning $y = a \cdot x + b$, bliver udtrykket sandt.



Vi har altså, at $y_1 = a \cdot x_1 + b$ og $y_2 = a \cdot x_2 + b$. Vi trækker de to ligninger fra hinanden. Her bruger vi parenteser.

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

Først hæves parenteserne

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

Leddene $+b$ og $-b$ går ud med hinanden

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

De to led på højre siden af lighedstegnet har begge a som faktor. Vi kan derfor sætte a udenfor en parentes.

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Vi kan nu isolere a ved at dividere med $(x_2 - x_1)$ på begge sider af lighedstegnet.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Eller med andre ord at $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Konstanten b findes ved at indsætte det ene punkt i ligningen. Der er nu kun en ubekendt b i ligningen.

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \Leftrightarrow y_1 - a \cdot x_1 = b$$

Hermed er også b bestemt. ■

Dette resultat stemmer også med eksemplet, idet hældningen jo blev bestemt ved at tage »tilvæksten i y« delt med »tilvæksten i x«. Det kan man også skrive:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vi ser igen på eksemplet fra før.

Videogennemgang af eksempel på beregning af a og b.

Eksempel 3 En linje går gennem punkterne $A(2,-3)$ og $B(5,2)$. Vi navngiver $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ og indsætter i formlen

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-(-3)}{5-2} = \frac{5}{3} \\ b &= y_1 - ax_1 = -3 - \frac{5}{3}\cdot 2 = -\frac{9}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

Ligningen for den rette linje er altså $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$.

Øvelse 11 Grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ går gennem de to punkter $A(-2,5)$ og $B(4,-1)$. Bestem en forskrift for f.

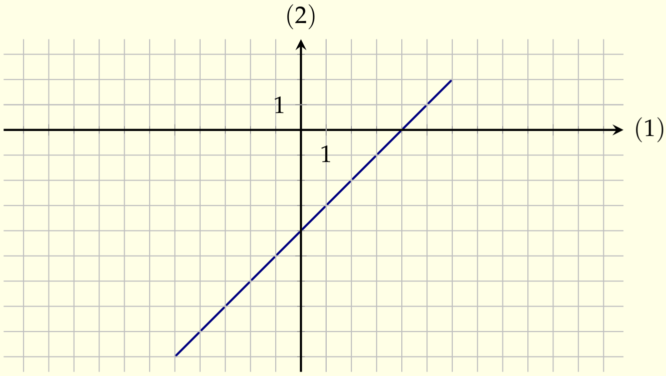
Øvelse 12 Grafen for den lineære funktion f går gennem punkterne. Bestem en forskrift for f.

a) $(3,6)$ og $(2,4)$
b) $(5,1)$ og $(15,2)$
c) $(2,4)$ og $(4,3)$
d) $(8,7)$ og $(12,28)$
e) $(4,4)$ og $(6,2)$
f) $(-2,4)$ og $(8,5)$
g) $(10,37)$ og $(70,52)$
h) $(2,-4)$ og $(-5,3)$

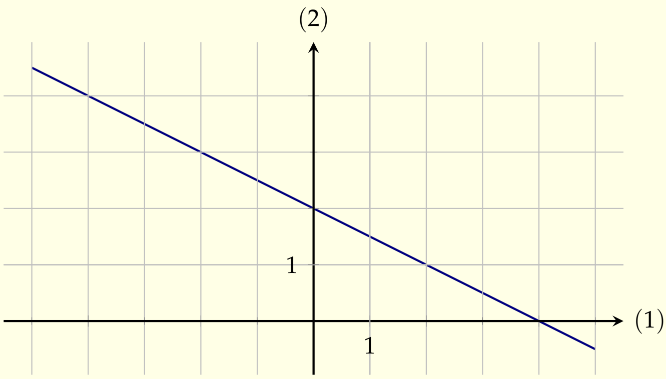
Øvelse 13 Bestem forskriften for en lineær funktion med hældning 2, hvor grafen går gennem punktet $(3,7)$.

Øvelse 14 Bestem forskriften for en lineær funktion med hældning -1, hvor grafen går gennem punktet $(-3,4)$.

Øvelse 15 Bestem en forskrift for den funktion, hvis graf ses på figuren.



Øvelse 16 Bestem en forskrift for den funktion, hvis graf ses på figuren.



Video med eksempel på bestemmelse af forskriften for en lineær funktion ud fra grafen.

Øvelse 17 Jeg har været ud at køre med taxa to gange. Den ene gang kørte jeg 11 km og betalte 120 kr., og den anden gang kørte jeg 16 km og betalte 150 kr.

Bestem startgebyret og kilometertaksten.

Øvelse 18 Jeg har fået onlinehjælp til at løse to skoleopgaver. Den ene gang fik jeg hjælp i 30 minutter og betalte 350 kr., og den anden gang fik jeg hjælp i 45 minutter og betalte 450 kr.

Bestem minuttaksten og startgebyret.

1.3 *Proportionalitet*

Definition 3 — Proportional. De to variable x og y siges at være ligefrem proportional, hvis $y = k \cdot x$ eller

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = k \cdot x$$

Proportional betyder, at forholdet mellem x og y er konstant. k kaldes proportionalitetsfaktoren.

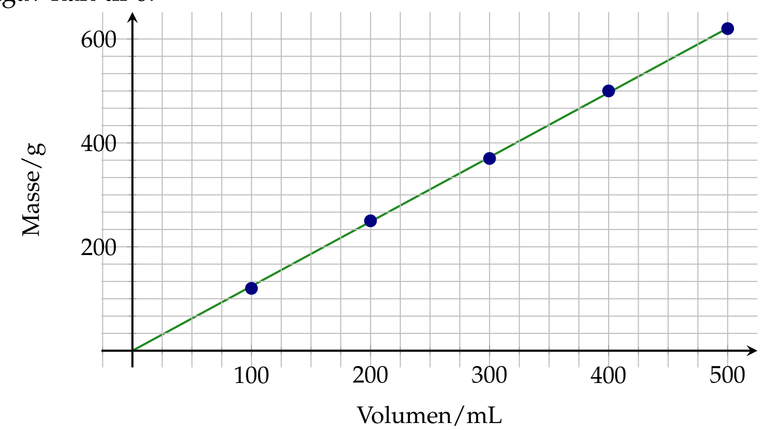
En proportional sammenhæng $y = k \cdot x$ er en lineær sammenhæng, hvis graf går gennem $(0, 0)$. Hældningen på grafen er proportionalitetsfaktoren. Dette kan fx bruges til at finde densiteten af en væske.

For at finde densiteten af saltvandet i det døde hav har Dennis P. været ved det døde hav, hvor han fyldte sin drikkedunk med saltvand. Da han kom hjem, vejede han 100 mL, 200 mL, 300 mL, 400 mL og 500 mL saltvand. Han lavede følgende tabel:

volumen / mL	100	200	300	400	500
masse / g	120	250	370	500	620

Video med eksempel på ligefrem proportionalitet

Derefter lavede han denne graf i Excel. Tendenslinjens skæring angav han til 0.



Hældningen ses ved at vise ligningen i diagrammet. Den er 1,2418 g/mL.

Det betyder, at densiteten af vandet i det døde hav er ca. 1,24 g/mL. Fortolkningen af en 'b'-værdi er vægten af 0 mL væske og den skal være 0 g, derfor skal grafen gå gennem punktet $(0, 0)$. Denne type af sammenhænge kaldes ligefrem proportionale. Hvis 'b'-værdien er forskellige fra 0 kaldes sammenhængen proportional.

Øvelse 19 Dennis P.'s ven Thomas J. har været i Middelhavet og har indsamlet en vandprøve, som han analyserer, og han får følgende data:

volumen / mL	100	200	300	400	500
masse / g	105	215	335	435	555

a) Indsæt punkterne i Excel, og indsæt en tendenslinje med skæring i 0.

b) Bestem densiteten af vandet fra Middelhavet ud fra hældningen på tendenslinjen.

Eksempel 4 p er ligefrem proportional med y med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{4}$. Det betyder, at

$$p = \frac{1}{4} \cdot y$$

Øvelse 20 Oversæt disse sætninger til matematiske formler.

a) v er ligefrem proportional med h med proportionalitetsfaktoren q.

b) y er ligefrem proportional med summen af r og q.

c) r er ligefrem proportional med differensen af n og m med proportionalitetsfaktoren 6.

d) f er ligefrem proportional med forholdet mellem p og q.

e) Energien E er ligefrem proportional med lysets hastighed c i anden med proportionalitetfaktoren m for massen.

f) Udnyttelsen af energien E i sollyset er ligefrem proportional med kvadratet på overfladearealet O af solcellerne.

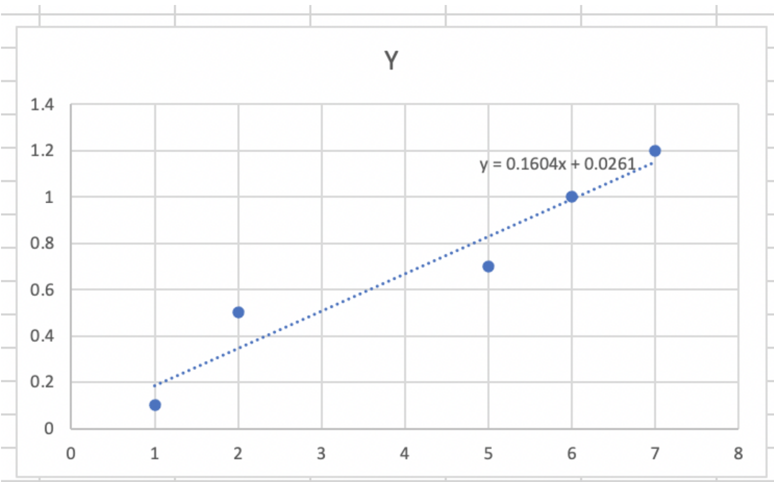
1.4 *Lineær regression*

I en situation, der indvolverer virkeligheden, er det meget sandsynligt, at andre faktorer og måleusikkerhed påvirker resultaterne, så den observerede sammenhæng ikke helt præcist kan beskrives med en lineær funktion. For at løse dette problem anvendes lineær regression. Ved lineær regression findes den lineære funktion, hvor den gennemsnitlige forskel mellem målingerne og funktionen er mindst mulig. Dette gøres i et computerprogram, fx Excel.

X	1	2	5	6	7
Y	0,1	0,5	0,7	1	1,2

- Først indtastes data i et regneark.
- Derefter indsættes et xy-punktdiagram.
- Derefter indsættes en tendenslinje.
- Endelig vises ligningen for tendenslinjen i diagrammet.

Når det er færdigt, skulle det se således ud.



Efter at grafen er fremstillet, er det vigtigt at indsætte en titel og sætte navne og enheder på begge akser. Dette hjælper også i fortolkningen af konstanterne i modellen.

Øvelse 21 Dennis P. har lavet et forsøg, hvor han bestemte densiteten af en væske. Ved forsøget fik han følgende målinger.

Volumen i mL	1	2	3	4	5
Massen i gram	1	2,2	3,1	4,4	5,2

Det antages, at der er en lineær sammenhæng mellem volumen og masse af væsken.

a) Skriv data ind i Excel, og bestem tendenslinjen.

b) Forklar betydningen af konstanterne i forskriften for tendenslinjen. I forklaringen skal tallene indgå sammen med volumen og massen.

Øvelse 22 Udviklingen i antallet af nye visninger af en video på Youtube ses i tabellen.

Timer efter upload	1	2	3	4	5
Antal visninger	15	32	40	62	69

a) Skriv data ind i Excel, og bestem tendenslinjen.

b) Forklar betydningen af konstanterne i forskriften for tendenslinjen. I forklaringen skal tallene indgå sammen med timer og antal visninger.

Øvelse 23 I tabellen ses udviklingen i antallet af danskere, der ikke har en mobiltelefon

Årstal	2011	2013	2015	2017	2019
Antal (tusinder)	10	7	6	3	2

a) Skriv data ind i Excel, og bestem tendenslinjen.

b) Forklar betydningen af konstanterne i forskriften for tendenslinjen. I forklaringen skal tallene indgå sammen med år efter 2011 og antal i tusinder.

1.5 Transformation mellem repræsentationer

Funktioner kan repræsenteres på flere forskellige måder, der alle kan være nyttige afhængige af situationen. Det er derfor vigtigt at forstå alle repræsentationerne og at kunne oversætte mellem dem. Her ses på følgende fire repræsentationer af funktioner:

- Sproglig
- Symbolsk (forskrift)
- Tabel
- Grafisk

1.5.1 Sproglig og symbolsk beskrivelse

Dennis P's taxaselskab tager 20 kr. pr. kørt km og et startgebyr på 25 kr. Den samlede pris afhænger af det kørte antal kilometer.

Køres 1 km, koster det i alt $20\,\text{kr.} + 25\,\text{kr.} = 45\,\text{kr.}$ Efter 2 km koster det $2 \cdot 20\,\text{kr.} + 25\,\text{kr.} = 65\,\text{kr.}$. Kaldes det kørte antal kilometer for x og den samlede pris for y, er forskriften for sammenhængen mellem x og y:

$$y = 20x + 25$$

Denne forskrift rummer de samme informationer om sammenhængen mellem pris og antal kørte kilometer som den sproglige beskrivelse. Det er bare en anden måde at repræsentere denne sammenhæng på, som kan være smartere til nogle formål.

Video med eksempler på opstilling af formler ud fra en sproglig beskrivelse.

Ofte benyttes en speciel notation, når forskriften for en funktion angives. I stedet for y skrives $f(x)$. Derfor skrives forskriften:

$$f(x) = 20x + 25$$

Fordelen ved denne måde at skrive på er, at nogle udregninger kan skrives op på en kort måde. Eksempelvis ses det ovenfor, at hvis $x = 1$, er $y = 45$. Med den nye notation kan dette skrives $f(1) = 45$. Det er vigtigt at bemærke, at parenteserne ikke har samme betydning som parenteserne i et almindeligt matematisk udtryk. $f(1)$ betyder altså ikke $f \cdot 1$, men funktionsværdien når x er 1.

Øvelse 24 Indfør passende variable, og opskriv forskriften for en funktion, der beskriver den angivne sammenhæng eller udvikling.

a) Prisen for et dataabonnement er 150 kr., og så koster det 2 kr. pr. gigabite.

b) Èt kilogram kartofler koster 5,50 kr. i år 2010, og hvert år herefter stiger prisen med 1,20 kr. pr. kg.

c) Eksporten af grise er steget med 0,4 mio. stk. pr. år efter år 2001, hvor eksporten var 5,5 mio. stk.

d) Først gang Dennis P. løb 5 km tog det 28 min. For hver gang han løb, forbedrede han sin tid med 2 min.

e) Antag at antallet af rygere i Danmark er faldet med 55 000 årligt, og i år 2006 var der 800 000, som røg.

f) En bil kører med 45 km/t, og den har kørt 130 km.

Video med beskrivelse af fortolkning af konstanterne af modellen.

1.5.2 *Sproglig beskrivelse af symbolske udtryk*

En af matematikhistoriens store opfindelser er at opskrive regneoperationer med symboler og bogstaver. Grunden til at regne med bogstaver, er for at komme frem til nogle generelle regler, som er rigtige for alle tal. På denne måde kan en masse udregninger undgås.

Pythagoras' sætning for en retvinklet trekant beskrives med ord.

Sproglig beskrivelse: »Kvadratet af længden af hypotenusen er lig med summen af kvadraterne af længderne af kateterne.«

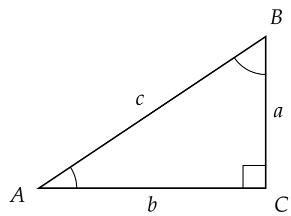
Dette matematiske udsagn kan skrives kortere med symboler.

Symbolsk beskrivelse:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

hvor c er hypotenusen i en retvinklet trekant, og a og b er kateterne.

Fordelen ved at indføre ny notation i form af specielle symboler er, at det er muligt at nedskrive komplicerede matematiske udtryk



Figur 1.1: Retvinklet trekant

på en meget kompakt måde. Omkostningen er, at det ser mere abstrakt ud, og de forskellige symboler skal være kendt, for at det matematiske udtryk kan forstås.

Eksempel 5 Følgende sproglige beskrivelse: »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y« kan oversættes til symboler:

$$\underbrace{\text{Forholdet mellem } x \text{ og } y}_{\frac{x}{y}}\ \underbrace{\text{er}}_{=}\ \underbrace{\text{proportional med}}_{k\cdot}\ \underbrace{\text{differencen mellem } x \text{ og } y}_{(x-y)}$$

I symboler bliver det

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

x og y kan efterfølgende erstattes af virkelige størrelser fx vindhastighed og effekt. Så kommer »Forholdet mellem x og y er proportional med differencen mellem x og y« til at lyde »Forholdet mellem vindhastigheden og effekten er proportional med differencen mellem vindhastigheden og effekten«. Størrelserne skal derfor først identificeres, og derefter kan modellen opstilles.

$$\frac{x}{y} = k \cdot (x - y)$$

hvor x er vindhastigheden (i m/s), og y er effekten (i kW).

Sprog	*Symboler*
proportional med	$k\cdot$
summen af	$x+y$
produktet af	$x \cdot y$
differencen mellem	$x-y$
forholdet mellem	$\frac{x}{y}$
er (lig med)	$=$
kvadratet af	x^2
kvadratroden af	$\sqrt{x}$
i trejde	x^3
kubikroden af	$\sqrt[3]{x}$

Tabel 1.1: Sproglig beskrivelse og matematisk udtryk

Øvelse 25 Omskriv følgende til matematiske symboler:

a) y er proportional med summen af x og z.

b) Summen af y og x er proportional med forholdet mellem x og y.

c) Differencen mellem x og y er proportional med kubikroden af y.

d) Forholdet mellem x og y er proportional med kvadratroden af produktet af x og y.

e) Produktet af x og y er proportionalt med summen af y og z.

Øvelse 26 Giv en sproglig beskrivelse af følgende:

a) $x = k \cdot \sqrt{x}$

b) $x^2 + y^2 = k \cdot y^2$

c) $x = k \cdot \sqrt[3]{y}$

d) $(x+y)^2 = k \cdot \sqrt[3]{x}$

e) $x^2 + y^2 = k \cdot (x - y)$

f) $\dfrac{x}{y} = k \cdot \sqrt{x+y}$

g) $\dfrac{x}{y} = k \cdot x \cdot y$

h) $y^2 = k \cdot y$

Eksempel 6 — Fra forskrift til sproglig beskrivelse. Sammenhængen mellem massen af en beholder med væske og volumen af væsken i beholderen beskrives med følgende funktion:

$$m(v) = 0,84 \cdot v + 240$$

hvor $m(v)$ er massen af beholderen med væske i gram, og v er volumen i mL af væsken i beholderen.

Konstanterne i modellen kan bruges til at beskrive væsken og beholderen: »En beholder, der vejer 240 g, indeholder en væske med en densitet på 0,84 g/mL.«

En forskrift med en tilhørende sproglig beskrivelse, hvor betydningen variablerne bliver forklaret, kaldes en model.

Øvelse 27 Omskriv følgende modeller til en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

a) Indholdet af vand i et badekar, der fyldes med vand, kan beskrives med funktionen

$$v(t) = 23 \cdot t + 42,$$

hvor $v(t)$ er badekarets indhold af vand i liter og t er tiden i minutter.

b) Hastigheden af en bil, der accelererer, kan beskrives med funktionen

$$h(t) = 1{,}2 \cdot t + 35,$$

hvor $h(t)$ er hastigheden i km/t, og t er tiden i sekunder, efter at bilen er begyndt at accelerere.

c) Sammenhængen mellem antallet af visninger af en video og tiden kan beskrives med funktionen

$$v(t) = 240 \cdot t,$$

hvor $v(t)$ er antallet af visninger, og t er tiden i timer efter at videoen er lagt på Youtube.

For at beskrive sammenhængen mellem tidspunktet på døgnet og temperaturen kan modellen

$$T(h) = 2h + 3$$

anvendes, hvor $T(h)$ er temperaturen, og h er tidspunktet på døgnet. Men det er ikke rigtigt hele døgnet, fordi temperaturen ikke stiger hele døgnet. I stedet for at kassere modellen indføres et interval, hvor modellen er rigtig. Modellen er kun rigtig, når h er mellem 0 og 12. Dette skrives $0 < h < 12$, så den samlede model bliver

$$T(h) = 2h + 3, \quad 0 < h < 12$$

Øvelse 28 Omskriv følgende modeller til en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

a) Sammenhængen mellem vindhastigheden og effekten, en vindmølle producerer, kan beskrives med funktionen

$$e(v) = 110 \cdot v + 12, \quad 4\,\mathrm{m/s} < v < 15\,\mathrm{m/s},$$

hvor $e(v)$ er effekten i kW af vindmøllen, og v er vindhastigheden i m/s.

b) Hastigheden, som en bambus vokser med, kan beskrives med funktionen

$$h(t) = 2,3 \cdot t + 5, \quad 1 < t < 20,$$

hvor $h(t)$ er højden af bambus i cm, og t er tiden i dage.

1.5.3 *Formel og tabelbeskrivelse*

Man kan benytte formlen til at opstille en tabel over x-værdier og tilhørende y-værdier. Der udregnes y-værdier for 0 km, 0,5 km, 1 km, 1,5 km, 2 km, 2,5 km, 3 km ved at indsætte i forskriften:

$$\begin{aligned} f(x) &= 20x + 25 \\ f(0) &= 20 \cdot 0 + 25 = 25 \\ f(0,5) &= 20 \cdot 0,5 + 25 = 35 \\ f(1) &= 20 \cdot 1 + 25 = 45 \\ f(1,5) &= 20 \cdot 1,5x + 25 = 55 \end{aligned}$$

osv..

Alle resultaterne kan skrives overskueligt op i en tabel:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	25	35	45	55	65	75	85	95

Video med eksempler på opstilling af tabel ud fra en funktionsforskrift.

Bemærk, at det ikke giver mening at indsætte negative værdier for x i denne tabel, da man ikke kan køre et negativt antal kilometer. Modellen er derfor kun rigtig for positive x-værdier samt 0.

Video, der viser hvordan uafhængig og afhængig variabel kan beregnes eller aflæses på grafen.

Øvelse 29 Udregn værdien af $f(x)$.

a) Bestem $f(3)$ for $f(x) = 3x + 9$

b) Bestem $f(-3)$ for $f(x) = 9 + 3x$

c) Bestem $f(3)$ for $f(x) = -x + 2$

d) Bestem $f(-2)$ for $f(x) = -3x$

e) Bestem $f(0)$ for $f(x) = -3x - 8$

f) Bestem $f(1)$ for $f(x) = -3$

g) Bestem $f(2)$ for $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

h) Bestem $f(0,5)$ for $f(x) = 2x + 1$

i) Bestem $f\left(\frac{3}{4}\right)$ for $f(x) = 2x - 3$

Eksempel 7 En funktion er givet ved

$$f(x) = 3x - 4$$

Når forskriften for funktionen er kendt, kan den uafhængige og afhængige variabel beregnes, når den anden er kendt. Når $x = 5$:

$$f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 = 11$$

Når $f(x) = 8$, skal der opstilles og løses en ligning:

$$\begin{aligned} 8 &= 3x - 4 \Leftrightarrow \\ 8 + 4 &= 3x \Leftrightarrow \\ 12 &= 3x \Leftrightarrow \\ \frac{12}{3} &= \frac{3x}{3} \Leftrightarrow \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Inden vi går videre med funktioner, skal vi se lidt på løsning af ligninger. Den type af ligninger, vi skal se på, kaldes førstgradsligninger.

1.6 *Løsning af ligninger*

En ligning er et udtryk, der indeholder et lighedstegn, og udtrykket kan enten være sandt eller falsk. Nedenfor ses et eksempel på først en sand og dernæst en falsk ligning:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 && \textit{sand} \\ -2 &= 3 && \textit{falsk} \end{aligned}$$

Oftest indeholder en ligning en ubekendt, hvilket ses i ligningen nedenfor, hvor x indgår som en ubekendt.

$$x - 2 = 5$$

Det er underforstået, at x angiver et tal. Hvis x vælges til at være lig 7, det vil sige $x = 7$, fås ligningen $7 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $5 = 5$; da dette er sandt, siges $x = 7$ at være løsning til ligningen. Hvis x derimod vælges til at være lig 3, det vil sige $x = 3$, fås ligningen $3 - 2 = 5$, hvilket svarer til, at der står $1 = 5$; da dette er falsk, er $x = 3$ ikke løsning til ligningen.

I ligningen nedenfor ses et eksempel på en ligning, hvor det er ligegyldigt, hvilken værdi x erstattes med – ligningen er sand ligegyldigt hvad:

$$x - 3 = -3 + x$$

Alle tal er altså løsning til ligningen, og vi skriver da løsningen som $x \in \mathbb{R}$.

I nedenstående ligning giver alle værdier af x en falsk ligning (prøv dig gerne frem):

$$x - 2 = x + 2 \qquad\qquad falsk$$

Ligningen har derfor ingen løsning.

Øvelse 30 Undersøg, om en givet værdi er løsning til en ligning.

a) Undersøg, om $x = 4$ er en løsning til ligningen $3x = 2x + 4$

b) Undersøg, om $x = -2$ er en løsning til ligningen $x = -x + 4$

c) Undersøg, om $x = 3$ er en løsning til ligningen $4 = 2x - 1$

d) Undersøg, om $x = -1$ er en løsning til ligningen $-3 = 2x - 1$

1.7 *Algebraisk løsning af ligninger*

At løse en ligning betyder, at alle de værdier af den ubekendte, der gør ligningen sand, skal findes.

Når en ligning skal løses, gælder følgende *meget vigtige* grundlæggende regler:

Video med eksempel på løsning af en ligning.

1. Det samme tal må lægges til eller trækkes fra på begge sider af lighedstegnet.

2. Det samme tal må ganges eller divideres på begge sider af lighedstegnet, så længe tallet er forskelligt fra 0.

Eksempel 8 Løsning af ligningen $3x - 4 = -19$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -19 \\ \Leftrightarrow\ 3x - 4 + 4 &= -19 + 4 && \text{der lægges 4 til på begge sider} \\ \Leftrightarrow\ 3x &= -15 \\ \Leftrightarrow\ \frac{3x}{3} &= \frac{-15}{3} && \text{der divideres med 3 på begge sider} \\ \Leftrightarrow\ x &= -5 \end{aligned}$$

Som eksemplet ovenover illustrerer, samles først alle led, der indeholder x, på den ene side og alle led, der kun indeholder tal, på den anden side. Derefter divideres med det tal, der står foran x, på begge sider af lighedstegnet. Det bemærkes, at der undervejs kun er benyttet de regler til løsning af ligninger, der blev nævnt ovenfor.

Tegnet $\Leftrightarrow$ kaldes »ensbetydende med« eller »biimplikation« og placeres mellem hver omskrivning; det viser, at en gammel ligning erstattes af en ny ligning, som har nøjagtig de samme løsninger som den foregående.

Eksempel 9 Løsning af ligningen $-2x + 10 = 3x$.

$$\begin{aligned} -2x + 10 &= 3x \\ \Leftrightarrow\ -2x + 10 + 2x &= 3x + 2x && \text{der lægges } 2x \text{ til på begge sider} \\ \Leftrightarrow\ 10 &= 5x \\ \Leftrightarrow\ \frac{10}{5} &= \frac{5x}{5} && \text{der divideres med 5 på begge sider} \\ \Leftrightarrow\ 2 &= x \end{aligned}$$

I eksempel 9 ses løsningen $2 = x$. Denne angivelse er korrekt, ligesom hvis der skrives $x = 2$. Et lighedstegn kan læses både fra højre og venstre.

Eksempel 10 Løsning af ligningen $5x - 7 = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}
&& 5x-7 &= 2x-5 && \\
&\Leftrightarrow & 5x-7-2x &= 2x-5-2x && \text{der trækkes } 2x \text{ fra på begge sider} \\
&\Leftrightarrow & 3x-7+7 &= -5+7 && \text{der lægges 7 til på begge sider} \\
&\Leftrightarrow & \frac{3x}{3} &= \frac{2}{3} && \text{der divideres med 3 på begge sider} \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{2}{3} &&
\end{aligned}$$

I eksempel 10 ses det, at en brøk er løsning til ligningen. En løsning må meget gerne skrives som en brøk, og det er ikke nødvendigt at omskrive brøken til et decimaltal.

Øvelse 31 Løs ligningerne

a) $3x+4=7-2x$

b) $-2x+3=8x+2$

Eksempel 11 Løsningen af ligningen $2-6x=-9-4x$.

$$\begin{aligned}
&& 2-6x &= -9-4x \\
&\Leftrightarrow & 2-6x+9 &= -9-4x+9 \\
&\Leftrightarrow & 11-6x+6x &= -4x+6x \\
&\Leftrightarrow & \frac{11}{2} &= \frac{2x}{2} \\
&\Leftrightarrow & \frac{11}{2} &= x
\end{aligned}$$

Når du er blevet lidt mere øvet, må du gerne lave flere omskrivninger på én gang. Et eksempel er ligningen, der løses ovenfor i dette eksempel; nedenfor er den løst med færre mellemregninger, men det er vigtigt, at du først begynder på det, når du har helt styr på reglerne til ligningsløsning.

$$\begin{aligned}
&& 2-6x &= -9-4x \\
&\Leftrightarrow & 11 &= 2x \\
&\Leftrightarrow & \frac{11}{2} &= x
\end{aligned}$$

Øvelse 32 Løs ligningerne.

a) $6x=3$ b) $3x+4=5$ c) $-2x+3=-4$

d) $\frac{3}{2}x+4=5$ e) $\frac{1}{2}x+4=5x$ f) $9x+4=5x$

g) $x-2=2x+5$ h) $5x-4=2x+5$ i) $7x+3=x-5$

1.8 *Ligningsløsning med funktioner*

Kendes regneforskriften og en funktionsværdi, kan x-værdien bestemmes ved at løse en ligning. Er regneforskriften $f(x) = 5 + 2x$ og funktionsværdien $f(x) = 3$, kan følgende ligning opstilles

$$3 = 5 + 2x$$

Løsningen er $x = -1$, og det betyder, at $f(-1) = 3$.

Eksempel 12 Lad $f(x) = 3 - 2x$ og $f(x) = -5$. Bestem x. Først opstilles ligningen $-5 = 3 - 2x$. Denne løses:

$$-5 = 3 - 2x \Leftrightarrow -5 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{-5-3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 4$$

Det betyder, at $f(4) = -5$. Det kan være en god idé at regne efter.

$$f(4) = 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5$$

Eksempel 13 Lad $f(x) = -2x + 3$ og $f(x) = 3$. Bestem x. Først opstilles ligningen $3 = -2x + 3$. Denne løses:

$$3 = -2x + 3 \Leftrightarrow 3 - 3 = -2x \Leftrightarrow \frac{3-3}{-2} = x \Leftrightarrow x = 0$$

Eksempel 14 Lad $f(x) = -3 + x$ og $f(x) = 3$. Bestem x. Først opstilles ligningen $3 = -3 + x$. Denne løses:

$$3 = -3 + x \Leftrightarrow 3 + 3 = x \Leftrightarrow x = 6$$

Eksempel 15 Lad $f(x) = 3$ og $f(x) = 8$. Bestem x. Først opstilles ligningen $3 = 8$. Denne ligning har ingen løsning.

Øvelse 33 Beregn x-værdien.

a) $f(x) = -8 + 2x$ og $f(x) = 4$.

b) $f(x) = 1 + x$ og $f(x) = 5$.

c) $f(x) = 8 - 2x$ og $f(x) = 12$.

d) $f(x) = -12 + 2x$ og $f(x) = -2$.

e) $f(x) = 1 - 4x$ og $f(x) = -1$.

f) $f(x) = 8 + 5x$ og $f(x) = -7$.

g) $f(x) = 35 - 4x$ og $f(x) = 3$.

h) $f(x) = 3x$ og $f(x) = 0$.

Eksempel 16 En funktion er givet ved

$$f(x) = 3x - 5$$

a) Bestem $f(1)$ og $f(3)$.

b) Løs ligningen $f(x) = -8$.

a) De to funktionsværdier beregnes.

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot (1) - 5 = 3 - 5 = -2 \\ f(3) &= 3 \cdot (3) - 5 = 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

b) Ligningen opstilles.

$$-8 = 3x - 5$$

Først lægges 5 til på begge sider af lighedstegnet.

$$-8 + 5 = 3x - 5 + 5$$

Så reduceres.

$$-3 = 3x$$

Så divideres med 3 på begge sider af lighedstegnet.

$$\frac{-3}{3} = \frac{3x}{3}$$

Så reduceres.

$$-1 = x$$

Ofte er det praktisk at opstille løsningerne i en tabel.

x	-1	1	2
$3x - 5$	-8	-2	1

Øvelse 34 Udfyld tabellen.

a)

x		1	4	
$2x+1$	-9			9

b)

x		1	8	
$-3x-1$	14			-13

c)

x		2	5	
$4x+5$	-11			17

d)

x		3	8	
$-4x+4$	16			-12

e)

x		3	7	
$3x-2$	-11			13

f)

x		2	6	
$-3x+1$	13			-11

g)

x		2	7	
$5x$	-20			25

h)

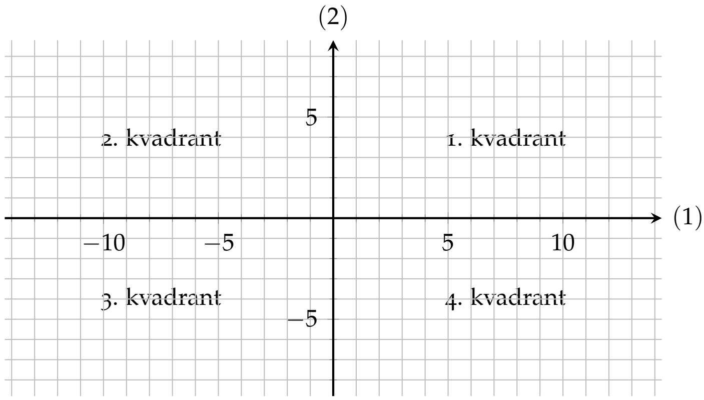
x	0	1	2	3
	-4	-3	-2	-1

i)

x	0	1	2	3
	4	2	0	-2

1.8.1 Tabel og grafisk beskrivelse

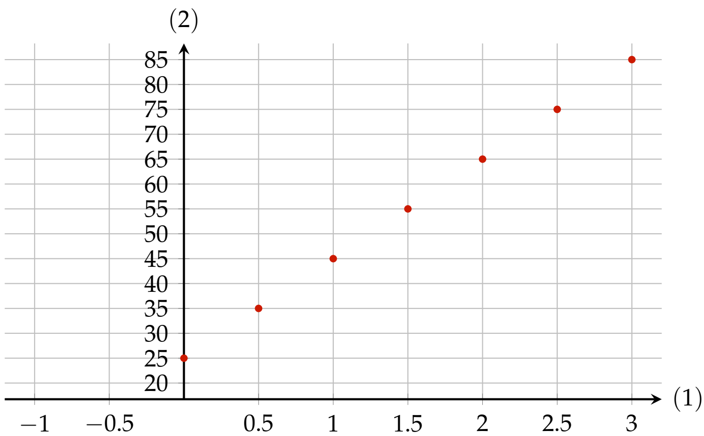
Ud fra tabellen kan man konstruere en graf i et koordinatsystem. Et koordinatsystem består af to talakser, se figur. Talakserne inddeler figuren i fire områder, der kaldes kvadranter. I første kvadrant er både x- og y-værdierne positive. I andet kvadrant er x-værdierne negative, og y-værdierne er positive. I tredje kvadrant er både x- og y-værdierne negative, og i fjerde kvadrant er x-værdierne positive og y-værdierne negative.



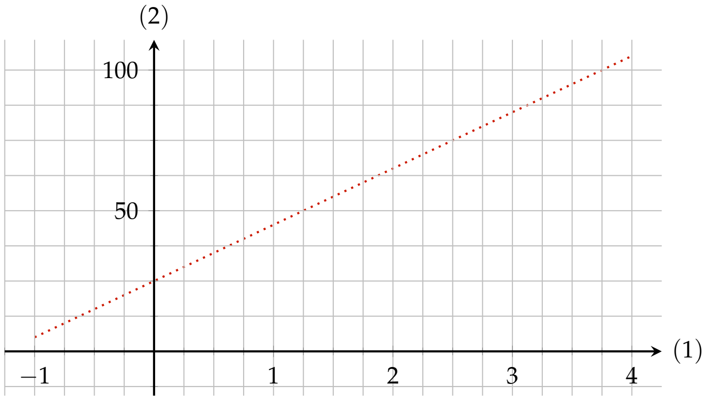
Den vandrette akse angiver værdien af den uafhængige variabel og kaldes x-aksen, førsteaksen eller (1)-aksen, mens den lodrette akse angiver værdien af den afhængige variabel og kaldes y-aksen, andenaksen eller (2)-aksen. Sammenhængen mellem x og y kan dermed visualiseres ved punkter i koordinatsystemet.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	25	35	45	55	65	75	85

Video med eksempler på tegning af graf ud fra en tabel.



Hvis der var valgt andre x-værdier, kunne de have været tilføjet som punkter til grafen. Det ses, at alle punkterne ligger på en ret linje. Hvis man forestiller sig, at man indtegner et lille punkt for alle de uendeligt mange x-værdier, får man den rette linje, der ses på næste figur.



Denne rette linje kaldes grafen for funktionen $f(x)$, og den er dannet af alle de samhørende værdier for x og y, der opfylder forskriften.

Definition 4 — Graf. Grafen for en funktion består af alle de punkter (x, y) i et koordinatsystem, hvorom det gælder, at $y = f(x)$.

Øvelse 35 Tegn grafen for funktionerne. Det er vigtigt, at grafens skæringspunkter med akserne er med på din tegning.

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = -2x + 4$

d) $f(x) = -0,5x - 2$

e) $f(x) = 2x - 1$

f) $f(x) = x - 4$

Man kan også benytte denne definition, hvis man eksempelvis ønsker at undersøge, hvorvidt punktet $(4, 90)$ ligger på grafen. Det skal undersøges, om det er sandt, at $f(4) = 90$. Ved at indsætte $x = 4$ i forskriften for $f(x)$ fås:

$$f(4) = 20 \cdot 4 + 25 = 80 + 25 = 105$$

Så punktet $(4, 105)$ ligger på grafen, men det gør punktet $(4, 90)$ ikke. Det skyldes, at en funktion ikke kan have to forskellige funktionsværdier til den samme x-værdi.

Øvelse 36 Undersøg, om punkterne $(5, 120)$ og $(0.1, 27)$ ligger på grafen for $f(x) = 25 + 20x$.

Eksempel 17 En kasse koster 2 kr., og hver sodavand koster 3 kr. Funktionen kan beskrive en sammenhæng mellem to variable, pris og antal, hvor y er prisen i kr. for x sodavand med kasse.

Hver gang vi adderer 1 til x-værdien, adderer »funktionen« 3 til y-værdien. Funktionen kaldes $f(x)$.

+1 +1 +1 +1

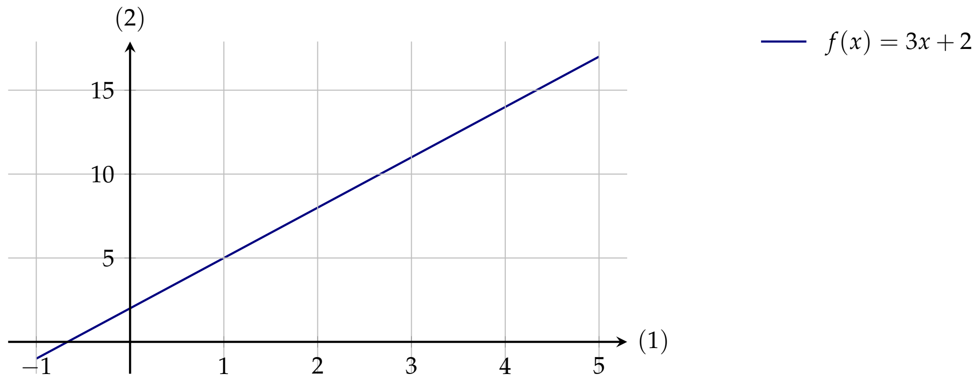
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14

+3 +3 +3 +3

Dette kan også udtrykkes ved det, som kaldes funktionens forskrift.

$$f(x) = 3x + 2$$

Eller det kan udtrykkes ved det, som kaldes funktionens graf.



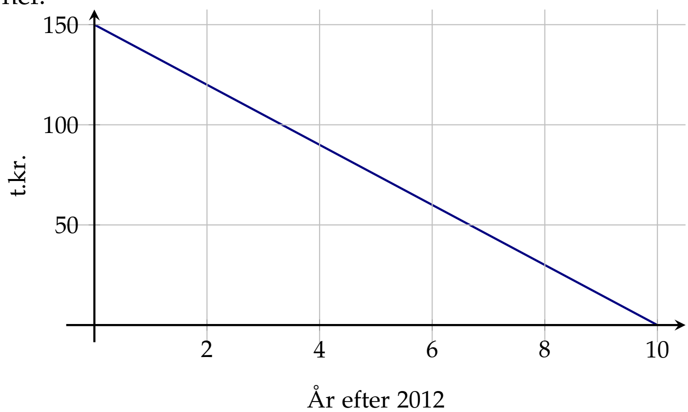
I de tilfælde, hvor der arbejdes med årstal, benyttes selve årstallet sjældent som variabel. Årstallet omregnes, så et givent årstal sættes til værdien 0. Det skal vi se på i det følgende eksempel.

Det betyder, hvis årstallet 2011 har værdien 0, har årstallene 2013, 2017 værdierne 2 og 6.

Årstal	2013	2017
x	2	6

Hvor x er antallet af år efter 2011.

Eksempel 18 — Afskrivning. En virksomhed købte i 2012 en robot til at samle deres produkt. Robotten kostede 150 t.kr., og værdien af den afskrives med 15 t.kr. om året. Værdien af robotten kan beregnes med forskriften. Grafen, der viser værdien af robotten, ses her.



Forskriften for afskrivningen er

$$f(x) = -15x + 150, \quad 0 \leq x \leq 10$$

hvor $f(x)$ er værdien af robotten x år efter 2012. I virksomhedens årlige regnskab skal værdien af robotten angives. I tabellen ses værdien af robotten i årene 2012-2022.

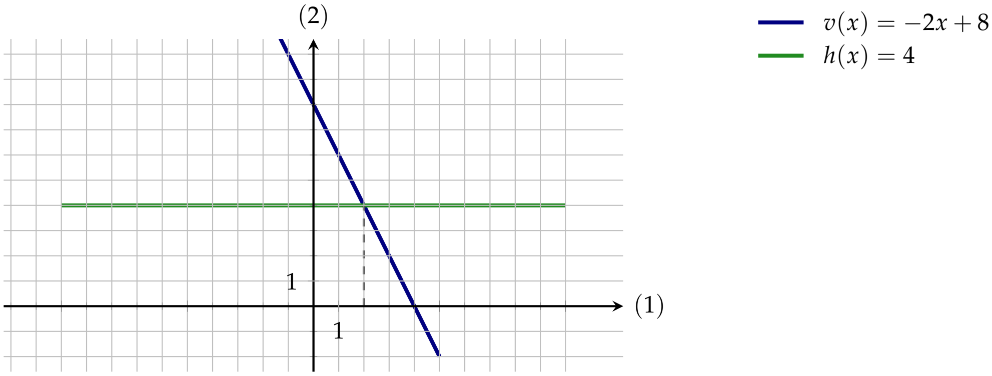
År	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
År efter køb	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Værdi i t.kr.	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0

Begyndelsesværdien af robotten er 150 t.kr., og hældningskoefficienten -15 t.kr. viser, at robotten hvert år bliver 15 t.kr. mindre værd. Bemærk i øvrigt, at modellen kun giver mening, når x er mellem 0 og 10. Hvis x er større end 10, vil robotten have en negativ værdi. Hvis x er mindre end 0, vil robotten være mere værd, end den blev købt for.

1.8.2 *Grafisk løsning af ligninger*

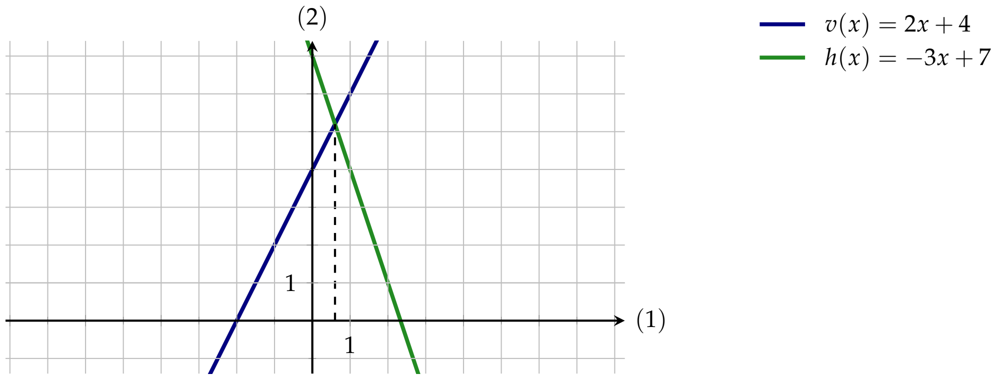
En ligning kan også løses grafisk.

Eksempel 19 Ligningen $-2x+8=4$ kan repræsenteres grafisk ved at se på grafen for funktionen for venstre side $v(x) = -2x+8$ og funktionen for højre side $h(x) = 4$.



Løsningen til ligningen er førstekoordinaten til skæringspunktet mellem de to grafer. I dette eksempel er løsningen $x = 2$.

Eksempel 20 Ligningen $2x+4 = -3x+7$ kan repræsenteres grafisk ved at se grafen for funktionen for venstre side $v(x) = 2x+4$ og funktionen for højre side $h(x) = -3x+7$.



Som det ses her, er det ikke helt tydeligt, hvad løsningen til ligningen er. Det er derfor ikke altid den bedste løsning at løse ligninger grafisk.

Øvelse 37 Løs ligningerne grafisk.

a) $2x - 4 = -0,5x + 1$

b) $-x + 1 = 2x + 7$

c) $4x - 1 = -x + 9$

d) $x - 2 = x - 1$

e) $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{2}x - 7$

f) $0.5x + 3 = 2x$

Som det måske er gået op for dig, er det ikke altid lige let at løse ligninger grafisk. Derfor ser vi her på, hvordan ligninger med brøker kan løses.

Eksempel 21 Det er sjovt at arbejde med brøker, men uden hjælpemidler volder det problemer, hvis man ikke gør sig umage. Derfor er det altid en god ide, når en ligning indeholder en brøk, at gange ligningen igennem med den nævner, der indgår i brøken. Det er i så fald naturligvis meget vigtigt at gange igennem med tallet på begge sider – reglerne skal jo overholdes. Det er illustreret nedenfor:

$$
\begin{aligned}
& 3 - \frac{2}{3}x = 3x + 5 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \cdot \left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 3 \cdot (3x + 5) \quad \text{der ganges med 3 på begge sider} \\
\Leftrightarrow\ & 3 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{2}{3}x = 3 \cdot 3x + 3 \cdot 5 \quad \text{der ganges ind i parenteserne} \\
\Leftrightarrow\ & 9 - 2x = 9x + 15 \\
\Leftrightarrow\ & -6 = 11x \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{6}{11} = x
\end{aligned}
$$

Øvelse 38 Løs ligningerne.

a) $\frac{1}{2}x + 4 = 7 - 2x$

b) $x + 2 = -\frac{1}{3}x + 3$

c) $\frac{1}{3}x + 4 = 2 - 4x$

d) $5x - 3 = -\frac{4}{3}x + 2$

Eksempel 22 I dette lidt mere komplicerede eksempel indgår der igen brøker. Brøkerne har forskellig nævner, og derfor ganges der igennem med produktet af nævnerne.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}+x &= \frac{1}{3}x+2 \\ \Leftrightarrow\ 3\cdot 4\cdot\left(\frac{5}{4}+x\right) &= 3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{3}x+2\right) \\ \Leftrightarrow\qquad 3\cdot 5+12x &= 4\cdot x+12\cdot 2 \\ \Leftrightarrow\qquad 15+12x &= 4x+24 \\ \Leftrightarrow\qquad 8x &= 9 \\ \Leftrightarrow\qquad x &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Øvelse 39 Løs ligningerne.

a) $x+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}x$ b) $\frac{x}{3}+3=\frac{x}{2}-2$

Det er ikke altid, at en ligning har en løsning. Nogle gange er alle værdier af x en løsning, og nogle gange er der ingen løsninger.

Eksempel 23 Her ses et eksempel på en ligning, hvor alle værdier af x vil være løsning.

$$\begin{aligned} 2\cdot(2x-3) &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\qquad 4x-6 &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\qquad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning er sand for alle værdier af x, vil alle værdier af x være en løsning af ligningen.

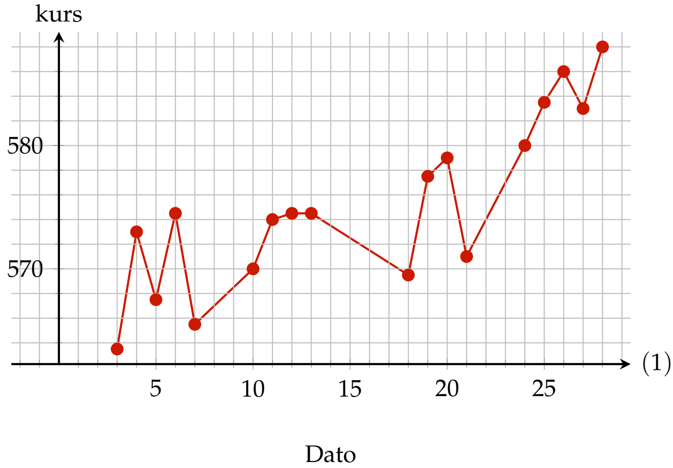
Eksempel 24 Her ses et eksempel på en ligning uden nogen løsning:

$$\begin{aligned} 2\cdot(2x-4) &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\qquad 4x-8 &= 4x-6 \\ \Leftrightarrow\qquad -8 &= -6 \end{aligned}$$

Da den sidste ligning ikke er sand for nogen værdier af x, er der ingen løsning til ligningen.

1.8.3 *Ikke-lineære sammenhænge*

Eksempel 25 — Aktiekurs. På grafen ses lukkekursen for Vestas Wind Systems A/S i april 2017.



Som det ses på grafen, er der ikke tale om en lineær funktion, og derfor kan en forskrift ikke opstilles - endnu. Det er en stykkevist lineær funktion. Men data kan godt opstilles i en tabel.

Dato	Kurs
3.	563,5
4.	573,0
5.	567,5
6.	574,5
7.	565,5
10.	570,0

Dato	Kurs
11.	574,0
12.	574,5
13.	574,5
18.	569,5
19.	577,5
20.	579,0

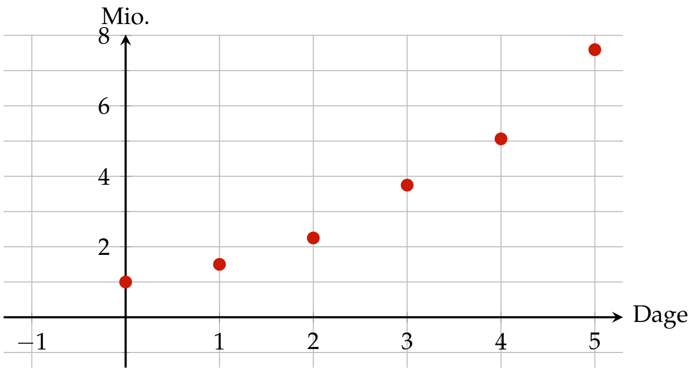
Dato	Kurs
21.	571,0
24.	580,0
25.	583,5
26.	586,0
27.	583,0
28.	588,0

Det er også muligt at sige, at kursen har en voksende tendens, men mere om det senere.

Eksempel 26 — Eksponentiel vækst. På en laboratorium undersøges væksten af nogle bakterier. I forsøget tælles antallet af bakterier i mio., og tiden måles i dage.

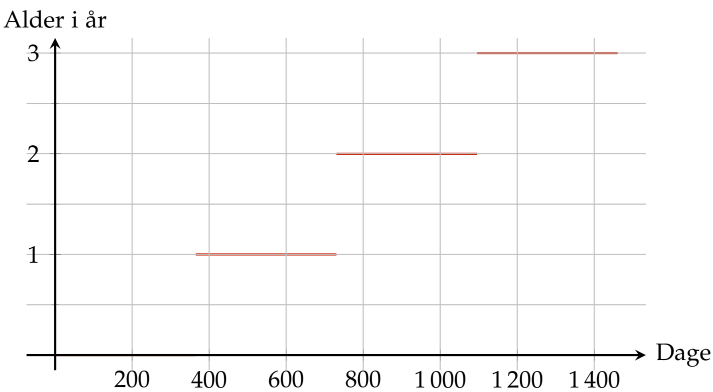
Tid i dage	0	1	2	3	4	5
Antal i mio.	$1,0$	$1,5$	$2,25$	$3,375$	$5,0625$	$7,59375$

Når data indsættes i et koordinatsystem, ses det tydeligt, at der ikke er tale om en lineær vækst.



Senere ses på dette eksempel igen for at bestemme en forskrift.

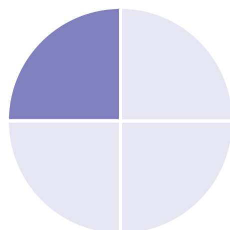
Eksempel 27 — Alder. Et andet eksempel på en funktion, der ikke er lineær, er alder i år.



2
Tal

Diagrammet viser $\frac{2}{8}$

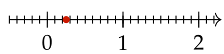
Diagrammet viser $\frac{1}{4}$



Formidlingen af matematiske resultater, det betyder meget hvordan et resultat præsenteres. Til dette formål er der udviklet forskellige repræsentationer af tal. Her skal vi se på noget af dem.

Eksempel 28 Værdien »en fjerdedel« kan angives på forskellige måder.

- En brøk $\frac{1}{4}$ hvor 1 kaldes tælleren og 4 kaldes nævneren.
- Brøken $\frac{2}{8}$ har naturligvis samme værdi.
- Brøker kan opfattes som en division mellem to tal: 1 delt med 4 eller 1:4 (Undgå venligst at bruge kolon som tegn på division, eftersom det i nogle sammenhænge kan misforstås)
- Decimaltal $0,25$.
- Som en procentdel: 25%. Ordet procent kommer fra latin og betyder »per hundrede«. Så der er tale om brøken $\frac{25}{100}$.
- Som en del af et cirkeldiagram.
- Som et punkt ● på en tallinje.

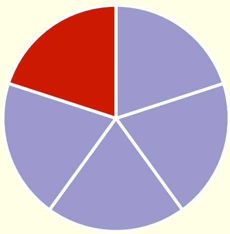


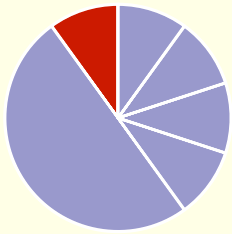
Øvelse 40 Omskriv følgende tal, til et decimaltal.

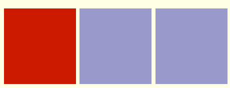
a) $\frac{1}{2}$	b) $45\,\%$	c) $\frac{18}{12}$
d) $\frac{24}{5}$	e) $\frac{19}{4}$	f) $0,1\,\%$
g) $\frac{17}{5}$	h) $\frac{57}{12}$	i) $\frac{289}{125}$

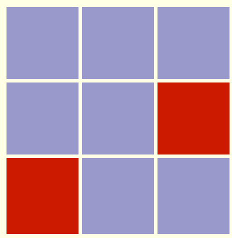
Øvelse 41 Afsæt tallene $\frac{3}{7}$, $0,7$ og $-1,2$ på en tallinje.

Øvelse 42 Bestem i procent, hvor stor en del af figuren der er rød.

a) 

b) 

c) 

d) 

2.1 *Regneartternes hierarki*

Udtrykkes matematik sprogligt, kan det give anledning til misforståelser, medmindre det udtrykkes præcist.

Hvad menes der eksempelvis med følgende udsagn?:

> Udregn 2 plus 3 gange 4.

Dette udsagn kan betyde:

> Udregn først 2 plus 3, og gang derefter resultatet med 4, hvilket giver 20.

Men det kan også betyde:

> Udregn først 3 gange 4, og læg derefter dette tal til 2, hvilket giver 14.

Det giver to forskellige resultater, hvorfor det er vigtigt at vide, hvordan det skal udregnes. For at vide hvordan det skal udregnes, benyttes parenteser til at markere, hvad der skal udregnes først. Udtrykkene ovenfor bliver henholdsvis:

$$(2+3)\cdot 4 \text{ og } 2+(3\cdot 4)$$

Imidlertid er det vedtaget, at multiplikation udføres før addition, sådan at $2+3\cdot 4$ betyder $2+(3\cdot 4)$. Først udføres potenser og kvadratrødder, dernæst gange og dividere. Til sidst kommer plus og minus. Man kalder dette for regnearternes hierarki.

1. Parenteser
2. Eksponenter
3. Potenser og rødder
4. Multiplikation og division
5. Addition og substraktion

Video med eksempler på beregninger med fokus på regnearternes hierarki.

Øvelse 43 Udregn følgende udtryk.

a) $5-4\cdot 3$

b) $3+11\cdot 2$

c) $4+3^2$

d) $6-3\cdot 2^3$

e) $(3-2)\cdot 4$

f) $(4+1)^2\cdot 3$

g) $(9+2)\cdot(3-4)$

h) $25-4\cdot 5^2$

Operationen at lægge to tal sammen kaldes addition. Symbolet for addition er + (plus). Fx

$$4+2$$

De to tal, der adderes, kaldes *led* , symbolet kaldes en operator.

$$\underbrace{4}_{\text{led}} \quad \overbrace{+}^{\text{plus-operator}} \quad \underbrace{2}_{\text{led}}$$

Ved addition fås et resultat, der kaldes en sum. For at vise, at der er tale om et resultat, skrives = (lighedstegn). Fx

$$\underbrace{4}_{\text{led}} \quad \overbrace{+}^{\text{plus-operator}} \quad \underbrace{2}_{\text{led}} = \underbrace{6}_{\text{sum}}$$

En anden operation er multiplikation eller at gange, som det også kaldes. Ved en multiplikation af to tal eller bogstaver skrives $\cdot$ (gange) mellem de to tal eller bogstaver, som multipliceres. $4 \cdot 3$ betyder fx 4 gange 3, og 4 og 3 kaldes for faktorer. Resultatet af en multiplikation kaldes et produkt. Fx

$$\underbrace{4}_{\text{faktor}} \overbrace{\cdot}^{\text{gange-operator}} \underbrace{3}_{\text{faktor}} = \overbrace{12}^{\text{produkt}}$$

Addition og multiplikation kan også kombineres.

$$\underbrace{a}_{\text{led}} \overbrace{+}^{\text{plus-operator}} \overbrace{\underbrace{4}_{\text{faktor}} \overbrace{\cdot}^{\text{gange-operator}} \underbrace{b}_{\text{faktor}}}^{\text{led}} = \overbrace{a+4b}^{\text{sum}}$$

Der er tre faktorer og to led i dette udtryk:

$$3 \cdot e \cdot y + 6$$

De tre faktorer er $3, e$ og y, og de to led er $3 \cdot e \cdot y$ og 6. Ofte undlades $\cdot$, hvis det er tydeligt, at der skal være $\cdot$. Fx kan man i stedet for $3 \cdot e \cdot y$ skrive $3ey$, men hvis der stod der $3 \cdot 4$, kan der ikke skrives 34, fordi det ville betyde fireogtredive og ikke tre gange fire.

2.2 *Brøker*

En brøk består af to dele - en tæller og en nævner, meget ofte skrives det således

$$\frac{\text{tæller}}{\text{nævner}}$$

Der skrives altså tælleren øverst og nævneren nederst, fx

$$\frac{12a}{3ab}$$

Her er $12a$ tælleren, og $3ab$ er nævneren.

En brøk fx $\frac{4}{3}$ betyder fire tredjedele.

Et helt tal, fx 3 kan skrives som en brøk

$$3 = \frac{3}{1}$$

På denne måde kan brøkregneregler også bruges når hele tal og brøker skal lægges sammen, trækkes fra, ganges med eller divideres med hinanden.

Brøkregneregler

$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d}$	Addition og substraktion	(A)
$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	Multiplikation	(B)
$\frac{a}{d} / \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c}{d \cdot b}$	Division	(C)
$\frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$	Forlæng og forkort	(D)

En brøk kan forkortes, hvilket betyder at tæller og nævner divideres med samme tal eller bogstav. Fx kan følgende brøk forkortes med a

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{12}{3b}$$

En brøk kan forlænges med et tal eller et bogstav, hvilket betyder, at både tæller og nævner ganges med tallet eller bogstavet. Fx forlænges her med 4:

$$\frac{12a}{3ab} = \frac{4 \cdot 12a}{4 \cdot 3ab} = \frac{48a}{12ab}$$

Øvelse 44 Angiv brøken »tre femtedele« i forskellige repræsentationer.

Regning med brøker er en øvelse i at bruge simple matematiske formler. I eksemplerne er der skrevet (A), (B), (C) eller (D) under de lighedstegn, hvor den pågælende brøkregneregel er brugt.

Eksempel 29 — Multiplikation mellem heltal og brøk.

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} \underset{(B)}{=} \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$$

Eksempel 30 — Multiplikation mellem to brøker.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}$$

Øvelse 45 Udregn.

a) $4\cdot\frac{3}{2}$ b) $a\cdot\frac{2b}{5a}$ c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}$ d) $\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{2x}$

Video med gennemregning af eksempler på udregninger med brøker.

Eksempel 31 — Heltal divideret med brøk.

$$3/\frac{2}{5}=\frac{3}{1}/\frac{2}{5}\underset{(C)}{=}\frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{15}{2}$$

Eksempel 32 — Brøk divideret med brøk.

$$\frac{2}{5}/\frac{4}{3}\underset{(C)}{=}\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{6}{20}$$

Eksempel 33 — Brøk divideret med heltal.

$$\frac{2}{5}/3=\frac{2}{5}/\frac{3}{1}\underset{(C)}{=}\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

Øvelse 46 Udregn.

a) $4/\frac{3}{7}$ b) $2a/\frac{3a}{4b}$ c) $\frac{8}{3}/\frac{12}{9}$

d) $\frac{8a}{3b}/\frac{4a}{b}$ e) $\frac{10}{3}/5$ f) $\left(\frac{a^2}{b}/(a\cdot b)\right)\cdot b$

Eksempel 34 — Summen af to brøker.

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{2}\underset{(A)}{=}\frac{4\cdot 2+5\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{8+15}{6}=\frac{23}{6}$$

Øvelse 47 Udregn.

a) $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{a}{a}+\frac{b}{b}$ c) $\frac{7}{3}+\frac{2}{5}$ d) $\frac{3x}{y}+\frac{2y}{6x}$

Øvelse 48 Regn følgende opgaver ved brug af regneregler for brøker.

a) $\dfrac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4}$ b) $\dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot y}$ c) $\dfrac{a \cdot 3}{a \cdot 4}$ d) $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{3}{y}$ f) $\dfrac{b}{c} + \dfrac{x}{c}$ g) $\dfrac{b}{c} / \dfrac{x}{a}$ h) $\dfrac{b}{c} + \dfrac{x}{a}$

Øvelse 49 Bestem en enklere regel for at bestemme summen af to brøker med samme nævner.

I nogle tilfælde skal tæller og/eller nævner faktoriseres, inden brøken kan forkortes.

Eksempel 35

$$\frac{20x + 15}{5} = \frac{5 \cdot (4x + 3)}{5} = 4x + 3$$

Øvelse 50 Forkort følgende brøker.

a) $\dfrac{15x + 6}{3}$ b) $\dfrac{6x + 18}{2}$ c) $\dfrac{3x - 15}{x - 5}$ d) $\dfrac{9x + 6}{12x + 8}$

2.3 *Procenter*

Procent bruges i mange forskellige sammenhænge. Det bruges, når skatten skal beregnes, når butikker laver tilbud, og når banker udregner renter. Ved folketingsvalg udregnes procenterne af stemmerne for at finde ud af, hvilke partier der skal have pladserne i Folketinget. Det bruges også når forskerne skal finde afvigelser fra teorien.

Video der viser hvordan procentdel af et tal beregnes.

2.3.1 *Procentandel*

Eksempel 36 Karen og Viktoria betaler begge 40 % i skat, men Karens indkomst er 300 000 kr. og Viktorias er 400 000 kr. Karens skat er 40 % af 300 000 kr., som er

$$\frac{40}{100} \cdot 300\,000\,\text{kr.} = 120\,000\,\text{kr.}$$

mens Viktorias skat er 40% af 400 000 kr., som er

$$\frac{40}{100} \cdot 400\,000\,\text{kr.} = 160\,000\,\text{kr.}$$

Viktoria betaler mere i skat end Karen, men de betaler begge 40% af deres indkomst.

Øvelse 51 Beregn procentdelen.

a) Bestem 15 % af 100.

b) Bestem 15 % af 400.

c) Bestem 20 % af 200.

d) Bestem 25 % af 60.

e) Bestem 35 % af 150.

f) Bestem 75 % af 300.

g) Bestem 110 % af 60.

h) Bestem 125 % af 300.

i) Bestem 1 % af 9.

j) Bestem 0,5 % af 1200.

k) Bestem 123 % af 10.

l) Bestem 120 % af 120.

Øvelse 52 Ved telefoninterview er 1 200 personer blevet spurgt, hvilket af tre telefonabonnementer de ville vælge.

Abonnement	Pris	Procent
Fri tale + fri sms/mms	120 kr/md	25%
Fri tale + fri sms/mms + 10 G data	150 kr/md	10%
Fri tale + fri sms/mms + fri data	210 kr/md	65%

Bestem, hvor mange der valgte hvert af de tre typer abonnementer.

Eksempel 37 — Procentdel. Ved valget til elevrådet stemte 60 af 400 elever på Dennis P. Dette omregnes til procent ved

$$\frac{60}{400} \cdot 100\,\% = 15\,\%$$

Dennis P. fik 15% af stemmerne.

Video der forklarer hvordan en procentdel beregnes.

Øvelse 53 Bestem procentdelen.

a) Bestem 15 af 150 i procent.
b) Bestem 12 af 24 i procent.
c) Bestem 50 af 25 i procent.
d) Bestem 9 af 180 i procent.
e) Bestem 4 af 20 i procent.
f) Bestem 4 af 80 i procent.
g) Bestem 3 af 27 i procent.
h) Bestem 45 af 180 i procent.

Øvelse 54 Hvad er størst? 60 % af 25 eller 25 % af 60? Gælder dette forhold for alle procenttal og tal?

Øvelse 55 Hvad er 125% af 65? Hvad er 25% af 65 lagt til 65? Er det et tilfælde, at det bliver det samme? Hvilken generel regel kan udledes?

2.3.2 *Procentændring*

Når et tal tillægges eller fratrækkes en given procent, som de to eksempler herunder, er der tale om en relativ ændring.

Sætning 4 — Procentændring. Beregning af procentændringen involverer tre tal: Den relative ændring, x. Den forventede værdi, tabelværdien eller den gamle værdi, y. Den observerede værdi eller den nye værdi, z. Den ene værdi kan beregnes, når de to andre er kendt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-z}{y} \\ y &= \frac{z}{1-x} \\ z &= y - x \cdot y \end{aligned}$$

$x \cdot 100\,\%$ er den procentvise ændring. $y - z$ er den absolutte ændring.

Eksempel 38 En bluse er nedsat fra 300 kr. til 270 kr. I procent bliver det

$$\frac{300-270}{300} \cdot 100\,\% = \frac{30}{300} \cdot 100\,\% = 10\,\%$$

Eksempel 39 En bluse til 300 kr. nedsættes med 10 %. Den nye pris bliver

$$300 - 10\,\% \cdot 300 = 300 - 0,1 \cdot 300 = 270$$

Eksempel 40 En bluse koster 270 kr., efter at den er nedsat med 10 %. Den gamle pris var

$$\frac{270}{1-0,1} = \frac{270}{0,9} = 300$$

Eksempel 41 En bluse til 300 kr. sættes op med 25 %. Den nye pris bliver

$$300 + 25\,\% \cdot 300 = 300 + 0,25 \cdot 300 = 375$$

Øvelse 56 Beregn den nye pris. En vare til …

a) 200 kr. stiger med 25 %.   b) 20 kr. stiger med 20 %.

Video, der forklarer beregning af en relativ ændring

c) 400 kr. falder med 10 %

d) 80 kr. falder med 15 %

e) 300 kr. falder med 5 %.

f) 200 kr. falder med 20 %.

g) 160 kr. stiger med 5 %.

h) 65 kr. falder med 25 %.

Øvelse 57 Et par jeans er sat ned fra 1 200 kr. med 10 %, hvad koster jeans'ene nu?

Øvelse 58 Et par pink jeans er sat ned fra 1 100 kr. med 200 kr. Et par sorte jeans er sat ned fra 1 500 kr med 15%. Hvilket par jeans er sat mest ned?

Eksempel 42 — Procentafvigelse. Carl har i et eksperiment bestemt, at densiteten af en væske er 1,2 g/mL. I en tabel kan Carl se, at væsken har en densitet på 1,5 g/mL. For at udregne afvigelsen i procent gør Carl dette

$$\frac{1,2-1,5}{1,5}\cdot 100\% = \frac{-0,3}{1,5}\cdot 100\% = -20\%$$

Carl fik en afvigelse på -20%. Det negative fortegn viser, at Carls resultat er 20 % under tabelværdien.

Video, der forklarer hvordan en procentafvigelse beregnes.

Øvelse 59 Beregn den procentvise afvigelse.

a) I et forsøg er værdien 64 observeret, og den tilsvarende tabelværdi er 40. Bestem den procentvise afvigelse.

b) I et forsøg er værdien 114 observeret, og den tilsvarende tabelværdi er 120. Bestem den procentvise afvigelse.

c) I et forsøg er værdien 450 observeret, og den tilsvarende tabelværdi er 375. Bestem den procentvise afvigelse.

d) I et forsøg er værdien 413 observeret, og den tilsvarende tabelværdi er 350. Bestem den procentvise afvigelse.

2.4 *Overslagsregning*

Ved at afrunde tallene i en udregning fås et overslag på facit. Det kan være nyttigt til at tjekke resultaterne fra ens værktøjsprogram. Skal man eksempelvis regne $3,7 \cdot 7,15$ ud, kan man få et overslag over resultatet ved at afrunde, før man ganger:

$$3,7 \cdot 7,15 \approx 4 \cdot 7 = 28$$

Overslaget fortæller altså, at produktet er cirka 28.

Rundes begge faktorer op, kan man finde en øvre grænse for produktet.

$$3,7 \cdot 7,15 < 4 \cdot 8 = 32$$

Det betyder, at produktet er under 32. Rundes begge faktorer ned, fås en nedre grænse for produktet.

$$3,7 \cdot 7,15 > 3 \cdot 7 = 21$$

Produktet af $3,7$ og $7,15$ ligger i intervallet $[21,32]$.

Et overslag for en brøk gøres ved at afrunde tæller og nævner, sådan at tæller går op i nævner

$$\frac{276}{34} \approx \frac{270}{30} = \frac{27}{3} = 9$$

Ved nedrunding af negative tal bliver fx $-4,1$ nedrundet til -5 og rundet op til -4, så den nedre grænse for

$$51,2 - 4,1 \overset{\text{rund ned}}{=} 51 - 5 = 46$$

Øvelse 60 Benyt overslagsregning til at finde en øvre og en nedre grænse for følgende:

a) $3,1 \cdot 3,6$ b) $3,1 + 3,6$ c) $54,5 + 21,4$

d) $54,5 - 3,4$ e) $\frac{23}{3}$ f) $\frac{325}{6}$

Øvelse 61 Benyt overslagsregning til at finde en øvre og en nedre grænse for tallet $\sqrt{34}$.

Øvelse 62 Benyt overslagsregning til at bestemme, om en ligning har en løsning i et givet interval.

a) Benyt overslagsregning til at afgøre, om ligningen $7x - 3 = 0$ har en løsning, der ligger i intervallet $[0,1]$.

b) Benyt overslagsregning til at afgøre, om ligningen $x^2 - 5x + 5{,}25 = 0$ har to løsninger, der ligger i intervallet $[1,4]$.

2.5 *Potenser*

Udregninger skal skrives på den mest simple måde, og derfor indføres en notation, der betyder det samme tal ganget med sig selv et antal gange, fx

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Det udtales 'tre i fjerde' eller 'tre opløftet i fjerde'. En potens af et negativt tal fx

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

og den negative værdi af potensen af et tal fx

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

er to forskellige ting.

Regneregler for potenser, hvor x og y er forskellige fra 0.

$$\begin{aligned} x^s \cdot x^t &= x^{s+t} \\ \frac{x^s}{x^t} &= x^{s-t} \\ (x^s)^t &= x^{s \cdot t} \\ (x \cdot y)^s &= x^s \cdot y^s \\ \left(\frac{x}{y}\right)^s &= \frac{x^s}{y^s} \\ x^0 &= 1 \\ x^{-s} &= \frac{1}{x^s} \\ \sqrt[s]{x} &= x^{\frac{1}{s}} \text{ , hvor } x > 0 \\ \sqrt[s]{x^t} &= x^{\frac{t}{s}} \text{ , hvor } x > 0 \end{aligned}$$

Eksempel 43 Følgende udtryk

$$x^3 \cdot x^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$. Så fås, at

$$x^3 \cdot x^6 = x^{3+6} = x^9$$

Eksempel 44 Følgende udtryk

$$\left(x^3\right)^6$$

kan reduceres ved at anvende reglen $(x^s)^t = x^{s\cdot t}$. Så fås, at

$$\left(x^3\right)^6 = x^{3\cdot 6} = x^{18}$$

Øvelse 63 Reducer følgende udtryk. Antag, at x, y og a ikke er 0.

a) $\frac{x^5}{x^3}$ b) $x^3 \cdot x^2$ c) $\left(x^2\right)^6$

d) $\frac{x^2}{x^7}$ e) $x^4 \cdot x^{-4}$ f) $\left(x^3\right)^0$

Eksempel 45 Følgende udtryk

$$\frac{x^3}{x^6}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$. Så fås, at

$$\frac{x^3}{x^6} = x^{3-6} = x^{-3}$$

Det er ifølge reglen $x^{-s} = \frac{1}{x^s}$ lig

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Ofte forventes det, at mere komplicerede udtryk kan overskues.

Video med eksempler på beregninger med fokus på potenser.

Eksempel 46 Udtrykket

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t}$ to gange, først på faktorerne indeholende x og derefter på faktorerne indeholdene y. Når reglen anvendes på x fås, at

$$\frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$$

og når den anvendes på y fås, at

$$\frac{y^4}{y} = y^{4-1} = y^3$$

Bemærk at $y = y^1$. Disse to resultater kan så sættes sammen.

$$\frac{x^6 \cdot y^4}{x^3 \cdot y} = x^3 \cdot y^3$$

Dette kan reduceres yderligere ved brug af reglen $(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s$.

$$x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$$

Eksempel 47 Følgende udtryk

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3}$$

kan reduceres ved at anvende reglen $\sqrt[s]{x^t} = x^{\frac{t}{s}}$ på $\sqrt[8]{x^2}$, hvorved fås, at $\sqrt[8]{x^2} = x^{\frac{2}{8}}$. Det betyder, at

$$x^5 \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot x^{-3} = x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3}$$

Reglen $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$ anvendes på alle tre faktorer,

$$x^5 \cdot x^{\frac{2}{8}} \cdot x^{-3} = x^{5+\frac{2}{8}+(-3)}$$

Og da $5 + \dfrac{2}{8} + (-3) = 2 + \dfrac{2}{8} = \dfrac{16}{8} + \dfrac{2}{8} = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$ fås, at

$$x^{5+\frac{2}{8}+(-3)} = x^{\frac{9}{4}}$$

Øvelse 64 Reducer følgende udtryk. Antag, at x, y og a ikke er 0.

a) $\dfrac{x^4}{x^2}$

b) $\dfrac{x^2}{x^4}$

c) $\dfrac{x^2 \cdot y^4}{x^2 \cdot y^2}$

d) $\dfrac{x^2 \cdot x \cdot y^2}{x^3 \cdot y^3}$

e) $x^3 \cdot \sqrt[5]{x^{10}}$, hvor $x > 0$

f) $a^2 \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot a^{-5}$, hvor $x > 0$

2.5.1 *Eksponentiel notation*

Store tal navngives ved hjælp af de latinske navne for tal (bi betyder 2, tri betyder 3, quad 4 osv.). På dansk skifter man mellem –ion og –iard (million, milliard, billion, billiard, trillion, trilliard, quadrillion osv..). På engelsk benyttes million, billion, trillion, quadrillion, quintillion, sextillion and so on. Så en milliard danske kroner er på engelsk "a billion danish crowns". Tallet 10^{100} går i øvrigt under navnet Googol, hvilket firmaet Google er opkaldt efter.

Når tal er meget store, at det er upraktisk at opskrive alle cifrene. Derfor benyttes ofte en særlig repræsentation, hvor 10'er-potenser benyttes til at angive, hvor mange cifre der er i et tal.

Eksempel 48 — Jordens vægt. Jorden vejer 5 977 000 000 000 000 000 000 000 kg eller ca. 6 millioner milliarder milliarder kg eller 6 quadrillioner kg. Der er 24 cifre efter 5-tallet, hvilket betyder, at Jordens vægt kan skrives som 5,977 ganget med firetyve 10-taller:

$$5\,977\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5,977 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{24} = 5,977 \cdot 10^{24}$$

Nogle computerprogrammer anvender notationen $5,977E24$ og ikke $5,977 \cdot 10^{24}$. E er en forkortelse af »exponential«.

Definition 5 — Eksponentiel notation. Et tal siges at være skrevet i eksponentiel notation, hvis det står på formen $a \cdot 10^b$, hvor $1 \leq a < 10$, og b er et helt tal.

Øvelse 65 Antallet af Googlesøgninger i 2012 var 1 216 373 500 000. Omskriv dette tal til eksponentiel notation. Nedskriv også tallets navn skrevet på henholdsvis dansk og engelsk.

Eksempel 49 — Overslagsregning. Eksponentiel notation er idéel til overslagsregning. Planeten Jupiter vejer $1,8997 \cdot 10^{27}$ kg. Hvor mange gange tungere er Jupiter end Jorden? Det ses, at Jupiters vægt har 3 cifre mere end Jordens vægt - 24 i forhold til 27. Overslagsregning giver derfor, at Jupiter er ca. 1000 gange tungere end Jorden. Lidt mere præcist bliver det ved at opskrive det som en division og runde af undervejs.

$$\frac{5,977 \cdot 10^{24}}{1,8997 \cdot 10^{27}} = \frac{5,977}{1,8997 \cdot 10^{3}} \approx \frac{6}{2 \cdot 10^{3}} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Jorden vejer altså ca. 0,003 gange vægten af Jupiter.

Negative 10'er-potenser benyttes til at skrive meget små tal. At gange et tal med 10^{-1} er det samme som at dividere med 10, og når et tal divideres med 10, rykkes kommaet en plads til venstre.

Eksempel 50 — Molekyler. Et mol er $6,022\,141 \cdot 10^{23}$ molekyler. Et mol vandmolekyler vejer 18,01528 gram. Derfor kan ét vandmolekyles vægt udregnes som følger:

$$\frac{18,01528}{6,022\,141 \cdot 10^{23}} \approx \frac{18}{6 \cdot 10^{23}} = 3 \cdot 10^{-23}$$

Der er 23 nuller foran 3-tallet, og ét vandmolekyle vejer således 0,000 000 000 000 000 000 000 000 03 g.

Koncentrationen af CO_2 i atmosfæren angives i ppm, der er en forkortelse af parts-per-million. På dansk ville vi sige »ud af én million«. Koncentrationen af CO_2 i atmosfæren er ca. 400 ppm. Det betyder at

$$\frac{400}{1\,000\,000} = \frac{4 \cdot 10^{2}}{1 \cdot 10^{6}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

andel af molekylerne i luften er CO_2.

Øvelse 66 Et lille virus er 0,000 000 020 meter langt. Omskriv længden til eksponentiel notation.

Øvelse 67 Benyt overslagsregning til at undersøge, hvor mange vandmolekyler der er i 1 kg vand.

2.6 *Parenteser*

Hvis et tal eller bogstav skal ganges ind i en parentes, skal tallet eller bogstavet ganges med hvert led i parentesen fx

$$5 \cdot (3 + c - a) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot c - 5 \cdot a$$

dette kan reduceres til

$$15 + 5c - 5a$$

Øvelse 68 Udregn følgende udtryk.

a) $a + a + a$

b) $a \cdot b - a \cdot b + a$

c) $\dfrac{a^2}{a}$

d) $a \cdot (b + c) - a \cdot b$

e) $\dfrac{a}{a^2}$

f) $\dfrac{a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d}{a} + c$

g) $a \cdot (a + a)$

h) $(a + b) \cdot c - (c + b) \cdot a$

Er der to parenteser, som skal ganges ind i hinanden (parenteserne ganges ud), skal hvert led i den ene ganges med hvert led i den anden, fx

$$\begin{aligned}(x + y + z) \cdot (a + b + c) &= (x + y + z) \cdot a + (x + y + z) \cdot b + \\ &\quad (x + y + z) \cdot c \\ &= xa + ya + za + xb + yb + zb + \\ &\quad xc + yc + zc\end{aligned}$$

Her er en tabel med eksempler på typiske udregninger.

Regel	**Eksempel**
$a + b \cdot a = (b + 1) \cdot a$	$a + 4a = (1 + 4) \cdot a$
$c \cdot a + b \cdot a = (b + c) \cdot a$	$2a - 4a = (2 - 4) \cdot a$
$\frac{a}{b} \cdot b = a$	$\frac{4}{7} \cdot 7 = 4$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$3 \cdot (b + c) = 3b + 3c$

Video med reducering af udtryk.

Eksempel 51 Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden) $(2x+4)\cdot(3y+z)$.

$$\begin{aligned}(2x+4)\cdot(3y+z) &= (2x+4)\cdot 3y+(2x+4)\cdot z\\ &= 2x\cdot 3y+4\cdot 3y+2x\cdot z+4\cdot z\end{aligned}$$

Eksempel 52 Gang følgende parenteser ud (dvs. gang dem ind i hinanden): $(2x+y)^2\cdot(5+z)$.
Først omskrives $(2x+y)^2$ til $(4x^2+y^2+4xy)$, nu ses at der er to parenteser og ingen potenser

$$(4x^2+y^2+4xy)\cdot(5+z)$$

nu kan det ganges ud.

$$\begin{aligned}(4x^2+y^2+4xy)\cdot(5+z) &= (4x^2+y^2+4xy)\cdot 5+\\ &\quad (4x^2+y^2+4xy)\cdot z\\ &= 4x^2\cdot 5+y^2\cdot 5+4xy\cdot 5+\\ &\quad 4x^2\cdot z+y^2\cdot z+4xy\cdot z\\ &= 20x^2+5y^2+20xy+4x^2z+y^2z+4xyz\end{aligned}$$

Video med eksempler på at gange parenteser ud.

Øvelse 69 Gang følgende parenteser ud.

a) $(x+y)\cdot(x+y)$

b) $(x+y)\cdot(2x+y)$

c) $(x+2)\cdot(2+y)$

d) $(5x+4y)\cdot(2x+3y)$

e) $(x-y)\cdot(x+y)$

f) $(x-3y)\cdot(x+y)$

g) $(x-y)\cdot(x+y)\cdot(z+5)$

h) $(3x+5y+3)\cdot(2x+4)$

2.6.1 Faktorisering

At sætte udenfor parentes betyder, at en faktor, som flere led har tilfælles, kan placeres udenfor en parentes. Det kaldes derfor også for faktorisering.

Eksempel 53 Faktoriser følgende udtryk.

$$2x + 5xy$$

Begge led indeholder x, som derfor kan sættes udenfor parentes

$$2x + 5xy = x \cdot (2 + 5y)$$

Bemærk, at x er fjernet fra begge led.

Øvelse 70 Faktoriser følgende udtryk.

a) $3x + 4xy$

b) $2x + 6xy$

c) $3x^2 + 6xy$

d) $4a + 6b + 8c$

e) $3a + 6ba^2$

f) $3xy^2 - 9xy$

g) $14x^4y^3 - 21x^3y^4$

h) $xy + 3x + 3y + 9$

2.6.2 Kvadratsætninger

Meget ofte skal udtryk på formen $(x + 3)^2$ (kvadratet af et toleddet udtryk), og derfor er der følgende nyttige sætninger.

Sætning 5 — Kvadratsætningerne.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{2.1}$$

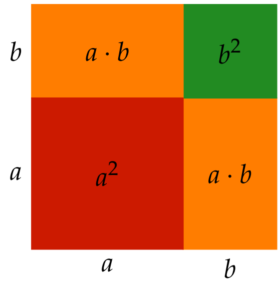
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{2.2}$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \tag{2.3}$$

For at vise, at dette er sandt, skal udregningen af $(a + b)^2$ og de andre to udtryk gennemføres. Dette kaldes et bevis.

■ **Bevis** Sætningerne kan vises ved algebraisk udregning, eller det kan ses som arealer

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) \\
&= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b \\
&= a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b \\
&= a^2 + b^2 + 2ab
\end{aligned}
$$



$a^2 + b^2 + 2ab$

Eksempel 54 Udregn følgende: $(5+3)\cdot(5+3)$. Først bestemmes, hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser, er det den første kvadratsætning. Sætningen siger så at:

$$(5+3)^2 = (5+3)\cdot(5+3) = 5^2 + 3^2 + 2\cdot 5\cdot 3 = 25 + 9 + 30 = 64$$

Meget ofte regnes ikke med tal, men med bogstaver. Derfor kommer der her et eksempel med bogstaver.

Eksempel 55 Udregn følgende: $(x+y)\cdot(x+y)$. Først bestemmes, hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i begge parenteser, er det den første kvadratsætning. Sætningen siger at:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + y^2 + 2\cdot x\cdot y$$

Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere.

Eksempel 56 Udregn følgende: $(2x+y)\cdot(2x-y)$. Først bestemmes, hvilken af de tre kvadratsætninger der skal bruges. Da der står + i den en parentes og - i den anden parentes, er det den tredje kvadratsætning. Sætningen siger, at:

$$
\begin{aligned}
(2x+y)\cdot(2x-y) &= (2x)^2 - y^2 \\
&= 4x^2 - y^2
\end{aligned}
$$

I udregningen er potensregnereglen $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ brugt på $(2x)^2 = 2^2\cdot x^2 = 4x^2$. Nu er opgaven løst, fordi det ikke er muligt at reducere yderligere.

Video med eksempler på reducering af udtryk ved brug af parentesregler og kvadratsætninger.

Øvelse 71 Omskriv ved brug af kvadratsætningerne.

a) $(t+r)^2$

b) $(t-r)\cdot(t+r)$

c) $(2x-r)\cdot(2x-r)$

d) $(x+4y)\cdot(x+4y)$

e) $-(t+r)^2$

f) $-(t-r)^2$

Øvelse 72 Omskriv ved brug af kvadratsætningerne.

a) $(3x-5y)^2$

b) $(3x+5y)^2$

c) $(3t+r)\cdot(3t+r)$

d) $-(t-4r)\cdot(t+4r)$

e) $(3x-3r)\cdot(3x-3r)$

f) $(2x-r^2)\cdot(2x-r^2)$

g) $(x+3)\cdot(x+3)$

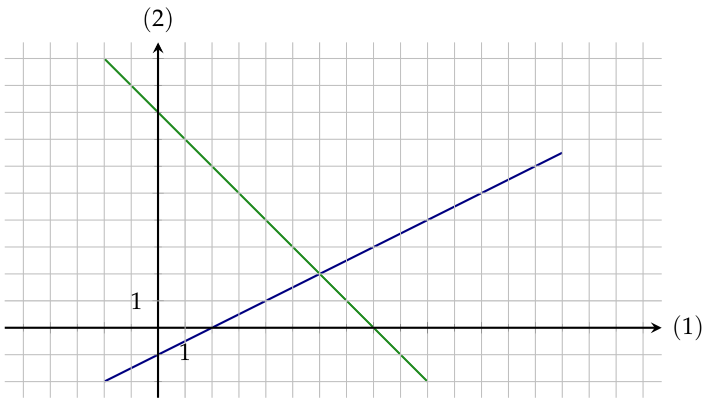
h) $(x+2)\cdot(x-4)$

3
Stykkevis lineær

En funktion kan være stykkevis. Det betyder at den er konstrueret af stykker fra flere forskellige funktioner. Hvis den stykkevise funktion er konstrueret af lineære funktioner, kaldes den stykkevis lineær. Her ses to lineære funktioner

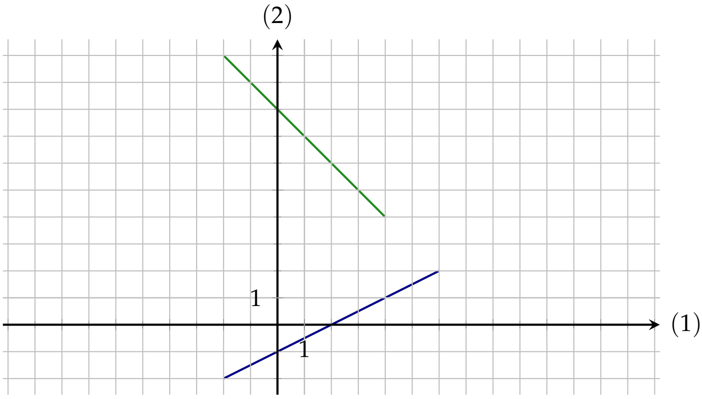
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1 \text{ og } f_2(x) = -x + 8$$

Video om stykkevise lineære funktioner



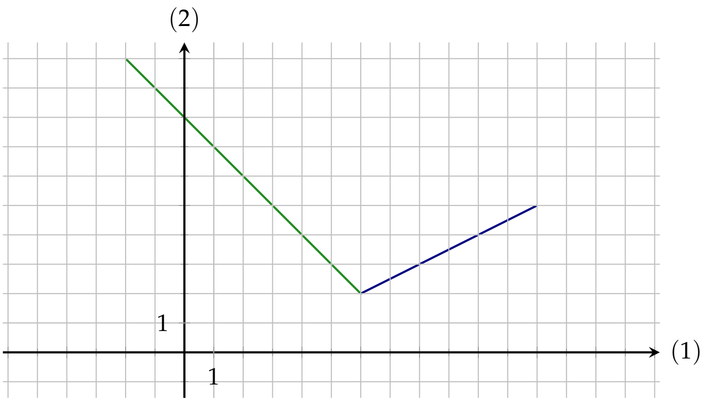
Den stykkevise funktion defineres ved at vælge to *ikke* overlappende intervaller for x-værdien. Her ses hvad der ville se hvis intervallerne overlappede – dette er ikke en funktion.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 8, & x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x - 1, & x \leq 6 \end{cases}$$



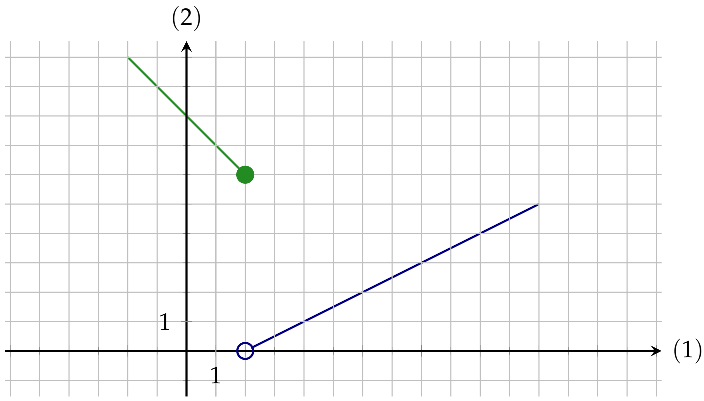
Grafen for en stykkevis funktion kan være sammenhængende.

$$f(x) = \begin{cases} {\color{green}-x+8,} & x \leq 6 \\ {\color{blue}\frac{1}{2}x-1,} & 6 < x \end{cases}$$



Grafen for en stykkevis funktion kan være også være usammenhængende.

$$f(x) = \begin{cases} {\color{green}-x+8,} & x \leq 2 \\ {\color{blue}\frac{1}{2}x-1,} & 2 < x \end{cases}$$



Den åbne og fyldte cirkel viser hvad funktionsværdien er, hvor grafen er usammenhængende. I dette tilfælde betyder den fyldte cirkel betyder at $f(2) = 6$. Det er også muligt at udregne en funktionsværdi med forskriften. Værdien af x har betydning for hvilken forskrift der skal bruges. Når x er mindre end eller ligmed 2 skal den øverste forskrift bruges. Er x større end 2 skal den nederste forskrift bruges.

$$f(2) = -2 + 8 = 6$$

og

$$f(8) = \tfrac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 3$$

Prøv at finde værdierne på grafen.

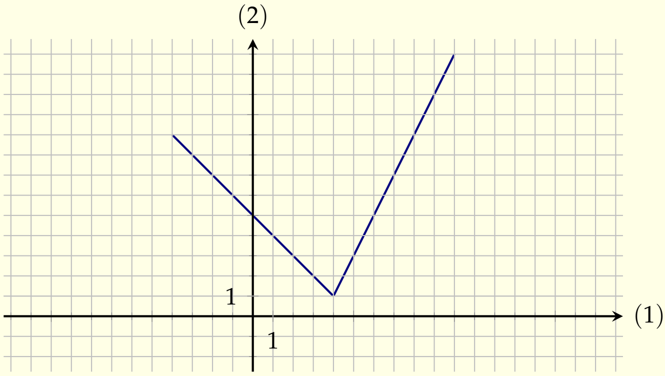
Øvelse 73 Tegn grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 6 \\ 2x - 4, & x > 6 \end{cases}$$

Øvelse 74 Tegn grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 3 \\ -x + 6, & x > 3 \end{cases}$$

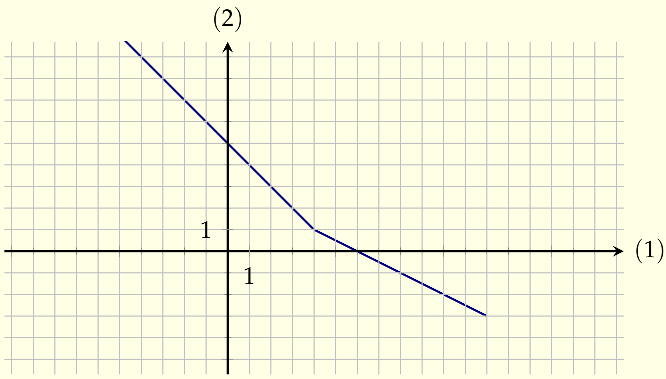
Øvelse 75 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f.



a) Aflæs $f(8)$ på grafen.

b) Benyt grafen til at løse ligningen $f(x) = 3$.

Øvelse 76 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion f.

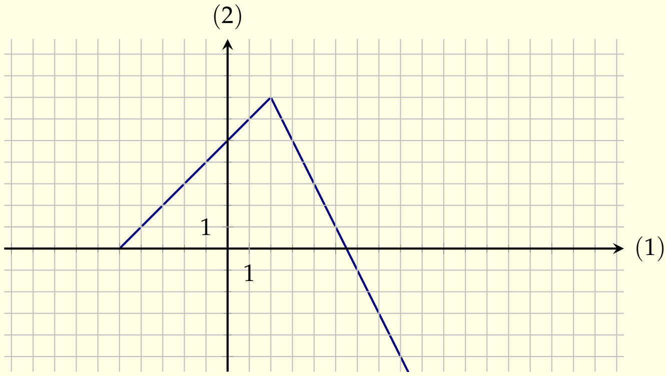


a) Benyt grafen til at bestemme $f(3)$.

b) Benyt grafen til at løse ligningen $f(x) = 6$.

c) Bestem en forskrift for f.

Øvelse 77 På figuren ses grafen for en stykkevis defineret funktion $f(x)$.



a) Benyt grafen til at løse ligningen $f(x) = 3$.

Øvelse 78 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 4 \\ x + 1, & 4 < x \end{cases}$$

a) Bestem $f(2)$, $f(4)$ og $f(10)$.

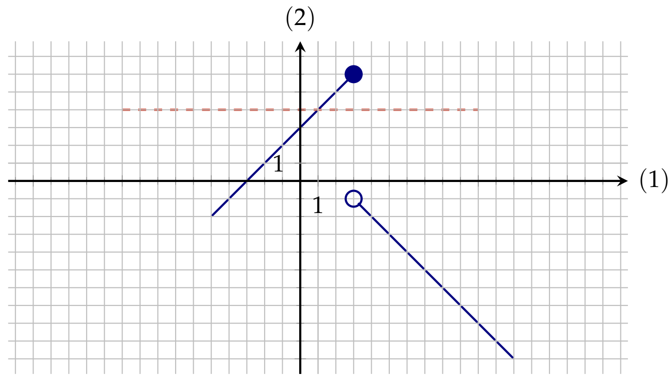
Eksempel 57 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 3 \\ -x + 2, & x > 3 \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 4$.
Først løses ligningerne

$$\begin{aligned} x + 3 &= 4 \\ -x + 2 &= 4 \end{aligned}$$

Ligningen $x + 3 = 4$ har løsningen 1, og da $f(1) = 4$ er 1 en løsning til ligningen $f(x) = 4$. Ligningen $-x + 2 = 4$ har løsningen -2, men da $f(-2) = 1$ er -2 ikke en løsning til ligningen $f(x) = 4$.



Øvelse 79 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4, & x \leq 6 \\ -2x + 19, & 6 < x \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 3$.

Øvelse 80 En stykkevis lineær funktion er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 4 \\ x + 1, & 4 < x \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = 1$.

Ekstra opgaver

Her findes en række opgaver fra matx.dk, der kan anvendes i grundforløbet.

Regnearternes hierarki
Reducering af udtryk
Isolering af variable
Førstegradsligninger med parentes
Førstegradsligninger
Procentafvigelse
Relativ ændring
Bestem procentdel et tal udgør af et andet tal
Bestem procentdelen af et tal
Sammenhæng mellem forskrift og graf for lineære funktioner
Uafhængig og afhængig værdi for en lineær funktion
Forskrift for lineær funktion ud fra to punkter
Tegn grafen for en lineær funktion
Bestem forskriften for en lineær funktion ud fra grafen.

Facitliste

1 a) Er grafen for en funktion. b) Er ikke grafen for en funktion. c) Er ikke grafen for en funktion. d) Er grafen for en funktion.

4 Grafen for funktionen f er den grønne graf. Grafen for funktionen g er den blå graf. Grafen for funktionen h er den røde graf.

9 Punkt $(3, 7)$ fordi så vil grafen være parallel med 2. aksen og derfor ikke være grafen for en funktion.

10 a) $a = 1/3$ og $b = 3$. b) $y = 1/3x + 3$. c) $(12, 5)$ ligger ikke på grafen. $(-9, 0)$ ligger på grafen.

11 $f(x) = -x + 3$

12 a) $f(x) = 2x$. b) $f(x) = 0,1x + 0,5$. c) $f(x) = -0,5x + 5$. d) $f(x) = 5,25x - 35$. e) $f(x) = -x + 8$. f) $f(x) = 0,1x + 4,2$. g) $f(x) = 0,25x + 34,5$. h) $f(x) = -x - 2$.

13 $f(x) = 2x + 1$

14 $f(x) = -x + 1$

15 $f(x) = x - 4$

16 $f(x) = -0,5x + 2$

17 Startgebyret er 54 kr. og kilometertaksten er 6 kr.

18 Startgebyret er 150 kr. og minuttaksten er 6,67 kr.

19 a) $y = 1,10091x$. b) Densiteten af vandet er 1.10091 g/mL.

20 a) $v = q \cdot h$. b) $y = k \cdot (r + q)$. c) $r = 6 \cdot (n - m)$. d) $f = k \cdot \dfrac{p}{q}$.e) $E = m \cdot c^2$. f) $E = k \cdot O^2$.

21 a) $y = 1,06x$. b) Densiteten af væsken er 1,06 g/mL.

22 a) $y = 13,8x + 2,2$. b) Videoen får 2,2 visninger lige efter den er uploaded og derefter får den 13,8 visninger i timen.

23 a) $y = -1x + 9,6$. b) Der er 9600 danskere der ikke har en mobiltelefon i 2011 og det tal falder med 1000 om året.

24 a) $y = 2x + 150$, hvor y er den samlede pris i kr. og x er forbruget af gigabit data. b) $y = 1,2x + 5,5$, hvor y er prisen på ét kilogram kartofler og x er antallet af år der er gået siden 2010. c) $y = 0,4x + 5,5$, hvor y er eksporten af grise og x er antallet af år efter 2001. d) $y = -2x + 28$, hvor y er tiden i min. det tager for Dennis at løbe 5 km og x er antallet af gange han har løbet. e) $y = -55\,000x + 800\,000$, hvor y er antallet af rygere og x er antallet af år efter 2 006. f) $y = 45x + 130$, hvor y er afstanden bilen har kørt i km og x er tiden den har kørt i timer.

25 a) $y = k \cdot (x + z)$. b) $y + x = k \cdot \dfrac{x}{y}$ c) $x - y = k \cdot \sqrt[3]{y}$. d) $\dfrac{x}{y} = k \cdot \sqrt{x \cdot y}$. e) $x \cdot y = k \cdot (y + z)$

26 a) x er proportional med kvadratroden af x. b) Summen af kvadraterne af x og y er proportional med kvadratet af y. c) x er proportional med kubikroden af y. d) Kvadratet af summen af x og y er proportional med kubikroden af x. e) Summen af kvadraterne af x og y er proportional med differensen mellem x og y. f) Forholdet mellem x og y er proportional med kvadratroden af summen af x og y. g) Forholdet mellem x og y er proportional med produktet af x og y. h) Kvadratet af y er proportional med y.

27 a) Et badekar indeholder 42 liter vand og fyldes yderligere med 23 liter pr. minut. b) En bil kører med 35 km/t og accelererer med 1,2 km/t pr. sekund. c) En video får 240 visninger pr. time.

28 a) Effekten af vindmøllen er 12 kW, når vindhastigheden er over 4 m/s, og vokser med 110 kW når vindhastigheden vokser med 1 m/s, til vindhastigheden er 20 m/s. b) En bambus er 5 cm og vokser med 2,3 cm om dagen når den er mellem 1 og 20 dage.

29 a) $f(3) = 18$. b) $f(-3) = 0$. c) $f(3) = -1$. d) $f(-2) = 6$. e) $f(0) = -8$. f) $f(1) = -3$. g) $f(2) = 4$. h) $f(0,5) = 2$. i) $f(3/4) = -1,5$.

30 a) Det er en løsning. b) Det er ikke en løsning. c) Det er ikke en løsning. d) Det er en løsning.

31 a) $x = 3/5$. b) $x = 1/10$.

32 a) $x = 1/2$. b) $x = 1/3$. c) $x = 7/2$. d) $x = 2/3$. e) $x = 8/9$. f) $x = -1$. g) $x = -7$. h) $x = 3$. i) $x = -8/6$.

33 a) $x = 6$. b) $x = 4$. c) $x = -2$. d) $x = 5$. e) $x = 1/2$. f) $x = -3$. g) $x = 8$. h) $x = 0$.

34 a)

x	-5	1	4	4
$2x+1$	-9	3	9	9

b)

x	-5	1	8	4
$-3x-1$	14	-4	-25	-13

c)

x	-4	2	5	3
$4x+5$	-11	13	25	17

d)

x	-3	3	8	4
$-4x+4$	16	-8	-28	-12

e)

x	-3	3	7	5
$3x-2$	-11	7	19	13

f)

x	-4	2	6	4
$-3x+1$	13	-5	-17	-11

g)

x	-4	2	7	5
$5x$	-20	10	35	25

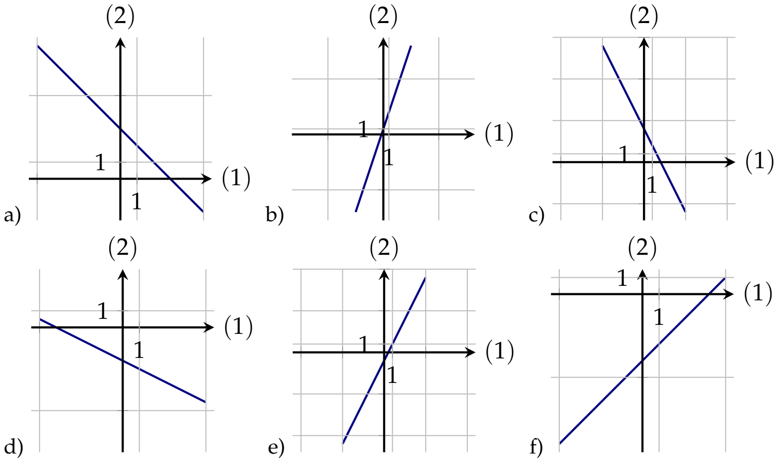
h)

x	0	1	2	3
$x-4$	-4	-3	-2	-1

i)

x	0	1	2	3
$-2x+4$	4	2	0	-2

35



36 Punktet $(5, 120)$ ligger ikke på grafen for f. Punktet $(0.1, 27)$ ligger på grafen for f.

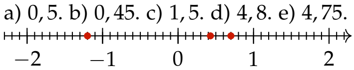
37 a) $x = 2$. b) $x = -2$. c) $x = 2$. d) Ingen løsning e) $x = 20$. f) $x = 2$.

38 a) $x = 6/5$. b) $x = 3/4$. c) $x = -6/13$. d) $x = 15/19$.

39 a) $x = 1/2$. b) $x = 30$.

40 a) $0,5$. b) $0,45$. c) $1,5$. d) $4,8$. e) $4,75$. f) $0,001$. g) $3,4$. h) $4,75$. i) $2,312$.

41



42 a) 20 %. b) 10 % c) 33,3 %. d) 22,2 %.

43 a) -7. b) 25. c) 13. d) -18. e) 4. f) 75. g) -11. h) -75.

44 $3/5$, $0,6$, $60\,\%$, $\dfrac{6}{10}$, løsningen til ligningen $3 = 5x$.

45 a) 6. b) $\dfrac{2b}{5}$ c) $\dfrac{3}{2}$. d) 2.

46 a) $\dfrac{28}{3}$. b) $\dfrac{8b}{3}$. c) 2. d) $\dfrac{2}{3}$. e) $\dfrac{2}{3}$. f) $\dfrac{a}{b}$.

47 a) 2. b) 2 c) $\dfrac{41}{15}$. d) $3\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{3x}$.

48 a) $\dfrac{3}{4}$. b) $\dfrac{x}{y}$. c) $\dfrac{3}{4}$. d) $\dfrac{9}{8}$. e) $\dfrac{3x}{2y}$. f) $\dfrac{b+x}{c}$. g) $\dfrac{ab}{cx}$. h) $\dfrac{ab+cx}{ca}$.

49 $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{b+c}{a}$

50 a) $5x+2$. b) $3x+9$ c) 3. d) $\dfrac{3}{4}$.

51 a) 15. b) 60. c) 40. d) 15. e) $52,5$. f) 225. g) 66. h) 375. i) $0,09$. j) 6. k) $12,3$. l) 144.

52 Fri tale + fri sms/mms blev valgt af 300. Fri tale + fri sms/mms + 10 G data blev valgt af 120. Fri tale + fri sms/mms + fri data blev valgt af 780.

53 a) 10 %. b) 50 %. c) 200 %. d) 5 %. e) 20 %. f) 5 %. g) $11,1$ %. h) 25 %.

54 De er lige store og det gælder for alle procenttal og tal.

55 De er lige store og det gælder for alle procenttal og tal.

56 a) 250. b) 24. c) 360. d) 68. e) 285. f) 160. g) 168. h) $48,75$.

57 De koster 1 080 kr.

58 Det er de sorte jeans er sat med med 225 kr. og de pink jeans er sat ned med 18 %

59 a) 60 %. b) -5 %. c) 20 %. d) 18 %.

60 a) Mellem 9 og 16. b) Mellem 6 og 8. c) Mellem 70 og 90. d) Mellem 46 og 57. e) Mellem 7 og 8. f) Mellem 54 og 55.

61 Mellem 5 og 6.

62 a) Ja. Da $7 \cdot 0 - 3 = -3$ er negativ og $7 \cdot 1 - 3 = 4$ er positiv, vil den være 0 et sted mellem 0 og 1. b) Ja.

63 a) x^2. b) x^5. c) x^{12}. d) x^{-5}. e) 1. f) 1.

64 a) x^2. b) x^{-2}. c) y^2. d) y^{-1}. e) x^5. f) $\frac{x^2}{a^3}$.

65 $1,2163735 \cdot 10^{12}$. ca. 1,2 tusinde millarder. Approx. 1,2 thousand billions.

66 $2 \cdot 10^{-8}$.

67 $333 \cdot 10^{25}$.

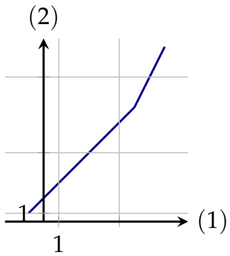
68 a) $3a$. b) a. c) a. d) $a \cdot c$. e) a^{-1}. f) $b + d$. g) $2a^2$. h) $-b\,(a - c)$.

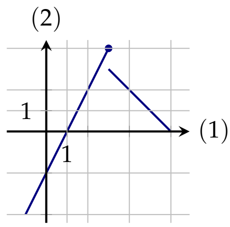
69 a) $x^2 + 2\,x\,y + y^2$. b) $2\,x^2 + 3\,x\,y + y^2$. c) $x\,y + 2\,x + 2\,y + 4$. d) $10\,x^2 + 23\,x\,y + 12\,y^2$. e) $x^2 - y^2$. f) $x^2 - 2\,x\,y - 3\,y^2$. g) $x^2z - y^2z + 5\,x^2 - 5\,y^2$. h) $6\,x^2 + 10\,x\,y + 18\,x + 20\,y + 12$.

70 a) $x\ (4\,y + 3)$. b) $2\,x\ (3\,y + 1)$. c) $3\,x\ (x + 2\,y)$. d) $2 \cdot (2\,a + 3\,b + 4\,c)$. e) $3\,a\,(2\,ab + 1)$. f) $3\,x\,y\,(y - 3)$. g) $7\,x^3y^3\,(2\,x - 3\,y)$. h) $(y + 3)\,(x + 3)$.

71 a) $r^2 + 2\,tr + t^2$. b) $-r^2 + t^2$. c) $r^2 - 4\,x\,r + 4\,x^2$. d) $x^2 + 8\,x\,y + 16\,y^2$. e) $-r^2 - 2\,tr - t^2$. f) $-r^2 + 2\,tr - t^2$.

72 a) $9\,x^2 - 30\,x\,y + 25\,y^2$. b) $9\,x^2 + 30\,x\,y + 25\,y^2$. c) $r^2 + 6\,tr + 9\,t^2$. d) $16\,r^2 - t^2$. e) $9\,r^2 - 18\,x\,r + 9\,x^2$. f) $r^4 - 4\,r^2x + 4\,x^2$. g) $x^2 + 6\,x + 9$. h) $x^2 - 2\,x - 8$.

73 

74) 

75 a) 9. b) $x = 2$ og $x = 5$.

76 a) 2. b) $x = -1$. c) $f(x) = \begin{cases} -x + 5, & x \leq 4 \\ -1/2x + 3, & 4 < x \end{cases}$

77 a) $x = -2$ og $x = 4$.

78 a) $f(2) = 1$, $f(4) = 5$, $f(10) = 11$.

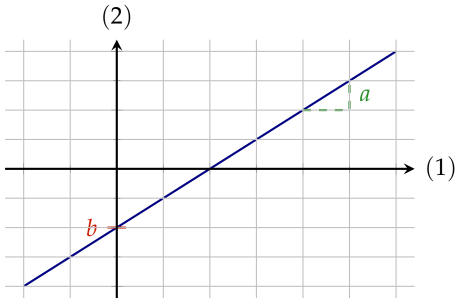
79 $x = -2$ og $x = 8$.

80 $x = 2$.

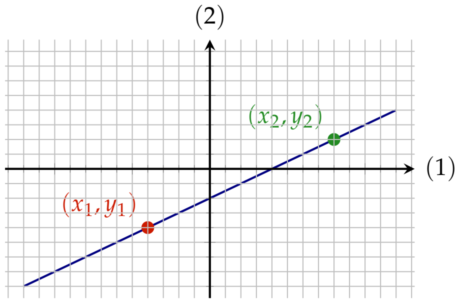
Formelsamling

Brøker			
$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c \pm b \cdot d}{c \cdot d}$	Addition og substraktion
$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	Multiplikation
$\frac{a}{d} / \frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	Division
$\frac{b}{c}$	$=$	$\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$	Forlæng og forkort
Potenser			
$x^s \cdot x^t$	$=$	x^{s+t}	
$\frac{x^s}{x^t}$	$=$	x^{s-t}	
$(x^s)^t$	$=$	$x^{s \cdot t}$	
$(x \cdot y)^s$	$=$	$x^s \cdot y^s$	
$\left(\frac{x}{y}\right)^s$	$=$	$\frac{x^s}{y^s}$	
x^0	$=$	1	
x^{-s}	$=$	$\frac{1}{x^s}$	
$\sqrt[s]{x}$	$=$	$x^{\frac{1}{s}}$, hvor $x > 0$	
$\sqrt[s]{x^t}$	$=$	$x^{\frac{t}{s}}$, hvor $x > 0$	
Parenteser			
$x \cdot (a + b)$	$=$	$a \cdot x + b \cdot x$	Distributive lov
$(a + b)^2$	$=$	$a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$	1. kvadratsætning
$(a - b)^2$	$=$	$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$	2. kvadratsætning
$(a + b) \cdot (a - b)$	$=$	$a^2 - b^2$	3. kvadratsætning

Lineære funktioner			



$f(x)$	$=$	$a \cdot x + b$	



a	$=$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Hældningskoefficient
b	$=$	$y_1 - a \cdot x_1$	2. Skæringspunktet med 1. aksen er $(0, b)$
a	$>$	0	Funktionen er voksende
a	$=$	0	Funktionen er konstant
a	$<$	0	Funktionen er aftagende

Ligninger

$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$x + y + a = z + a$	Ligning adderet med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$x + y - a = z - a$	Ligning subtraheret med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$ax + ay = az$	Ligning multipliceret med a
$x + y = z$	$\Leftrightarrow$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{z}{a}$	Ligning divideret med a

Multiplikationstabel

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

matX ApS 2021

ISBN 978-87-93632-05-9

9 788793 632059